Sia $x(t)$ reale di periodo T:

detta $f_0 = \frac{1}{T}$

la ***frequenza fondamentale*** di $x(t)$, si ha:

$$1)\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}$$

$$2)\quad x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k2\pi f_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k2\pi f_0 t$$

$$3)\quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\left(k2\pi f_0 t + \varphi_k\right)$$

Coefficienti

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jk2\pi f_0 t}dt \qquad c_k = c_{-k}^{*} \quad \textit{per } x(t) \textit{ reale}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\cos\left(k2\pi f_0 t\right)dt \quad (k \neq 0) \qquad A_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)dt = c_0 = D_0$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)\sin\left(k2\pi f_0 t\right)dt \quad (k \neq 0) \qquad B_0 = 0$$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(A_k - jB_k\right) = \frac{1}{2}D_k e^{j\varphi_k} \quad (k \neq 0)$$

Segnali non periodici: trasformata di Fourier e sue proprietà

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Trasformata di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Antitrasformata di Fourier

Linearità

$$x_1(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f) \qquad x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X_2(f)$$

$$a\, x_1(t) + b\, x_2(t) \overset{F}{\leftrightarrow} a\, X_1(f) + b\, X_2(f)$$

Simmetria $X(-f) = X^*(f)$

Traslazione nel tempo $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad x(t - t_0) \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

Derivazione nel tempo $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(f) \qquad \dfrac{d\, x(t)}{dt} \overset{F}{\leftrightarrow} j2\pi f\, X(f)$

Proprietà della trasformata di Fourier

Scalaggio nel tempo e nella frequenza $x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(f)$ $\quad x(at)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

Traslazione nella frequenza $x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(f)$ $\quad x(t)\exp(j2\pi f_o t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(f-f_0)$

Convoluzione $x_1(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X_1(f)$ $\quad x_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X_2(f)$

$$x_1(t)\otimes x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(f)X_2(f)$$

Modulazione $x_1(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X_1(f)$ $\quad x_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X_2(f)$

$$x_1(t)x_2(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X_1(f)\otimes X_2(f)$$

Dualità

$$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(\omega) \qquad X(t)\overset{F}{\leftrightarrow}2\pi\, x(-\omega)$$

$$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(f) \qquad X(t)\overset{F}{\leftrightarrow}x(-f)$$

Relazione di Parseval

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E < \infty \rightarrow x(t) \ \textit{segnale di energia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

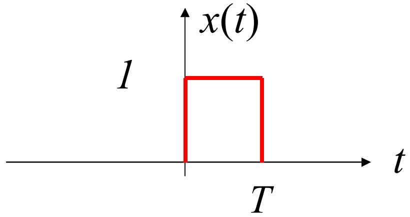
b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$$

$$ma \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = P < \infty \rightarrow x(t) \ \textit{segnale di potenza}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

$$\left(X_T(f) = F\left\{ x(t)\, rect\left[\frac{t}{T}\right] \right\} \right)$$

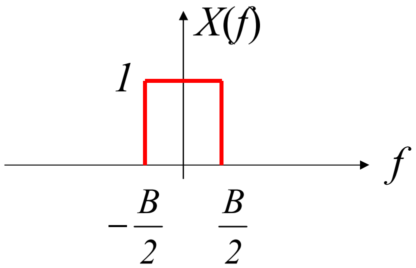
$$\boxed{x(t) = \mathrm{rect}\left[\frac{t - T/2}{T}\right]}$$



Per la proprietà della traslazione nel tempo:

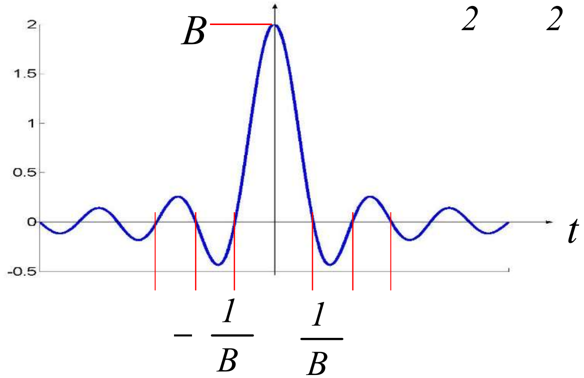
$$X(f) = T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = T\,\mathrm{sinc}(f\,T)e^{-j\pi f T}$$

$$\boxed{X(f) = \mathrm{rect}\left[\frac{f}{B}\right] = \begin{cases} 1 & |f| < B/2 \\ 0 & |f| > B/2 \end{cases}}$$



Per dualità:

$$x(t) = B\frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} = B\ \mathrm{sinc}(Bt)$$



Esempi

$$\boxed{x(t)=u(t)}$$

Premessa:

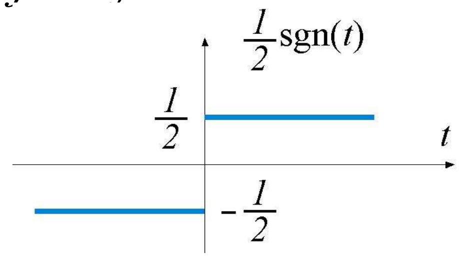
Tutte le funzioni $g(t)=u(t)+c$ hanno per derivata $\delta(t)$

pertanto:

$$j2\pi f\, F\{g(t)\}=1 \Rightarrow \quad F\{g(t)\}=\frac{1}{j2\pi f}+a\delta(f)$$

in particolare, se $c=-\frac{1}{2}$,

$$g(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$



Funzione dispari $\Rightarrow$ Trasformata immaginaria $F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right\}=\frac{1}{j2\pi f}$

$$\boxed{F\{u(t)\}=F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)}$$

Serie di Fourier per un segnale periodico di periodo N:

$$x[n+N]=x[n] \qquad \forall n$$

a) Il segnale assume al massimo N valori distinti

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Sviluppo in serie di Fourier del segnale $x[n]$

$$\boxed{a_m=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,e^{-j\Omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

1) **La trasformata di Fourier è periodica,** di periodo 2π .

2) **Linearità**

3) **Simmetria :** $X\left(e^{j\Omega}\right)=X^*\left(e^{-j\Omega}\right) \quad per\ x[n]\ reale$

4) **Traslazione nel tempo e nella frequenza:**

$$x[n] \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x[n-n_0] \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n_0}$$

$$x[n]e^{j\Omega_0 n} \quad \overset{F}{\leftrightarrow} \quad X\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$$

6) Derivata rispetto alla frequenza:

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right) \qquad n\,x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}$$

7) Relazione di Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 d\Omega$$

8) Convoluzione:

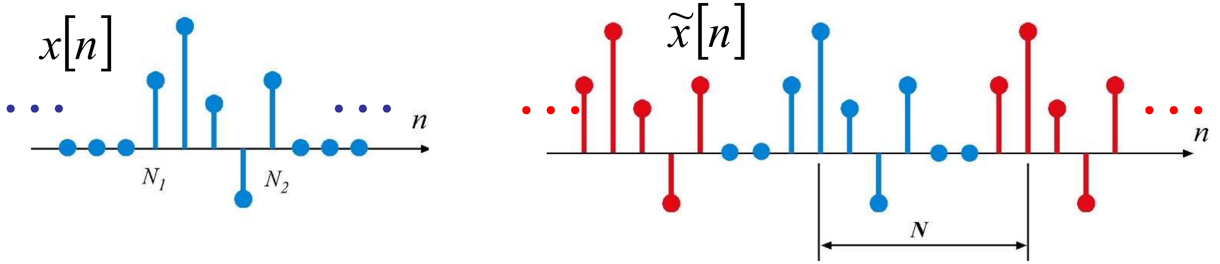
$$x_1[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_2\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\Omega}\right) X_2\left(e^{j\Omega}\right)$$

Si consideri nuovamente una sequenza non periodica di durata finita $M=N_2-N_1+1$.

Si costruisca una sequenza $\tilde{x}[n]$ periodica di periodo $N \geq M$.



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- La DFT è un campionamento della trasformata di Fourier tempo discreto della sequenza di durata finita.

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega = k\frac{2\pi}{N}}}$$

- Aumentando N, si ottiene un campionamento più fitto.
- Più in generale si possono definire diverse regole di trasformazione:

$$a_k = \frac{1}{A}\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{B}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} & N_1 \le n \le N_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$AB = N$$

DFT: considerazioni (continua)

- Se N è una potenza di 2, esiste un algoritmo veloce per il calcolo della trasformata (Fast Fourier Transform - FFT)

- Se un segnale di durata finita M_1 viene applicato a un filtro LTI con risposta impulsiva di durata finita M_2 (Finite Impulsive Response – FIR - Filter), la risposta ha durata finita non superiore a $M=M_1+M_2-1$. Tale sistema può essere studiato nel dominio della frequenza pur di scegliere $N \geq M$. Per poter utilizzare la FFT

$$N = 2^{\lceil \log_2 M \rceil}$$

Sia $x_c(t)$ la versione campionata di $x(t)$

$$X_S(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_S}\right)$$

Quindi, in assenza di aliasing, per $|f| \leq \frac{1}{2T_S}$ abbiamo $X(f) = T_S X_S(f)$

Vale però anche la

$$X_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_S) \exp(-j\pi f T_S) \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_S) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_S) \exp(-j2\pi f t) \mathrm{d}t$$

$$X_S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_S) \exp(-j2\pi f k T_S)$$

Essendo $X_S\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\Omega k)$ per $|f| \leq \frac{1}{2T_S}$ si ottiene $X(f) = T_S X_S\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega = 2\pi f T_S}$