Segnali e sistemi

nel dominio della frequenza

Sommario

- Segnali tempo continuo periodici
  - Serie di Fourier
- Segnali tempo continuo aperiodici
  - Trasformata di Fourier
- Proprietà della Trasformata di Fourier
- Analisi dei sistemi LTI per mezzo della Trasformata di Fourier
- Risposta in frequenza dei sistemi LTI
- Esempi

Segnali esponenziali complessi

Premessa

Il segnale $x(t)=e^{st}$, (in particolare $x(t)= e^{j2\pi f t}$) è **un'autofunzione** per i sistemi LTI

significato:

$$e^{j2\pi f t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{?} H(f)e^{j2\pi f t}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau = e^{j2\pi f t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = e^{j2\pi f t}H(f)$$

$$H(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \Longrightarrow$$

Numero complesso, funzione del valore di *f*

Conseguenze:

se $x(t)=\sum_{i=1}^{N} c_i e^{j2\pi f_i t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)=\sum_{i=1}^{N} c_i H(f_i) e^{j2\pi f_i t}$

in generale complesso

L'analisi si riduce alla determinazione di: $H(f_i)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_i \tau} d\tau$

Quali segnali possono essere espressi nella forma

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N} c_i e^{j2\pi f_i t} \qquad \textbf{?}$$

Ad esempio....

> *Un segnale periodico di periodo T può essere espresso come combinazione lineare di esponenziali complessi tramite* ***la serie di Fourier***

Forme della serie di Fourier (x(t) reale):

detta $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$

la ***pulsazione (frequenza angolare) fondamentale*** di $x(t)$, si ha:

$$1)\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}$$

$$2)\quad x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k2\pi f_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k2\pi f_0 t$$

$$3)\quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\left(k2\pi f_0 t + \varphi_k\right)$$

Coefficienti

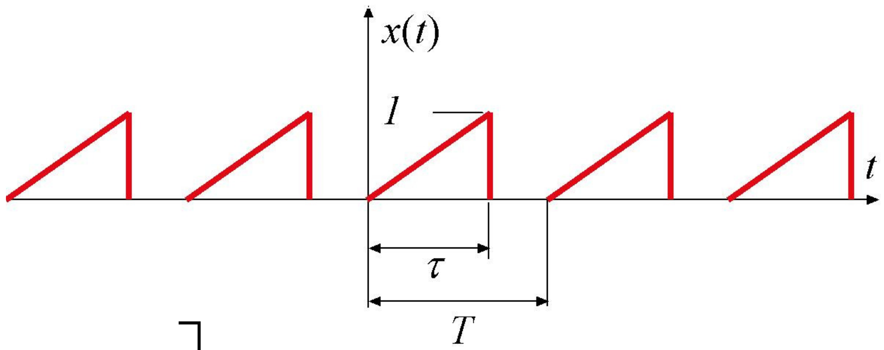
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk2\pi f_0 t}dt \qquad c_k = c_{-k}^* \quad per\ x(t)\ reale$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\cos(k2\pi f_0 t)dt \quad (k \neq 0) \qquad A_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)dt = c_0 = D_0$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\sin(k2\pi f_0 t)dt \quad (k \neq 0) \qquad B_0 = 0$$

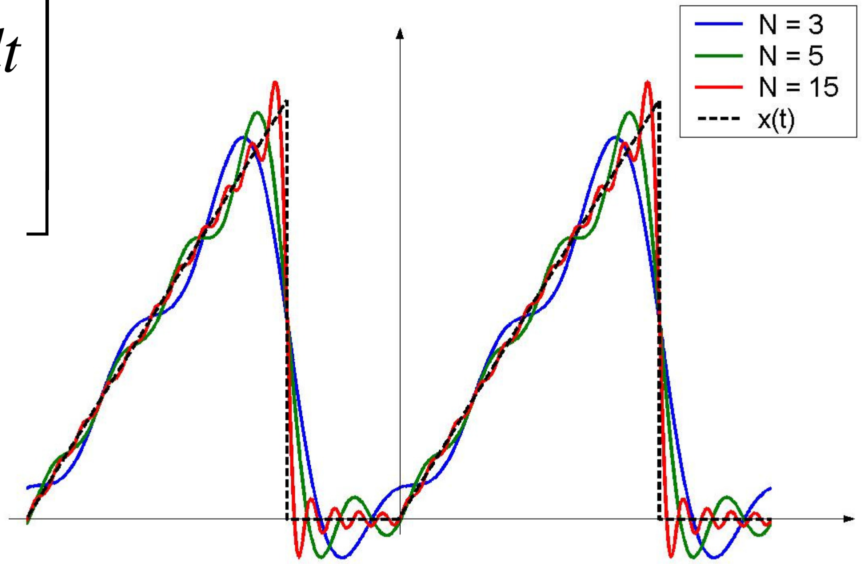
$$c_k = \frac{1}{2}(A_k - jB_k) = \frac{1}{2}D_k e^{j\varphi_k} \quad (k \neq 0)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} t e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$



$$= \frac{1}{T\tau}\left[-\left.\frac{t e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{jk\frac{2\pi}{T}}\right|_0^{\tau} + \int_0^{\tau} \frac{e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}}{jk\frac{2\pi}{T}} dt \right]$$

$$= -\left[\frac{e^{-jk2\pi\frac{\tau}{T}}}{jk2\pi} + \frac{T}{\tau}\frac{1-e^{-jk2\pi\frac{\tau}{T}}}{(k2\pi)^2} \right]$$



Altri esempi

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} \mathrm{d}t = \int_{\langle 1 \rangle} x(\tau T) e^{-j2\pi k\tau} \mathrm{d}\tau$$

- Se la funzione è reale e pari: $c_k = 2 \int_0^{1/2} x(\tau T) \cos(2\pi k \tau) \mathrm{d}\tau$
- Sia: $x_T(t) = x(t) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$; sia inoltre $T_1 \le T,\ \alpha = \frac{T_1}{T},\ \ \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
- 1) $x_T(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right)$, $\qquad c_k = 2 \int_0^{\alpha/2} \cos(2\pi k \tau) \mathrm{d}\tau = \alpha\, \mathrm{sinc}(\alpha k),\ c_0 = \alpha$
- 2) $x_T(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right)\left(1 - |t| \frac{2}{T_1}\right),\ c_k = \frac{\alpha}{2} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\alpha k}{2}\right),\ c_0 = \frac{\alpha}{2}$
- 3) $x_T(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cos\left(\pi \frac{t}{T_1}\right),\ c_k = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\cos(\alpha k \pi)}{\left(1 - (2\alpha k)^2\right)},\ \lim_{2\alpha k \to \pm 1} c_k = \frac{\alpha}{2}$
- 4) $x_T(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cos^2\left(\pi \frac{t}{T_1}\right),\quad c_k = \frac{\sin(\alpha k \pi)}{2k\pi\left(1 - (\alpha k)^2\right)},\ c_0 = \frac{\alpha}{2},\ \lim_{\alpha k \to \pm 1} c_k = \frac{\alpha}{4}$

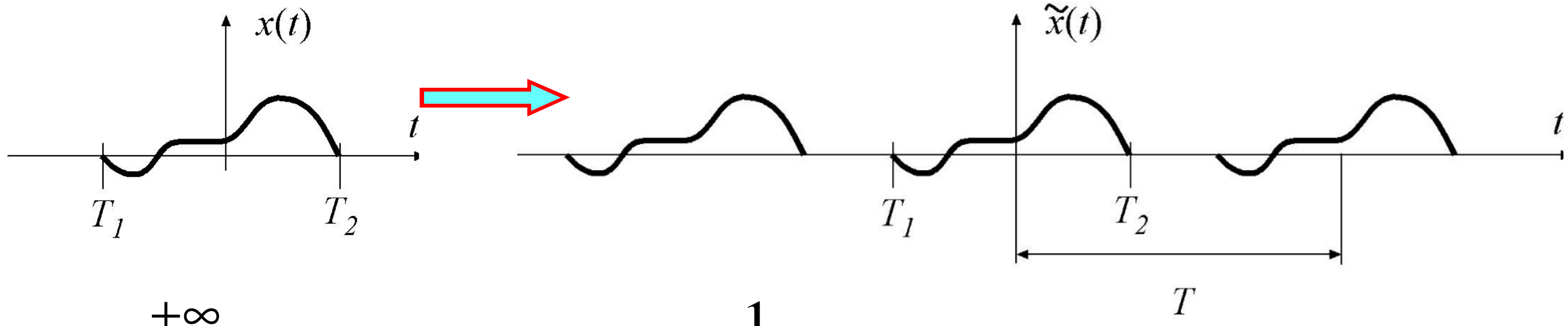
Generalizziamo

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT) \qquad G(f)=\mathcal{F}\{g(t)\}$$

- Risulta: $c_k=\dfrac{1}{T}G\left(\dfrac{k}{T}\right)$
- Coseno Rialzato: $g(t)=\mathrm{sinc}(t/T)\dfrac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2} \qquad 0\le\alpha\le 1$

$$G(f)=\begin{cases} T & |f|\le\dfrac{1-\alpha}{2T} \\ \dfrac{T}{2}\left(1+\cos\left(\pi\dfrac{T}{\alpha}\left(|f|-\dfrac{1-\alpha}{2T}\right)\right)\right) & \dfrac{1-\alpha}{2T}<|f|\le\dfrac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \qquad c_k=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

- Se α=0, $g(t)=\mathrm{sinc}(t/T) \quad G(f)=T\mathrm{rect}(fT)$



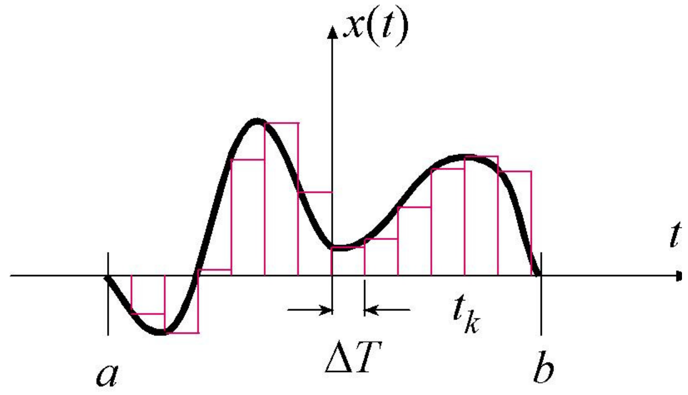
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \qquad f_0 = \frac{1}{T}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \quad = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt$$

Posto $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$

$$c_k = \frac{1}{T} X(f)\Big|_{f=kf_0} \Longrightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{jk2\pi f_0 t}$$

$$\boxed{\tilde{x}(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(kf_0)e^{jk2\pi f_0 t}}$$



Definizione di integrale:

$$\int_a^b x(t)dt=\lim_{\Delta T\to 0}\boxed{\Delta T\sum_k x(k\Delta T)}$$

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(kf_0)e^{jk2\pi f_0 t}=\boxed{f_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(kf_0)e^{jk2\pi f_0 t}}$$

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ f_0\to 0}}\begin{cases}\tilde{x}(t)\to x(t)\\ f_0\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(kf_0)e^{jk2\pi f_0 t}\to\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi f t}df\end{cases}$$

Pertanto:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Trasformata di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

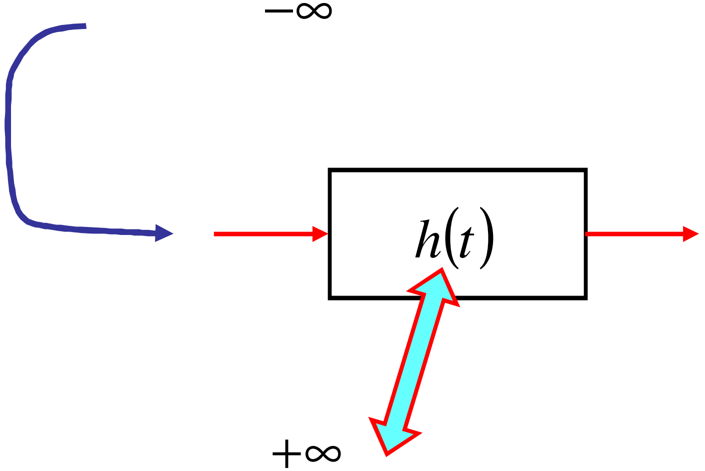
Antitrasformata di Fourier

Il segnale $x(t)$ è espresso tramite una “somma” (integrale) di funzioni esponenziali complesse $e^{j2\pi f t}$

Alla costruzione del segnale $x(t)$ partecipano, in generale, funzioni esponenziali complesse a tutte le frequenze f, ciascuna con ampiezza complessa infinitesima, data da:

$$X(f) df$$

Se: $$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$



$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(f)X(f)}_{Y(f)}e^{j2\pi f t}df$$

$$H(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{-j2\pi f t}dt$$

$H(f)$ = Risposta in frequenza del sistema LTI

$|H(f)|$ ⇨ Come il sistema modifica l'ampiezza delle varie costituenti esponenziali complesse

$\arg[H(f)]$ ⇨ Come il sistema modifica la fase delle varie costituenti esponenziali complesse

Relazioni con ω

Posto $\omega = 2\pi f$, le relazioni diventano:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Non tutte le funzioni $x(t)$ possiedono trasformata di Fourier

Non converge per ogni valore di ω

Non converge a $x(t)$ per ogni valore di t

Condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Fourier

a) Se $\int_{\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$

allora $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ converge

e posto $e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df - x(t)$

si ha: $\int_{\infty}^{\infty} |e(t)|^2 \, dt = 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$ può essere diverso da $x(t)$ in punti isolati

(l'errore ha energia nulla)

Convergenza

Condizioni sufficienti per l'esistenza della
trasformata di Fourier

b) Se

1) $\int_{\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

2) $x(t)$ ha un numero finito di massimi e minimi in ogni intervallo finito

3) $x(t)$ ha un numero finito di discontinuità (finite) in ogni intervallo finito

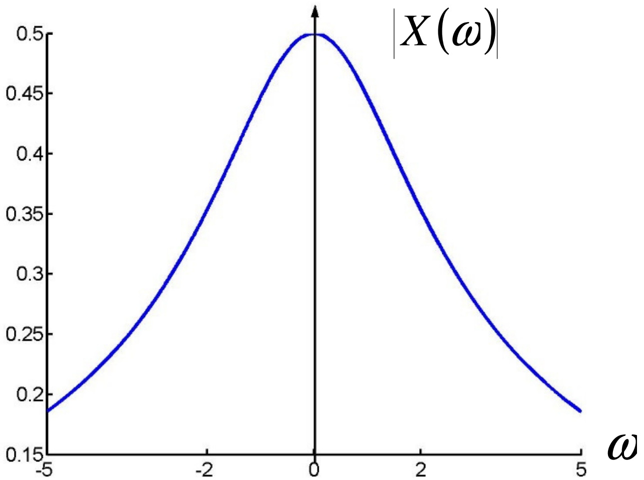
allora $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ converge

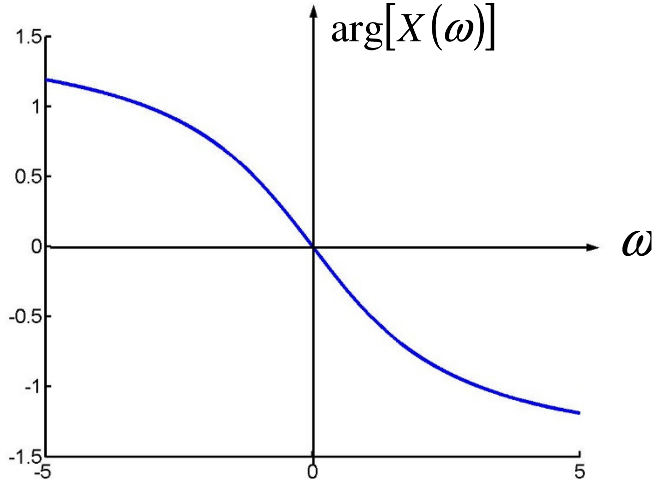
$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \begin{cases} x(t) & \textbf{\textit{(continua)}} \\ \frac{1}{2}\left[x_+(t) + x_-(t)\right] & \textbf{\textit{(discontinua)}} \end{cases}$$

$$x(t) = e^{-a\,t}u(t) \qquad a > 0$$

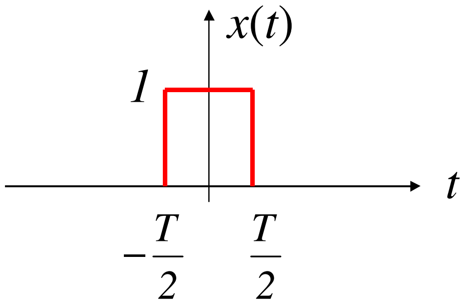
$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j2\pi f\,t}dt = -\left.\frac{e^{-at}e^{-j2\pi f\,t}}{a + j2\pi f}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad \arg[X(\omega)] = \arctan\left(\frac{-\omega}{a}\right)$$





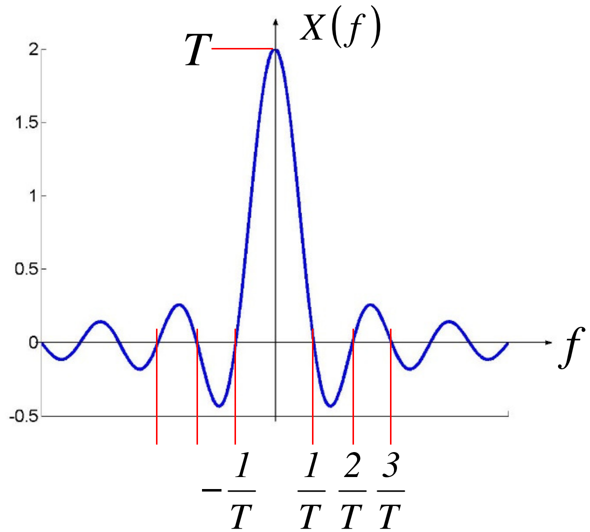
$$\boxed{x(t) = \mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]}$$



$$X(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi f t} dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-T/2}^{+T/2} = T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$X(f) = T\,\mathrm{Sa}(\pi f T) = T\,\mathrm{sinc}(f T)$$

$$\begin{cases} \mathrm{Sa}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \\ \mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \end{cases}$$



Funzione reale, pari

Ipotesi: $x(t)$ reale

1) Linearità

$$x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f)$$

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} a\,X_1(f) + b\,X_2(f)$$

2) Simmetria

$$\boxed{X(-f) = X^*(f)}$$

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi(-f)t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{j2\pi f t}\,dt = X^*(f)$$

Implicazioni:

$$\Re e\{X(f)\} = \Re e\{X(-f)\} \qquad \textit{funzione pari}$$

$$\Im m\{X(f)\} = -\Im m\{X(-f)\} \qquad \textit{funzione dispari}$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \qquad \textit{funzione pari}$$

$$\arg\{X(f)\} = -\arg\{X(-f)\} \qquad \textit{funzione dispari}$$

$$x(t)\ \textit{pari} \overset{F}{\leftrightarrow} X(f)\ \textit{reale e pari}$$

$$x(t)\ \textit{dispari} \overset{F}{\leftrightarrow} X(f)\ \textit{immaginaria e dispari}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_d(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) = \Re e\{X(f)\} + j\Im m\{X(f)\}$$

$$x_p(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \Re e\{X(f)\} \qquad x_d(t) \overset{F}{\leftrightarrow} j\Im m\{X(f)\}$$

3) Traslazione nel tempo:

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad x(t-t_0) \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\underbrace{t-t_0}_{\alpha}) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} e^{-j2\pi f t_0} d\alpha$$

$$= X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

4) Derivazione nel tempo:

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad \frac{d\,x(t)}{dt} \overset{F}{\leftrightarrow} j2\pi f\, X(f)$$

5) Scalaggio nel tempo e nella frequenza:

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad x(at) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

6) Relazione di Parseval:

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E < \infty \rightarrow x(t) \ \textit{segnale di energia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$$

$$ma \quad \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = P < \infty \rightarrow x(t) \ \textit{segnale di potenza}$$

$$\lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\rightarrow\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df = \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

$$\left(X_T(f) = F\left\{ x(t)\, rect\left[\frac{t}{T}\right] \right\} \right)$$

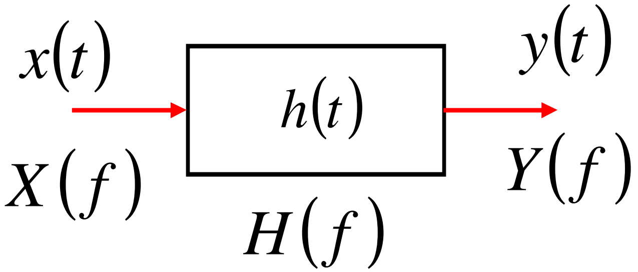
Proprietà della trasformata di Fourier

7) Convoluzione:

$$x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f)$$

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) X_2(f)$$

pertanto:



$$\boxed{Y(f) = H(f) X(f)}$$

$$H(f) \Rightarrow \quad risposta \;\; in \;\; frequenza$$

$$|H(f)| \Rightarrow \quad risposta \;\; di \;\; ampiezza$$

$$\arg\{H(f)\} \Rightarrow \; risposta \;\; di \;\; fase$$

8) Proprietà di modulazione:

$$x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f)$$

$$x_1(t)x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \otimes X_2(f) = \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)]$$

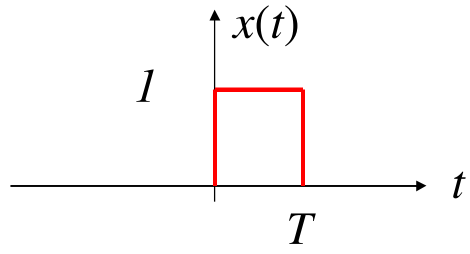
9) Dualità:

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$$

$$X(t) \overset{F}{\leftrightarrow} x(-f) \qquad X(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega)$$

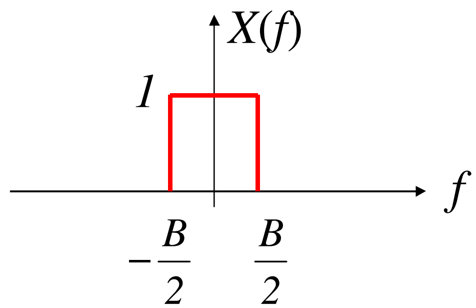
Esempi

$$x(t) = \mathrm{rect}\left[\frac{t - T/2}{T}\right]$$



Per la proprietà della traslazione nel tempo:

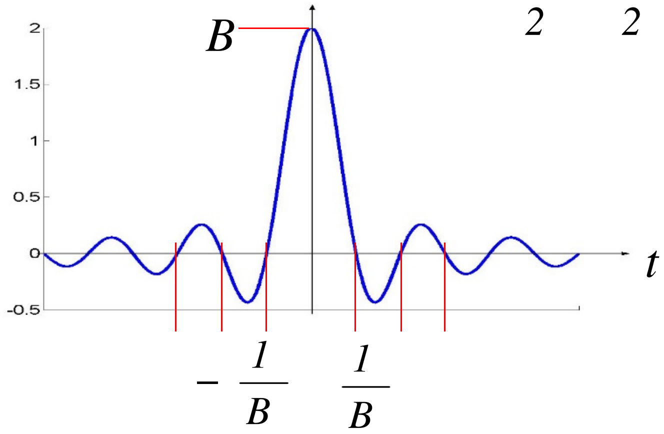
$$X(f) = T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\,e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = T\,\mathrm{sinc}(f T)\,e^{-j\pi f T}$$



$$X(f) = \mathrm{rect}\left[\frac{f}{B}\right] = \begin{cases} 1 & |f| < B/2 \\ 0 & |f| > B/2 \end{cases}$$

Per dualità:

$$x(t) = B\,\frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$$



$$\boxed{x(t) = \delta(t)}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

$$x(t) = \delta(t - t_0) \Longleftrightarrow X(f) = 1 \times e^{-j2\pi f t_0}$$

$$x(t) = \delta(t + t_0) \Longleftrightarrow X(f) = 1 \times e^{j2\pi f t_0}$$

Per dualità:

$$x(t) = e^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow X(f) = \delta(-f - f_0) = \delta(f + f_0)$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow X(f) = \delta(-f + f_0) = \delta(f - f_0)$$

e quindi:

$$\boxed{x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}}$$

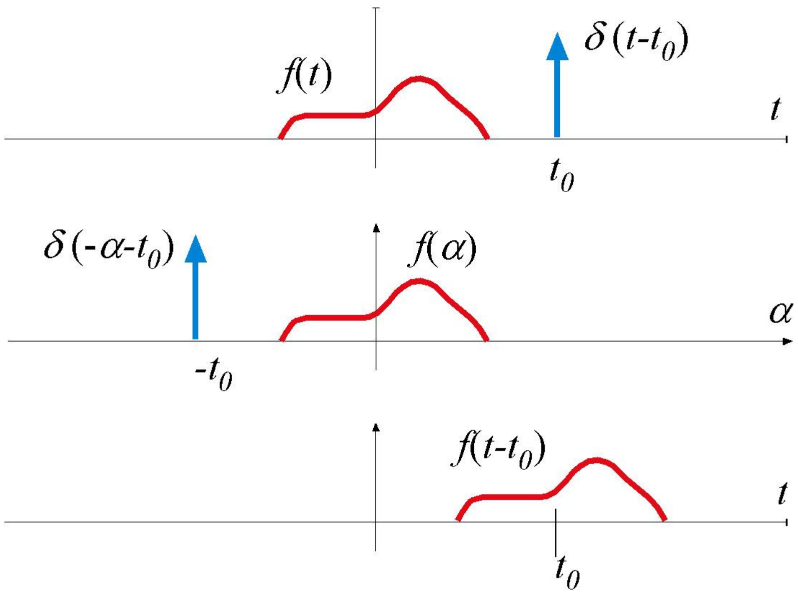
$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

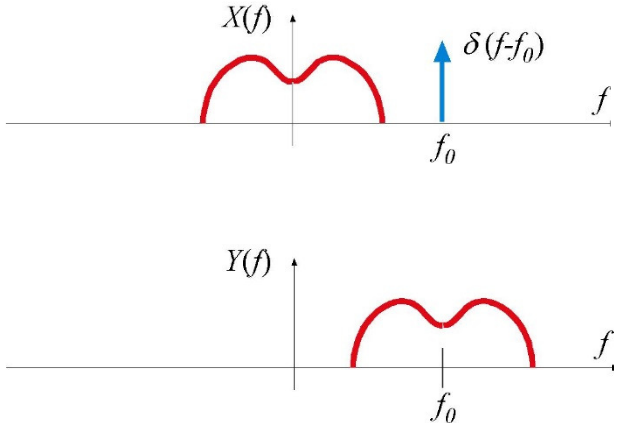
$$\boxed{y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}}$$

(traslazione in frequenza)

$$Y(f) = X(f) \otimes \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$$

(la convoluzione tra una funzione e un impulso ideale corrisponde alla traslazione della funzione nel punto ove è centrato l'impulso)



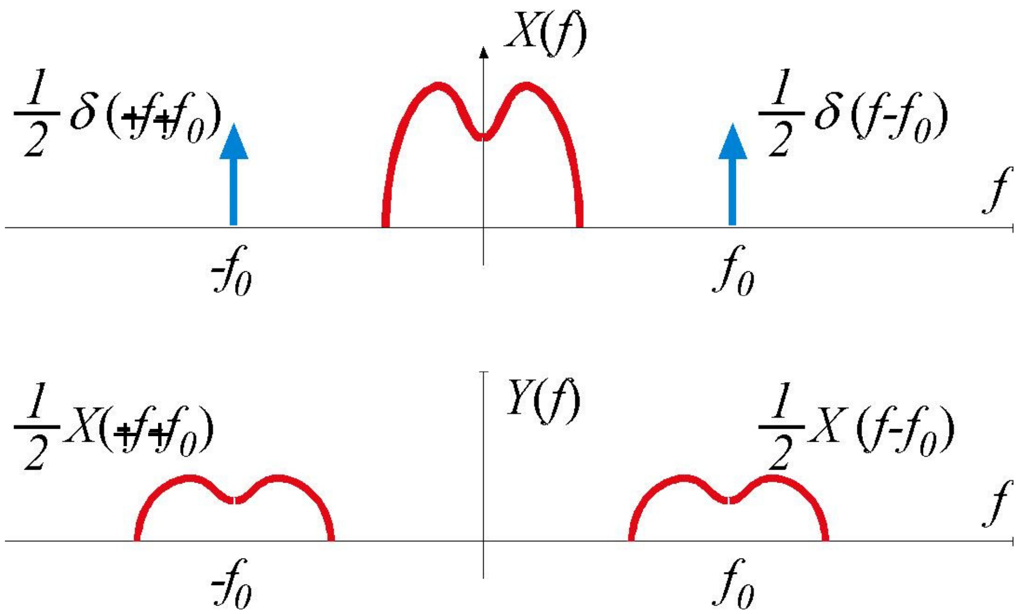


Esempi

$$\boxed{y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)}$$

(modulazione)

$$Y(f) = X(f) \otimes \left\{ \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \right\}$$



$$\boxed{x(t)=u(t)}$$

Premessa:

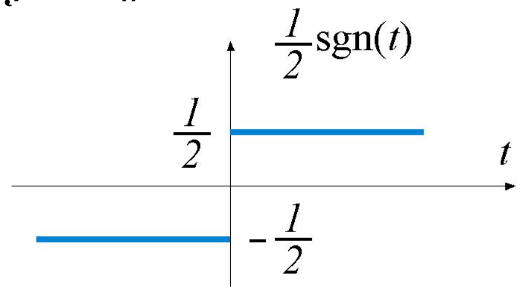
Tutte le funzioni $g(t)=u(t)+c$ *hanno per derivata* $\delta(t)$

pertanto:

$$j2\pi f\, F\{g(t)\}=1 \;\Rightarrow\; F\{g(t)\}=\frac{1}{j2\pi f}+a\delta(f)$$

in particolare, se $c=-\frac{1}{2}$,

$$g(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

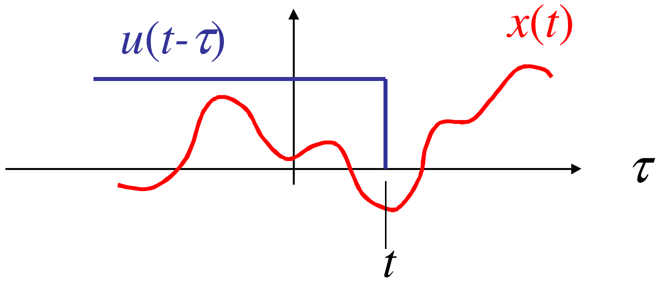


Funzione dispari $\Longrightarrow$ Trasformata immaginaria

$$F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right\}=\frac{1}{j2\pi f}$$

$$F\{u(t)\}=F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)+\frac{1}{2}\right\}=\boxed{\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$



$$y(t) = x(t) \otimes u(t)$$

$$Y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

Att.ne

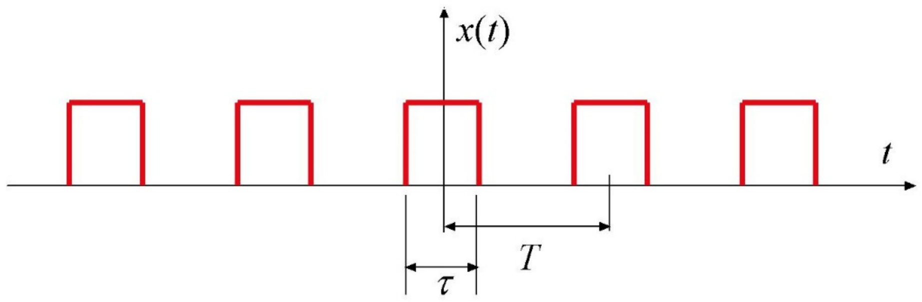
con la variabile ω:

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

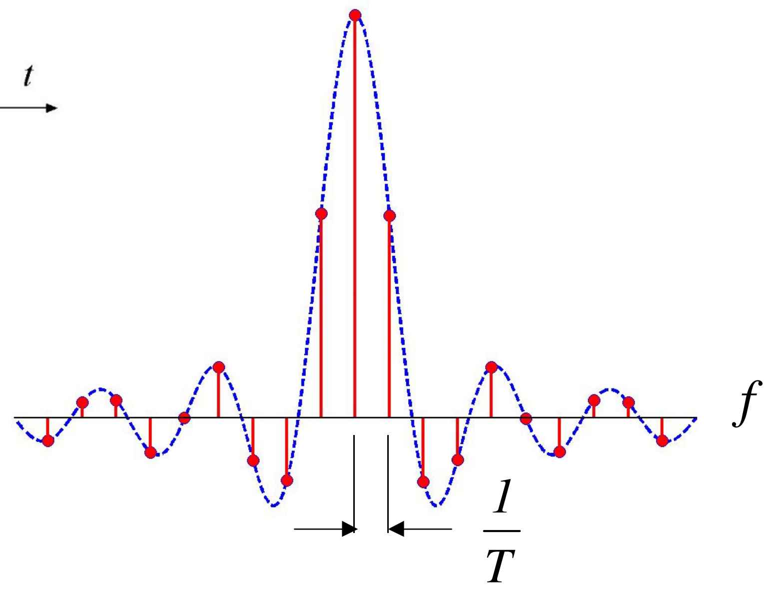
$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}}$$

Segnale periodico

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta\left(f-k\,f_0\right)$$



$$c_k=\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(k2\pi\frac{\tau}{T}\right)}{k2\pi\frac{\tau}{T}}=\frac{\tau}{T}\frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi f\tau}\bigg|_{f=\frac{k}{T}}$$



Riassunto

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

Trasformata di Fourier

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$

Antitrasformata di Fourier

Linearità

$$\begin{cases} x_1(t)\overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f) \\ a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow} a\,X_1(f)+b\,X_2(f) \end{cases}$$

Simmetria $X(-f)=X^*(f)$

Traslazione nel tempo $x(t)\overset{F}{\leftrightarrow} X(f)$ $\qquad x(t-t_0)\overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0}X(f)$

Derivazione nel tempo $x(t)\overset{F}{\leftrightarrow} X(f)$ $\qquad \dfrac{d\,x(t)}{dt}\overset{F}{\leftrightarrow} j2\pi f\,X(f)$

Riassunto

Scalaggio nel tempo e nella frequenza $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f)$ $\quad x(at) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$

Convoluzione $x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f)$

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) X_2(f)$$

Modulazione $x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f)$

$$x_1(t) x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \otimes X_2(f) = \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)]$$

Dualità

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega) \qquad X(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$$

$$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad X(t) \overset{F}{\leftrightarrow} x(-f)$$