Segnali e sistemi tempo discreto

Sommario

- Segnali tempo discreto periodici
  - Serie di Fourier
- Segnali tempo discreto aperiodici
  - Trasformata di Fourier
- Proprietà della Trasformata di Fourier
- Analisi dei sistemi LTI per mezzo della Trasformata di Fourier
- Risposta in frequenza dei sistemi LTI
- Esempi

Per un sistema LTI tempo discreto il segnale:

$$x[n] = z^n \qquad \text{con } z = |z|e^{j\Omega}$$

è un **autofunzione**

$$\xrightarrow[z^n]{x[n]} \boxed{h[n]} \xrightarrow[H(z)z^n]{y[n]}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

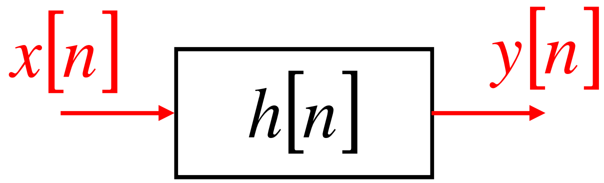
$$= H(z)z^n$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}}$$

Segnali esponenziali complessi

Conseguenza:

$$\text{Se} \quad x[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k z_k^n \quad \Longrightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k H(z_k) z_k^n$$



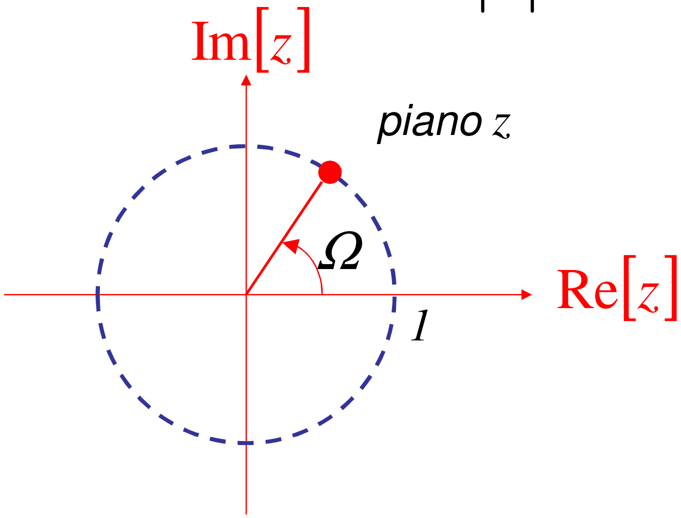
$$H(z_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z_k^{-n}$$

L'analisi si riduce alla determinazione della funzione:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

Caso particolare:

$$|z| = 1 \qquad \Rightarrow \quad z = e^{j\Omega}$$



In questo caso:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{j\Omega(n-k)}$$

$$= e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k} = H\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n}$$

$$\boxed{H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j\Omega n}}$$

Segnali esponenziali complessi

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Se:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(e^{j\Omega_k}\right)^n = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{j\Omega_k n}$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k H\left(e^{j\Omega_k}\right) e^{j\Omega_k n}$$

Quali segnali possono essere espressi attraverso una combinazione lineare di questo tipo?

Serie di Fourier per un segnale periodico di periodo N:

$$x[n+N]=x[n] \qquad \forall n$$

a) Il segnale assume al massimo N valori distinti

b) Anche i segnali $\phi_k = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ sono periodici di periodo N

$$\boxed{\Omega_k = k\frac{2\pi}{N} = k\Omega_0}$$

c) Ci sono soltanto N funzioni ϕ_k distinte

Pertanto è possibile individuare una N-pla di coefficienti complessi a_k tale che:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Sviluppo in serie di Fourier del segnale $x[n]$

Calcolo dei coefficienti

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}} & e^{j2\frac{2\pi}{N}} & \cdots & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}2} & e^{j2\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{j2\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \cdots & e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \cdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Sistema lineare di N equazioni in N incognite

Metodo più efficiente

Si voglia calcolare a_m :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} =$$

$$= \sum_{n=\langle N\rangle} \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \right) e^{-jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} \boxed{e^{j(k-m)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}$$

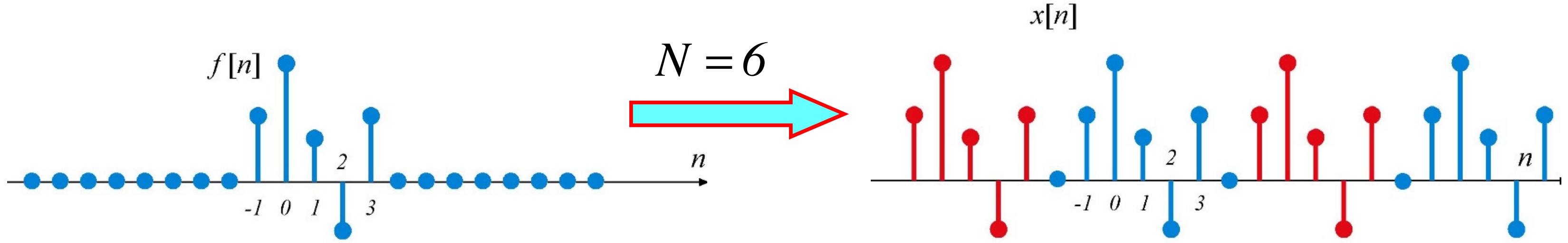
$$\boxed{\begin{aligned} &= 0 \quad per \;\; k \neq m \\ &= N \quad per \;\; k = m \end{aligned}}$$

$$= a_m N$$

$$\boxed{a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}$$

a) Una funzione periodica consiste nella ripetizione di una funzione “base” a intervalli di lunghezza N

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n-kN]$$



$$a_m = \frac{1}{N} X\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega = m\Omega_0}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-j\Omega n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Osservazioni

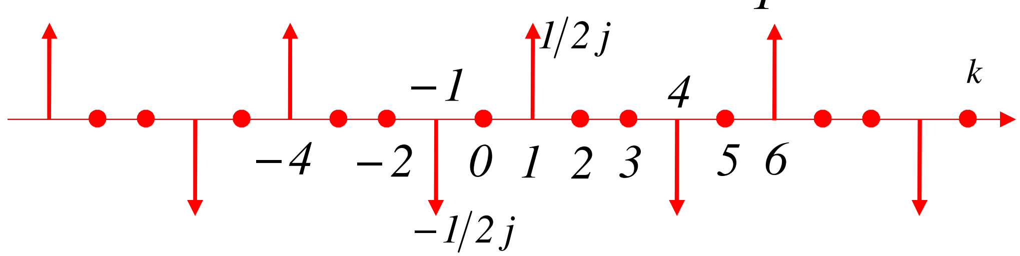
b) I coefficienti a_k possono venir calcolati per qualunque k. Essi sono periodici in k $(a_k = a_{(k+N)} = a_{(k+mN)})$

$x[n]$ è ricostruibile con un qualsiasi insieme di N coefficienti consecutivi.

Esempio:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$$

a_1 a_{-1}

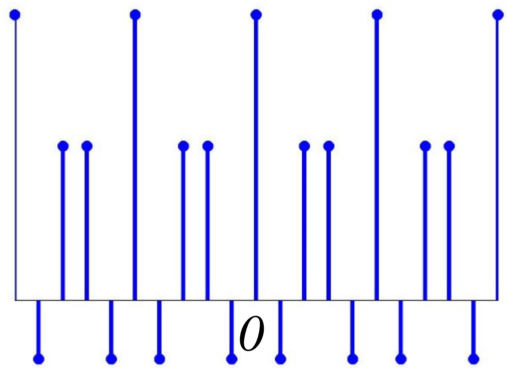


$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{5}n}$$

$$= \frac{1}{2j} e^{-j4\frac{2\pi}{5}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{5}n} \qquad = -\frac{1}{2j} e^{j4\frac{2\pi}{5}n} + \frac{1}{2j} e^{j6\frac{2\pi}{5}n} = \cdots$$

Esempi

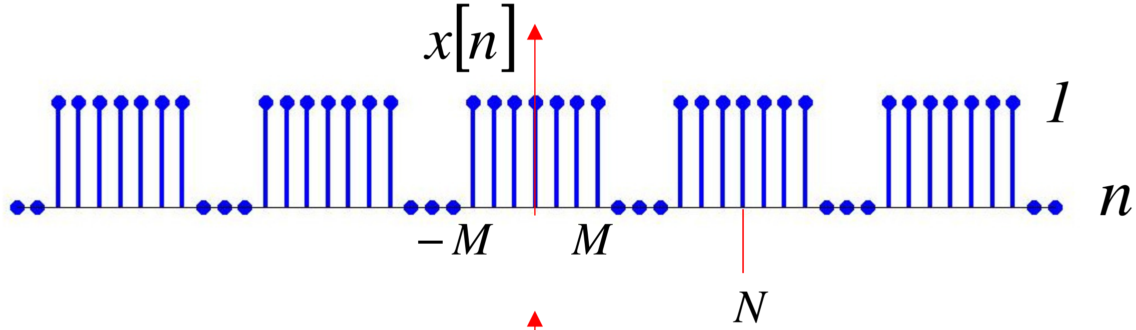
$$\boxed{x[n]=\frac{1}{2}+\cos\left(2\frac{2\pi}{5}n+\frac{\pi}{6}\right)}$$

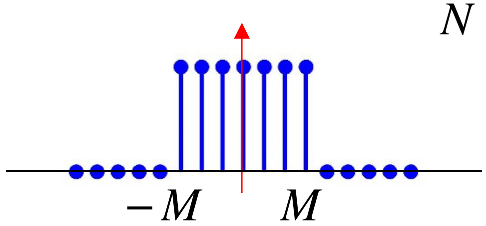


$$x[n]=\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{a_0}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}}}_{a_2}e^{j2\frac{2\pi}{5}n}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}}}_{a_{-2}}e^{-j2\frac{2\pi}{5}n}$$

$$\ldots a_{-2}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad a_{-1}=0 \qquad a_0=\frac{1}{2} \qquad a_1=0$$

$$a_2=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}} \qquad a_3=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad a_4=0\cdots$$





$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-M}^{+M} e^{-j\Omega n} = \sum_{m=0}^{2M} e^{-j\Omega(m-M)} = e^{j\Omega M}\sum_{m=0}^{2M}\left(e^{-j\Omega}\right)^m$$

$$m = n + M$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right)= e^{j\Omega M}\,\frac{1-e^{-j\Omega(2M+1)}}{1-e^{-j\Omega}}$$

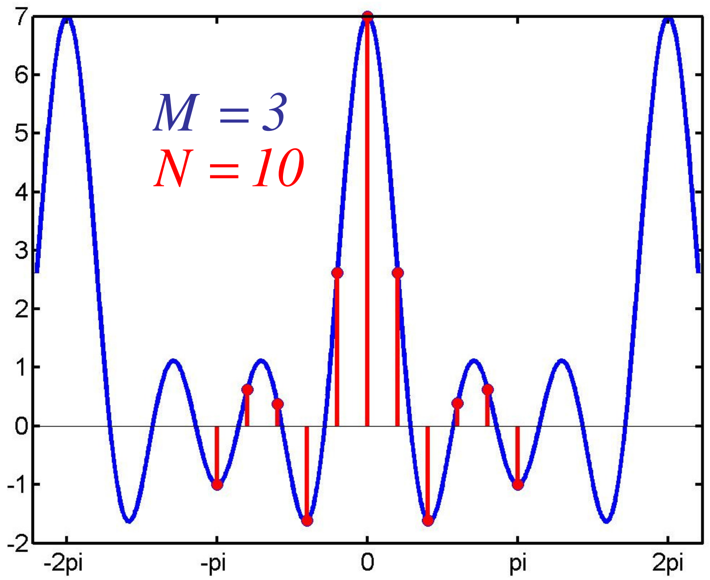
Esempi

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=e^{j\Omega M}\,\frac{1-e^{-j\Omega(2M+1)}}{1-e^{-j\Omega}}$$

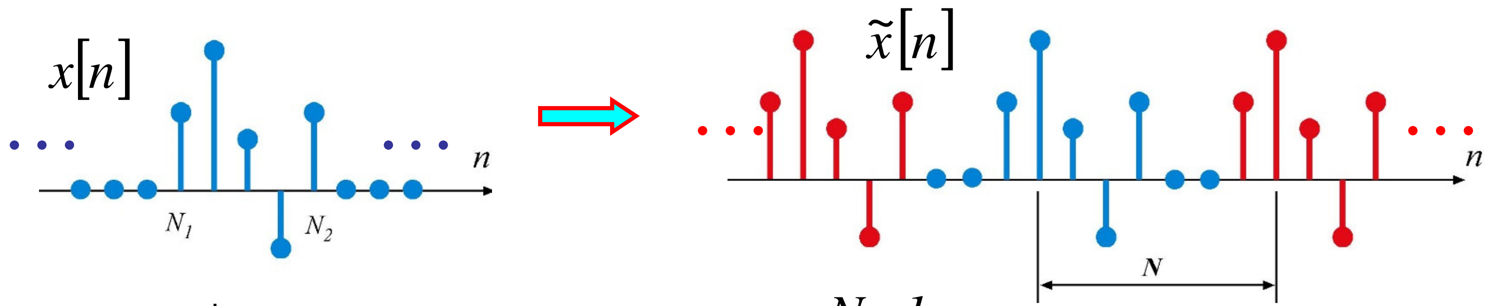
$$=e^{j\Omega M}\,\underbrace{\frac{e^{-j\Omega\left(M+\frac{1}{2}\right)}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}}_{=1}\,\frac{e^{j\Omega\left(M+\frac{1}{2}\right)}-e^{-j\Omega\left(M+\frac{1}{2}\right)}}{e^{j\frac{\Omega}{2}}-e^{-j\frac{\Omega}{2}}}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{\sin[\Omega\,(M+1/2)]}{\sin(\Omega/2)}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\,X\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}}$$



Considerazioni analoghe al caso dei segnali tempo continuo



$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-kN] \qquad \tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$(N \geq N_2 - N_1 + 1)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\,\Omega_0\,n} = \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\,\Omega_0\,n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\,\Omega_0\,n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$$

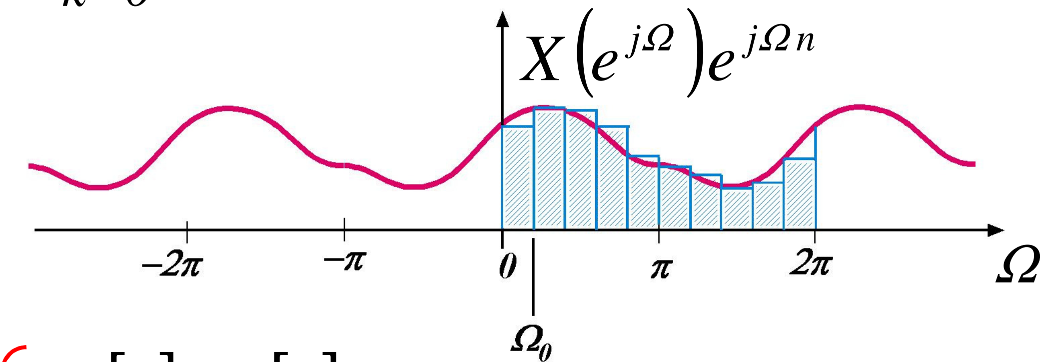
$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$\boxed{X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI $x[n]$

Funzione di Ω, periodica di periodo 2π

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)e^{jk\Omega_0 n} \qquad =\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)e^{jk\Omega_0 n}\,\Omega_0$$



$$\lim_{N\to\infty}\begin{cases}\tilde{x}[n]=x[n]\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{jk\Omega_0}\right)e^{jk\Omega_0 n}\,\Omega_0 \;=\int_0^{2\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega\end{cases}$$

Segnale non periodico: trasformata di Fourier

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-j\Omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

Il segnale $x[n]$ è espresso tramite una "somma" (integrale) di funzioni esponenziali complesse $e^{j\Omega n}$

Alla costruzione del segnale $x[n]$ partecipano, in generale, funzioni esponenziali complesse a tutte le frequenze angolari Ω **comprese in un intervallo di lunghezza** 2π.

Ogni funzione $e^{j\Omega n}$ ha una sua ampiezza complessa infinitesima, data da:

$$\frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\Omega}\right)d\Omega$$

Se:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$\xrightarrow{\quad} \boxed{h[n]} \xrightarrow{\quad}$$

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \underbrace{H\left(e^{j\Omega}\right) X\left(e^{j\Omega}\right)}_{Y\left(e^{j\Omega}\right)} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

$H(e^{j\Omega})$ = Risposta in frequenza del sistema LTI

$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|$ $\Rightarrow$ Come il sistema modifica l'ampiezza delle varie costituenti esponenziali complesse

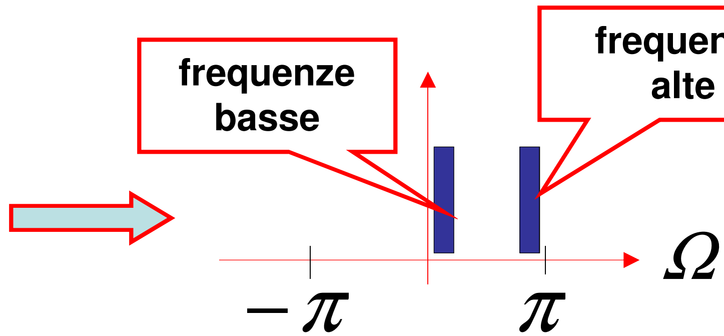
$\arg\left[H\left(e^{j\Omega}\right)\right]$ $\Rightarrow$ Come il sistema modifica la fase delle varie costituenti esponenziali complesse

Proprietà

1) La trasformata di Fourier

è periodica, è periodica, è periodica in Ω, di periodo 2π .

Attenzione:



E' sufficiente limitare l'analisi all'intervallo $-\pi < \Omega < \pi$

2) Linearità

3) Simmetria :

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = X^*\left(e^{-j\Omega}\right) \quad per \ x[n] \ reale$$

4) Traslazione nel tempo e nella frequenza:

$$x[n] \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x[n-n_0] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n_0}$$

$$x[n]e^{j\Omega_0 n} \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$$

5) Differenza prima:

$$x[n] \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x[n]-x[n-1] \overset{F}{\leftrightarrow} \left(1-e^{-j\Omega}\right)X\left(e^{j\Omega}\right)$$

6) Derivata rispetto alla frequenza:

$$\boxed{\begin{array}{c} x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right) \\ \dfrac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\,n\,x[n]\,e^{-j\Omega n} \\ n\,x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\,\dfrac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega} \end{array}}$$

7) Relazione di Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 d\Omega$$

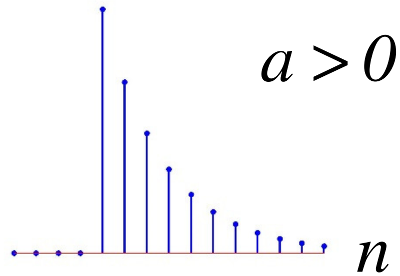
8) Convoluzione:

$$x_1[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\Omega}\right)$$

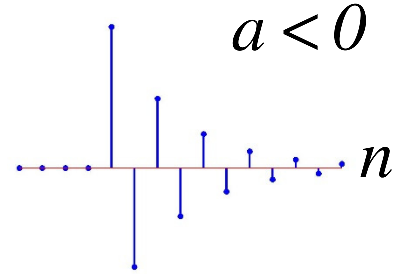
$$x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_2\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\Omega}\right) X_2\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$\boxed{x[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1}$$

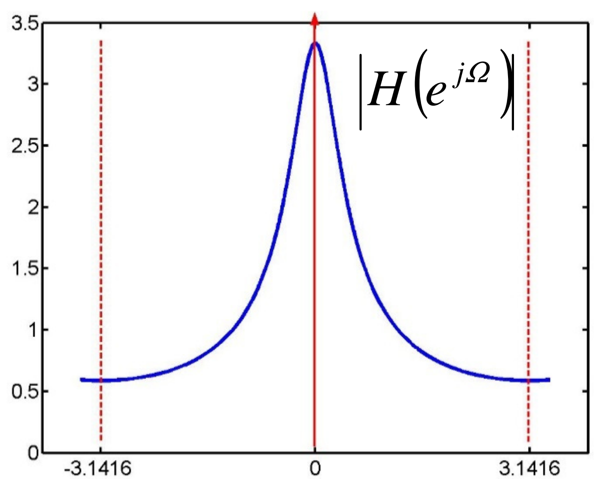


$a > 0$

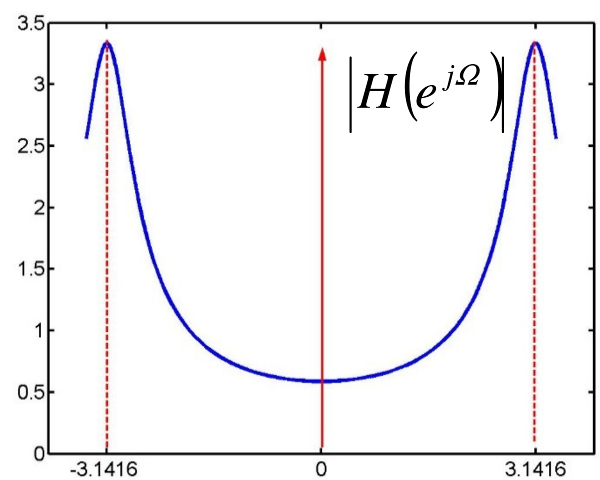


$a < 0$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a e^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}$$

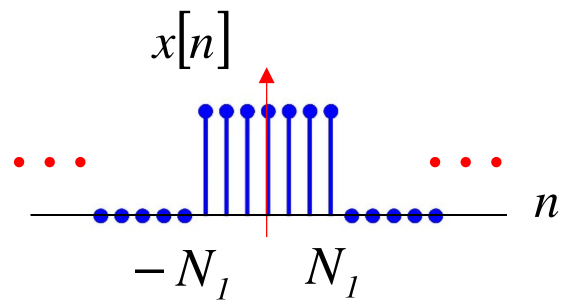


$a > 0$

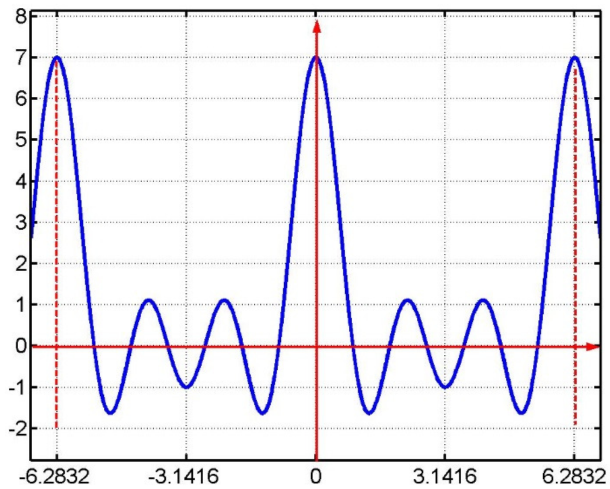


$a < 0$

$$x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$



$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} \qquad =\frac{\sin\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

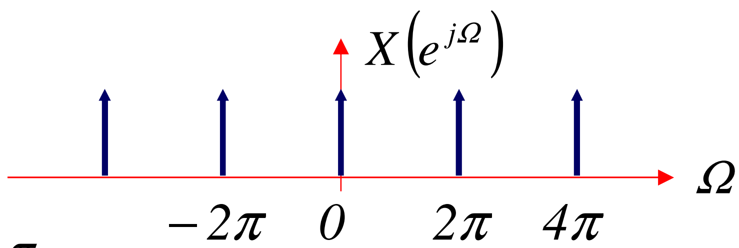


$$\boxed{x[n] = \delta[n]}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = 1$$

Sia: $X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta[\Omega - 2k\pi]$

[$X(e^{j\Omega})$ deve essere periodica di periodo 2π]



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} 2\pi\,\delta(\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega = 1 \qquad \forall n$$

$$x[n] = 1 \quad \Longrightarrow \quad X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega - 2k\,\pi)$$

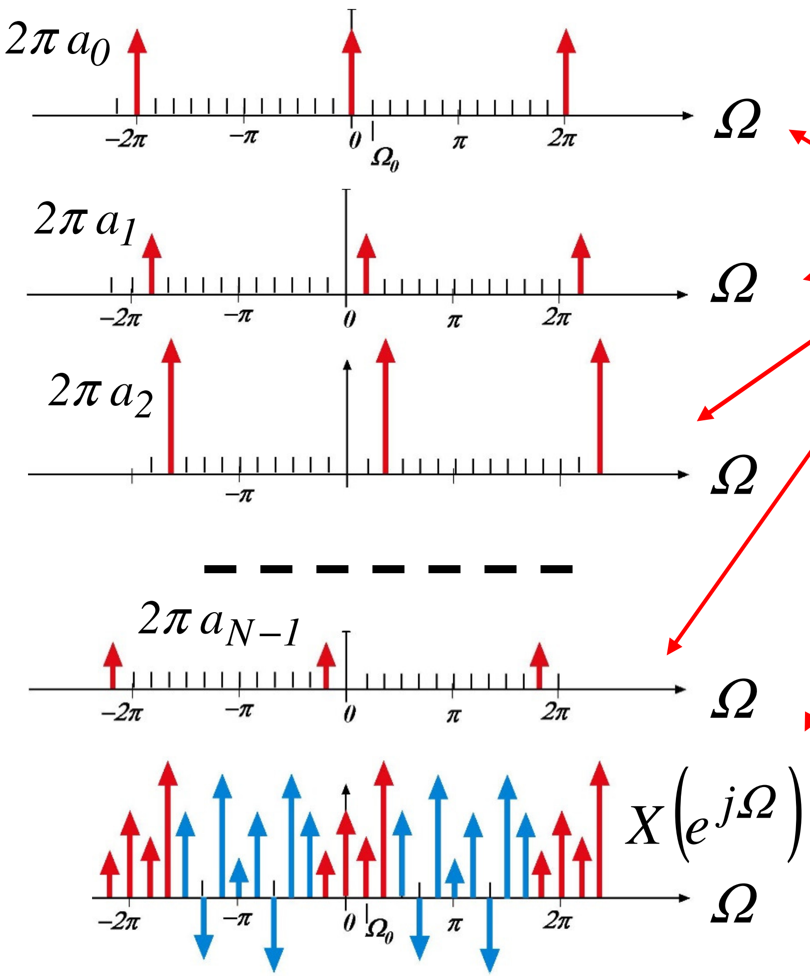
$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \quad \Longrightarrow \quad X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\,\pi)$$

$x[n]$ periodico di periodo **N**

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$2\pi a_k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N} - 2m\pi\right)$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$



Esempi

$$\boxed{x[n] = u[n]}$$

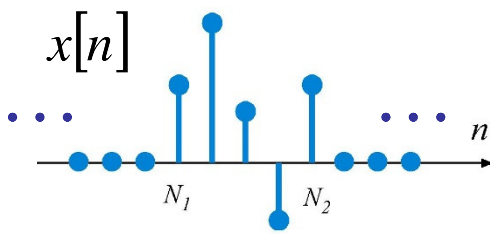
$$u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{\left(1 - e^{-j\Omega}\right)} + \pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k2\pi)}_{per\ la\ periodicità}$$

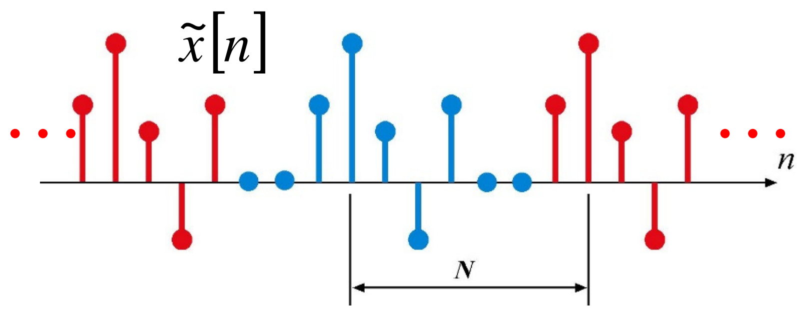
$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad (somma\ corrente)}$$

$$y[n] = x[n] \otimes u[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{X\left(e^{j\Omega}\right)}{\left(1 - e^{-j\Omega}\right)} + \pi\, X\left(e^{j0}\right) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k2\pi)}_{per\ la\ periodicità}$$

Si consideri nuovamente una sequenza non periodica di durata finita $M = N_2 - N_1 + 1$. In tale caso il passaggio al limite non è necessario.

Si costruisca una sequenza $\tilde{x}[n]$ periodica di periodo $N \geq M$.





$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

DFT: considerazioni

- La DFT è un campionamento della trasformata di Fourier tempo discreto della sequenza di durata finita.

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega = k\frac{2\pi}{N}}}$$

- Aumentando N, si ottiene un campionamento più fitto.
- Più in generale si possono definire diverse regole di trasformazione:

$$a_k = \frac{1}{A}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad x[n] = \begin{cases} \frac{1}{B}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} & N_1 \le n \le N_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$AB = N$$

DFT: considerazioni (continua)

- Se N è una potenza di 2, esiste un algoritmo veloce per il calcolo della trasformata (Fast Fourier Transform - FFT)

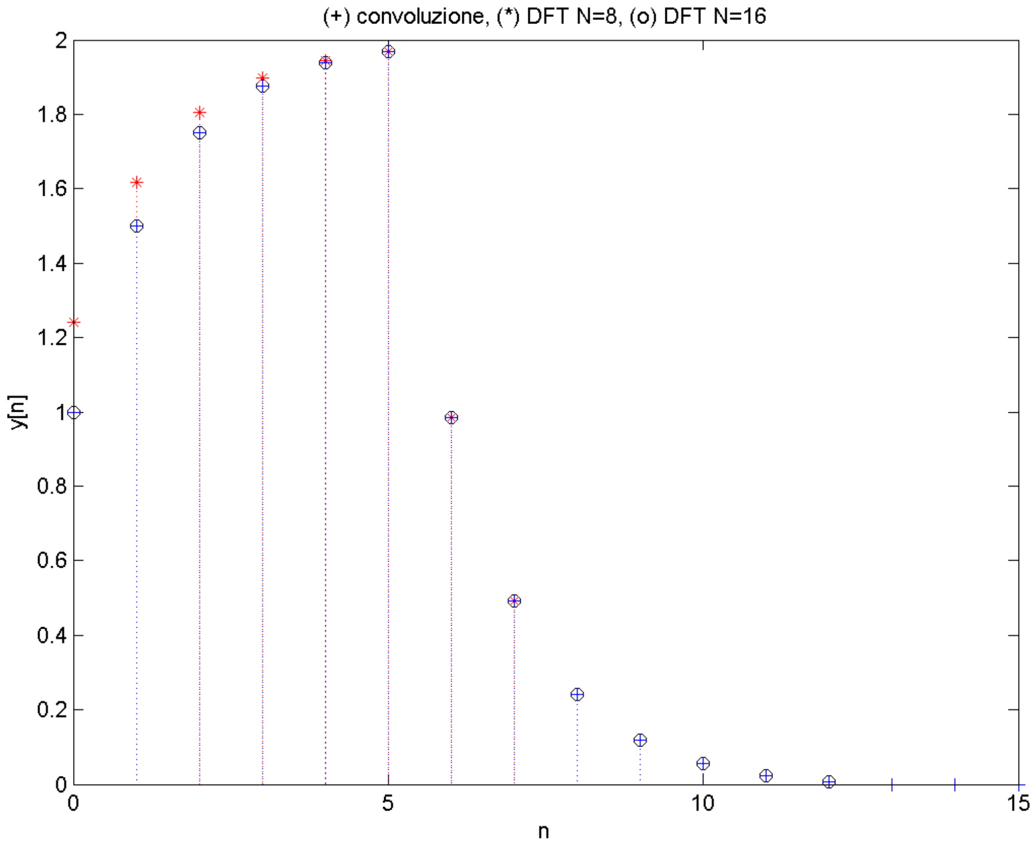
- Se un segnale di durata finita M_1 viene applicato a un filtro LTI con risposta impulsiva di durata finita M_2 (Finite Impulsive Response – FIR - Filter), la risposta ha durata finita non superiore a $M=M_1+M_2-1$. Tale sistema può essere studiato nel dominio della frequenza pur di scegliere $N \geq M$. Per poter utilizzare la FFT

$$N = 2^{\lceil \log_2 M \rceil}$$

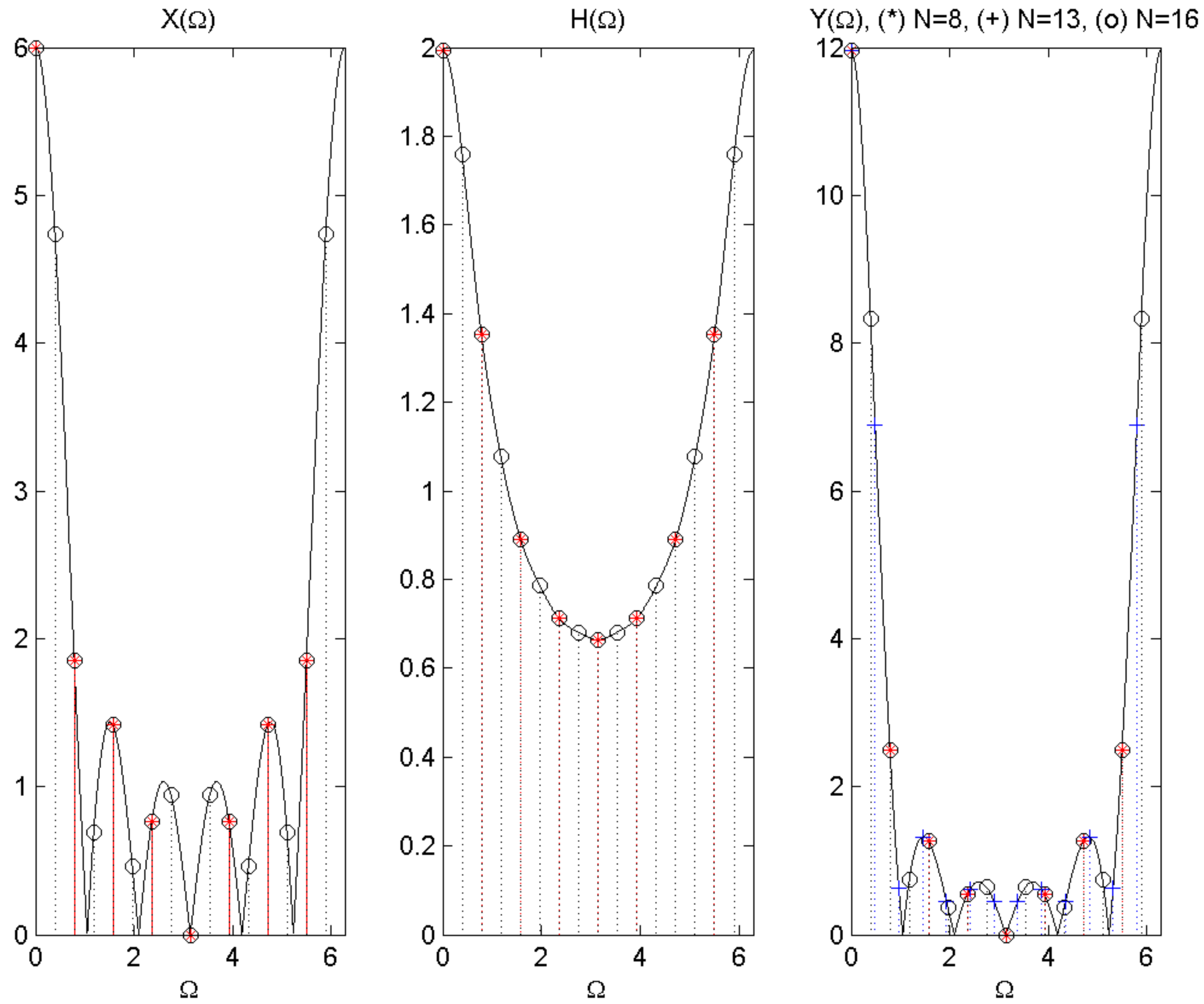
DFT: esempio

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 5\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$x[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\le n\le 7\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



DFT: esempio (continua)



$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

1) **La trasformata di Fourier** **è periodica,** di periodo 2π.

2) **Linearità**

3) **Simmetria :** $X\left(e^{j\Omega}\right) = X^*\left(e^{-j\Omega}\right) \quad per\ x[n]\ reale$

4) **Traslazione nel tempo e nella frequenza:**

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x[n-n_0] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{-j\Omega n_0}$$

$$x[n]\, e^{j\Omega_0 n} \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$$

6) Derivata rispetto alla frequenza:

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right) \qquad n\,x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}$$

7) Relazione di Parseval: $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 d\Omega$$

8) Convoluzione:

$$x_1[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_2\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\Omega}\right)X_2\left(e^{j\Omega}\right)$$