

## Campionamento di un segnale tempo-continuo



## Sommario

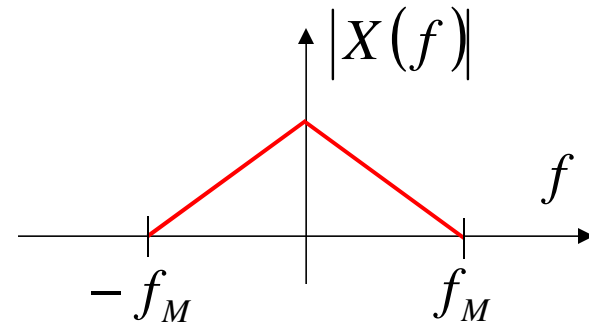
- Segnali a banda limitata
- Campionamento ideale
- Teorema del campionamento
- Conversione da tempo-continuo a tempo-discreto
- Elaborazione tempo-discreta di un segnale tempo-continuo



## Segnali a banda limitata

Sia  $x(t)$  un segnale a banda limitata:

$$X(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_M$$



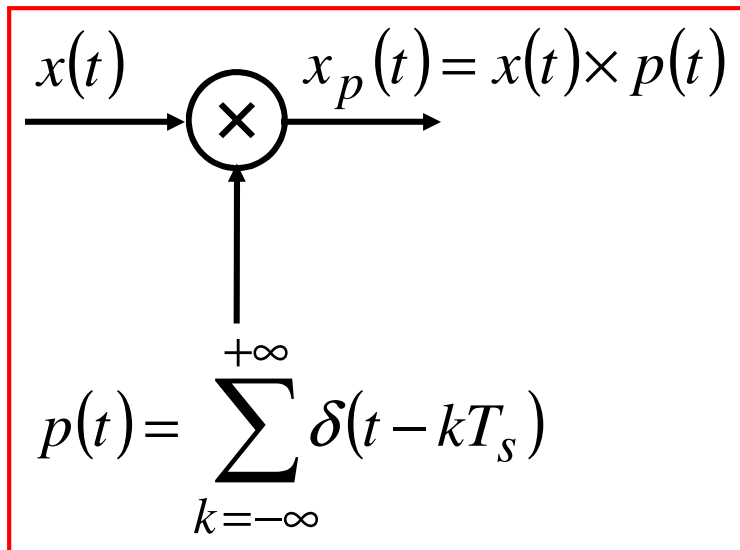
- Es.: segnale telefonico  $\rightarrow f_M = 3.4 \text{ KHz}$   
segnale musicale in FM  $\rightarrow f_M = 15 \text{ KHz}$   
segnale video PAL  $\rightarrow f_M = 5 \div 6 \text{ MHz}$

**Nelle telecomunicazioni tutti i segnali sono a banda limitata (o rigorosamente, o praticamente)**



# Campionamento ideale

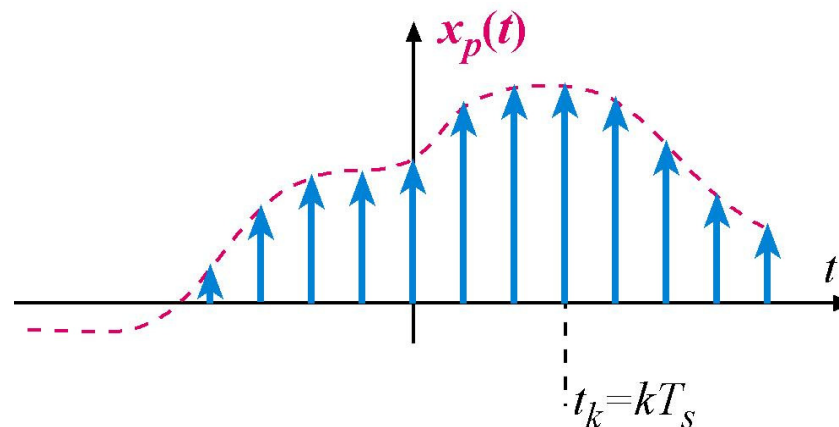
Si consideri l'operazione descritta dal seguente sistema:



$$x_p(t) = x(t) p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

Il segnale  $x(t)$  risulta **“campionato”** con impulsi ideali

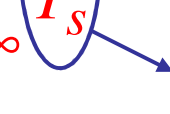


# Campionamento ideale

Valutazione dello spettro di  $x_p(t)$

$p(t)$  è un segnale periodico:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{T_s} \right) e^{jk2\pi f_s t} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$



$$x_p(t) = x(t) p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jk2\pi f_s t}$$

Spettro di  $x_p(t)$ :

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F \left\{ x(t) e^{j2\pi k f_s t} \right\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_s)$$

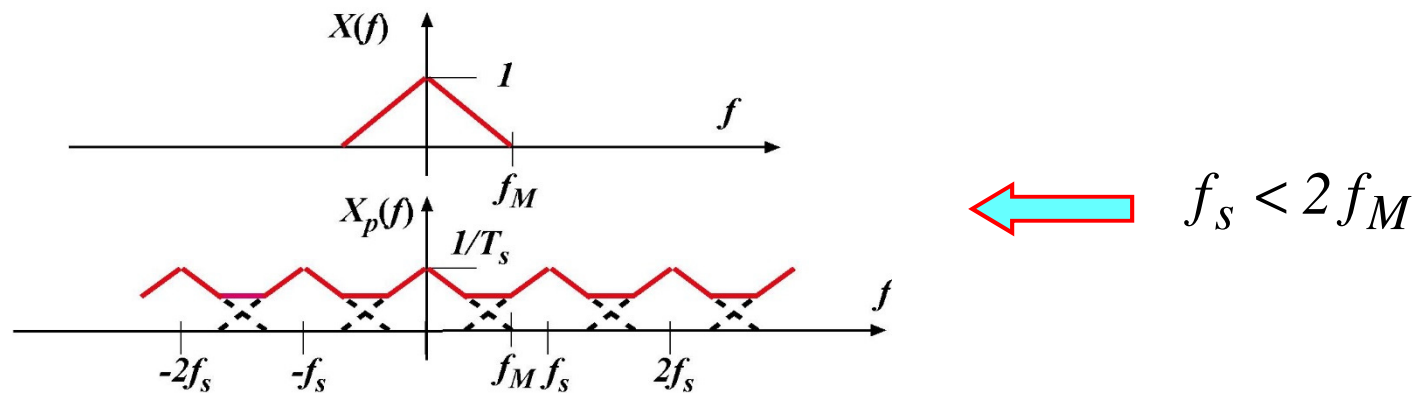
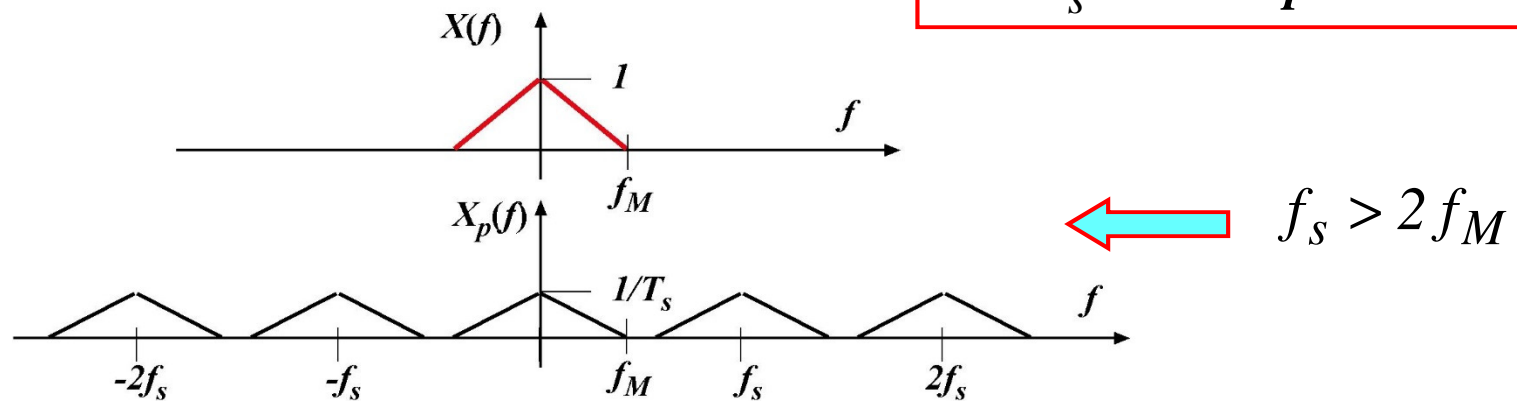




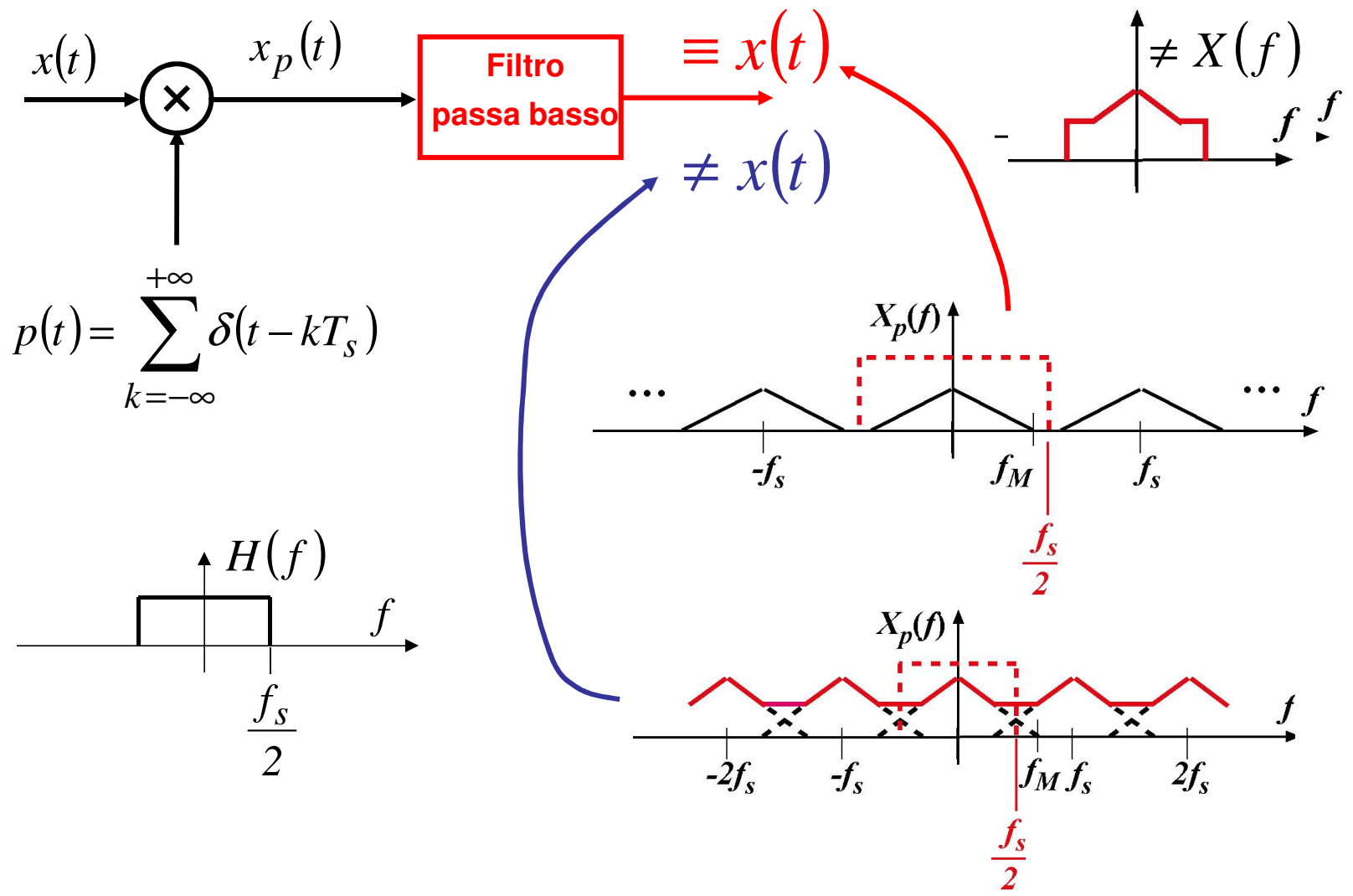
# Campionamento ideale

Spettro del segnale  
campionato

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \text{frequenza di campionamento}$$



# Ricostruzione del segnale



## Teorema del campionamento

Un segnale a banda limitata è univocamente determinato dai suoi valori  $x(kT_s)$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se:

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2f_M$$

La sua **esatta** ricostruzione avviene facendo passare una successione di impulsi ideali pesati da  $x(kT_s)$  attraverso un filtro passa basso ideale, avente frequenza di taglio compresa tra

$$f_M \text{ e } (f_s - f_M)$$

Attenzione:

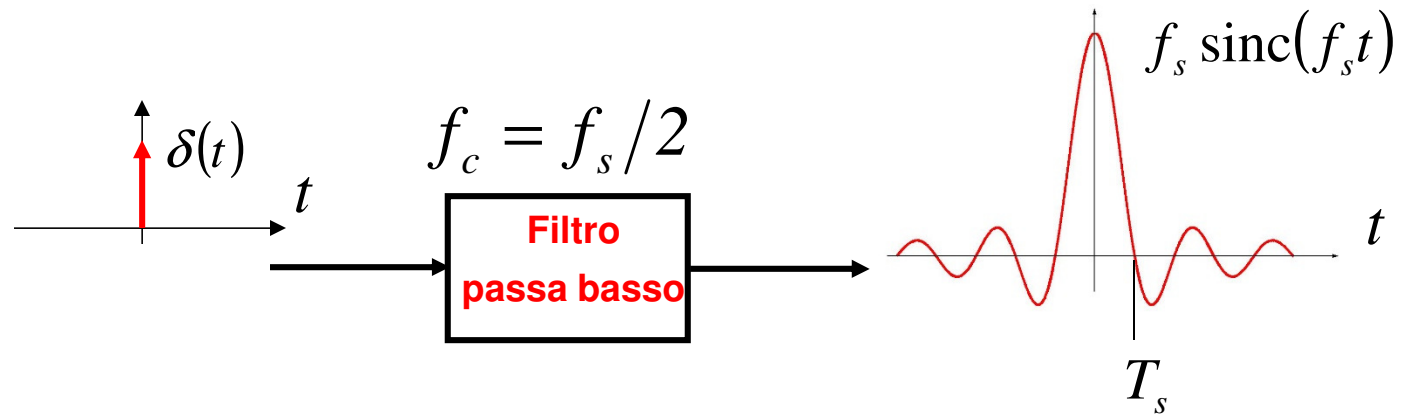
se  $f_s < 2f_M$ , non viene ricostruito **il segnale originario**, ma viene ricostruito un **“altro” (alias)** segnale

Fenomeno di “aliasing”



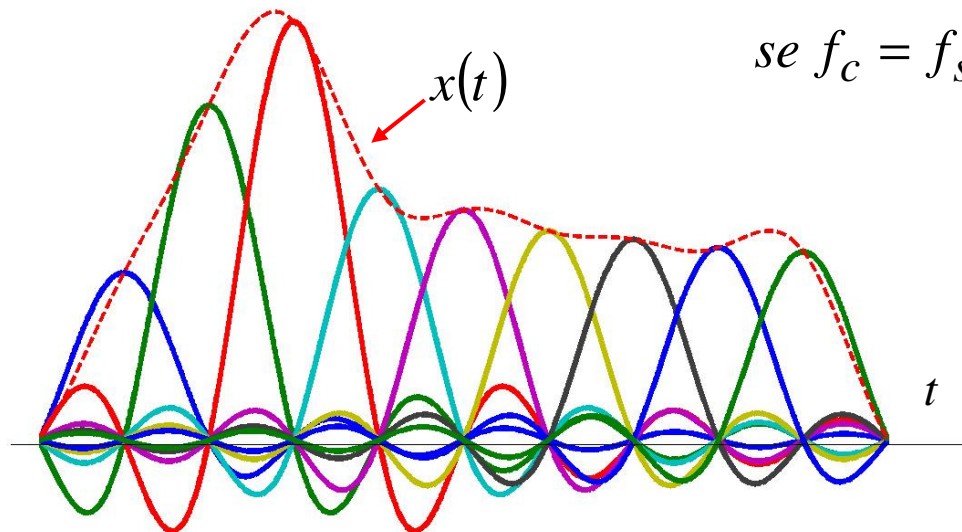


## Nel dominio del tempo



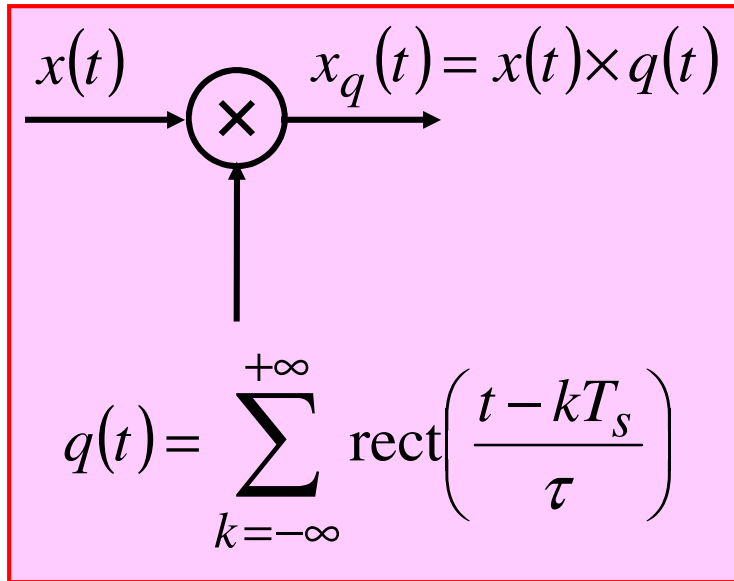
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{sinc}[f_s(t - kT_s)]$$

se  $f_c = f_s/2$



# Campionamento naturale

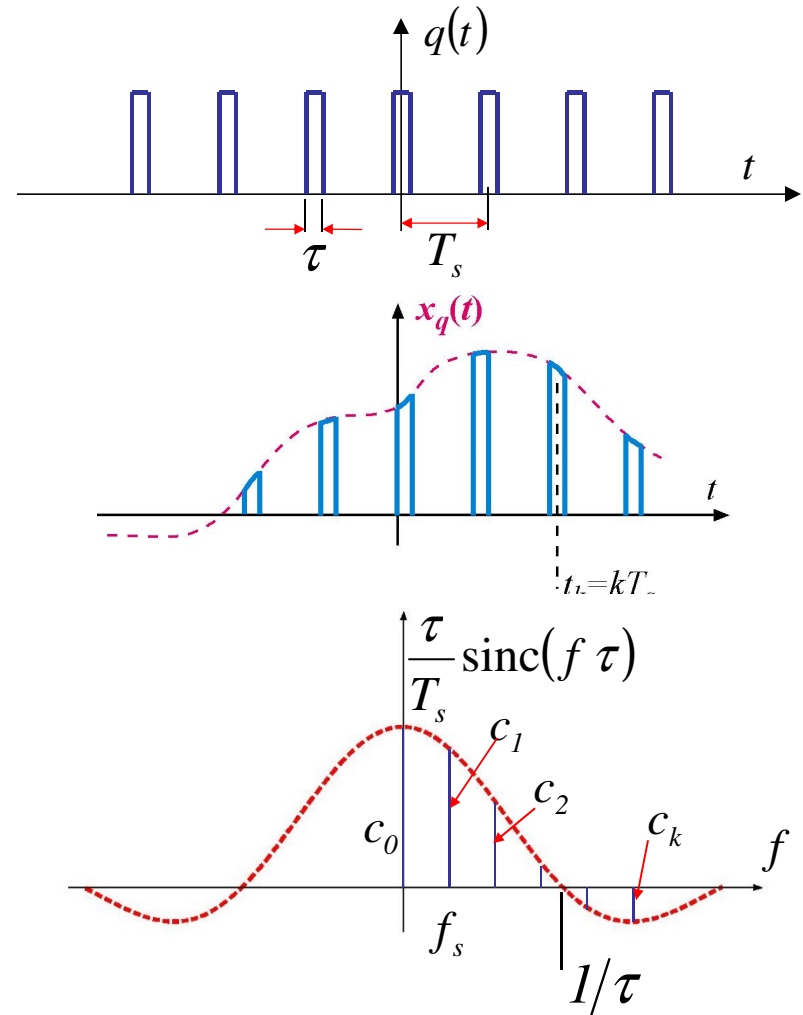
(per studenti volenterosi)



$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_s t}$$

$$c_k = \frac{\tau}{T_s} \text{sinc}(f \tau) \Big|_{f=k \frac{1}{T_s}}$$

Campionamento fatto con impulsi reali di durata  $\tau$  e ampiezza unitaria



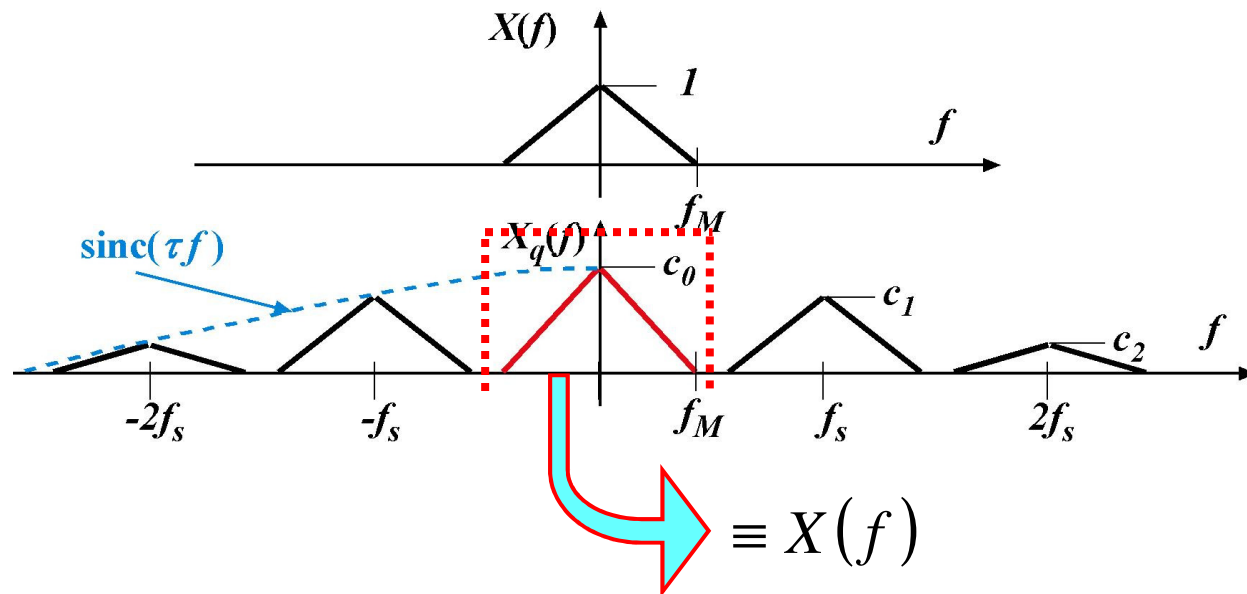
# Campionamento naturale

(per studenti volonterosi)

Valutazione dello spettro di  $x_q(t)$

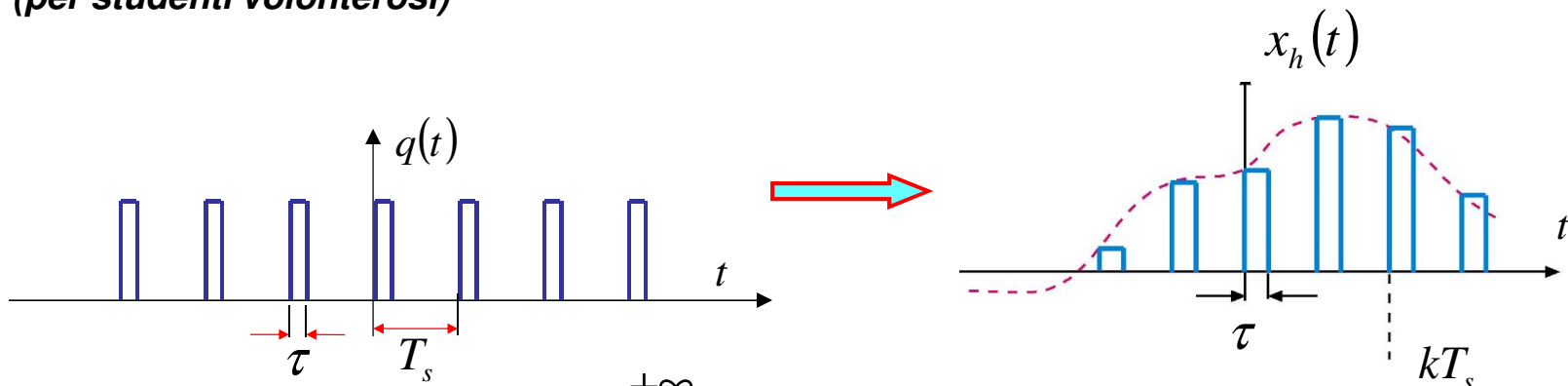
$$x_q(t) = x(t) \times q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x(t) e^{j2k\pi f_s t}$$

$$X_q(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k F \left\{ x(t) e^{j2\pi k f_s t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k X(f - k f_s)$$



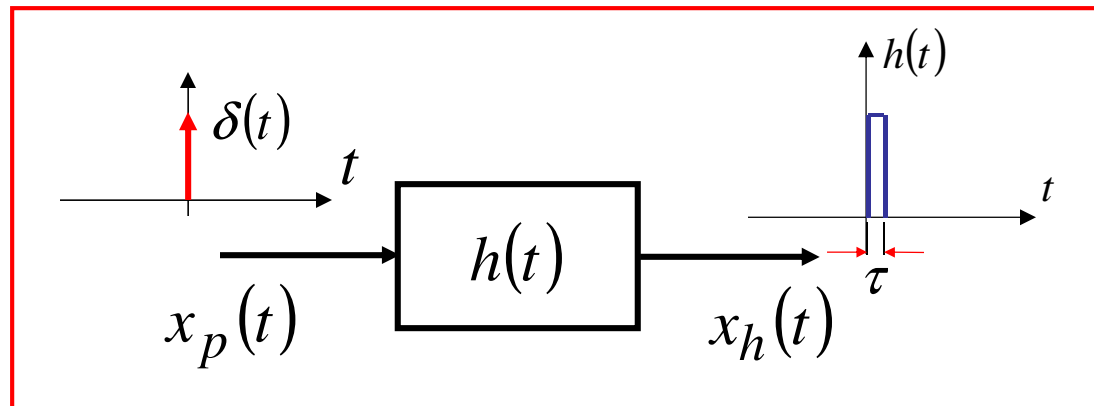
# Campionamento a tenuta

(per studenti volonterosi)



$$x_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{rect}\left(\frac{t - \tau/2 - kT_s}{\tau}\right)$$

$x_h(t)$  può essere  
ottenuto così:



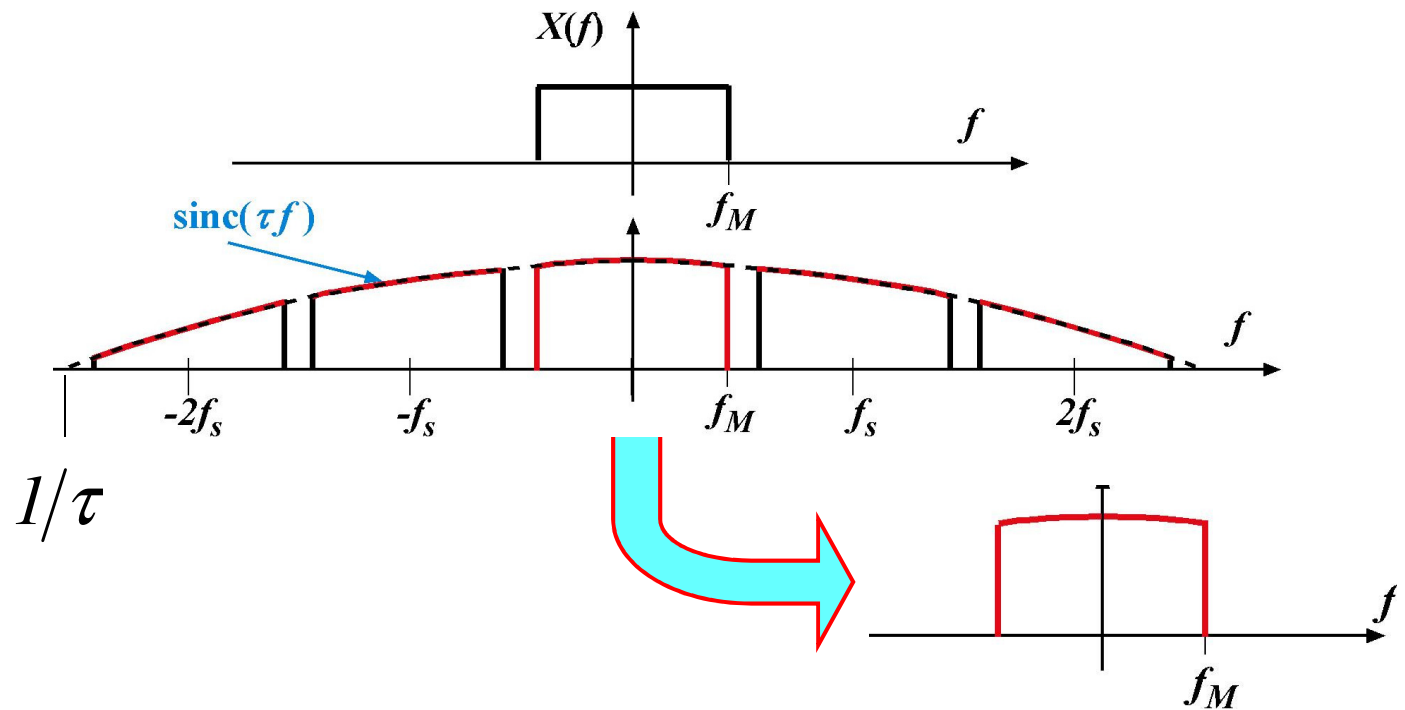
Pertanto:  $X_h(f) = X_p(f)H(f) = X_p(f)\tau \text{sinc}(f \tau)$



# Campionamento a tenuta

(per studenti volonterosi)

Considerazioni sullo spettro



È presente una distorsione,  
tanto minore quanto minore è  $\tau$



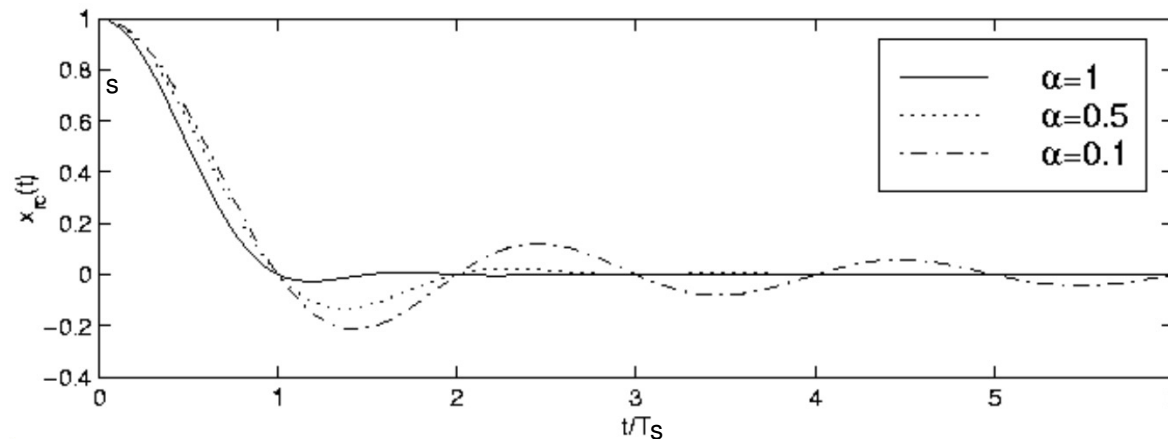
## Il coseno rialzato

Transizione sagomata di tipo sinusoidale ('coseno rialzato' o '*Raised Cosine*').

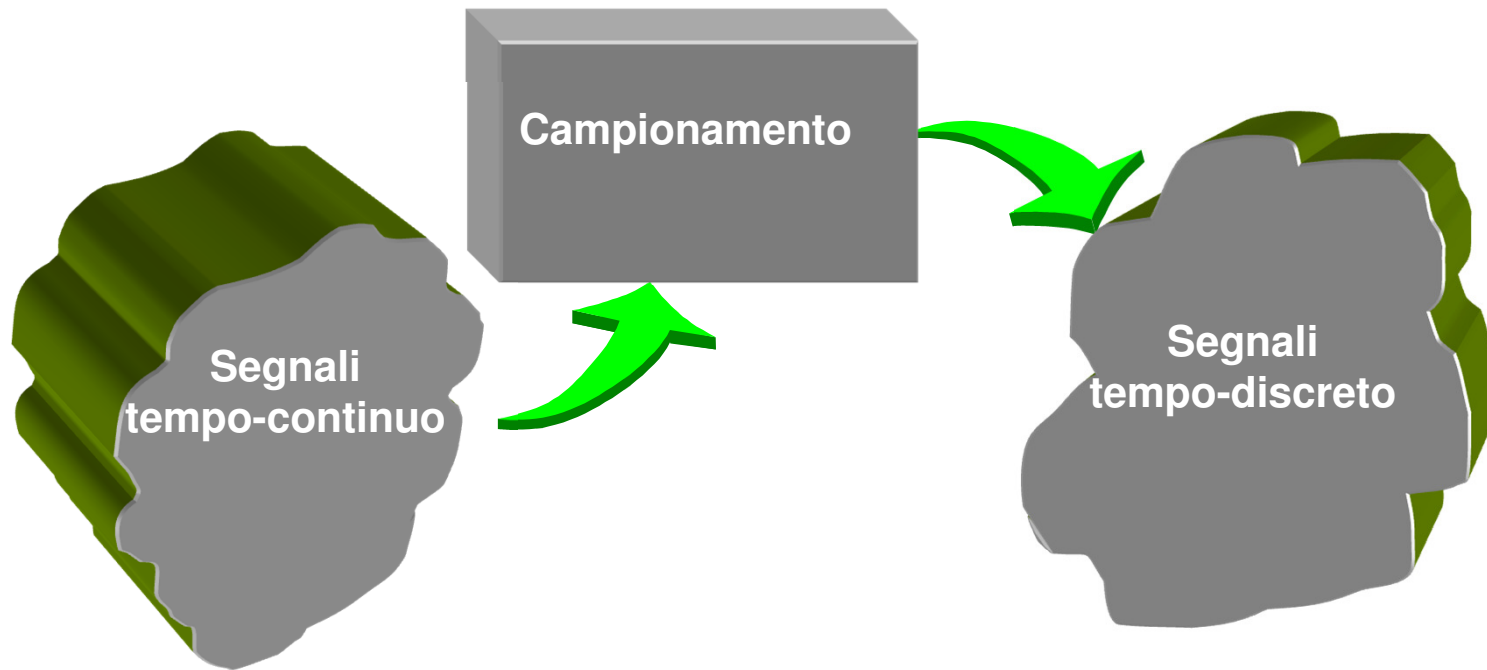
$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq (1-\alpha)/2T_s \\ \frac{T_s}{2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{T_s}{\alpha} \left( |f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right) & (1-\alpha)/2T_s \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T_s \\ 0 & |f| \geq (1+\alpha)/2T_s \end{cases}$$

All'aumentare di  $\alpha$  aumenta la banda, ma aumenta anche la rapidità con cui si smorza la risposta impulsiva (e quindi diminuisce l'anticipo necessario). Con  $\alpha=0$  riotteniamo la funzione sampling.

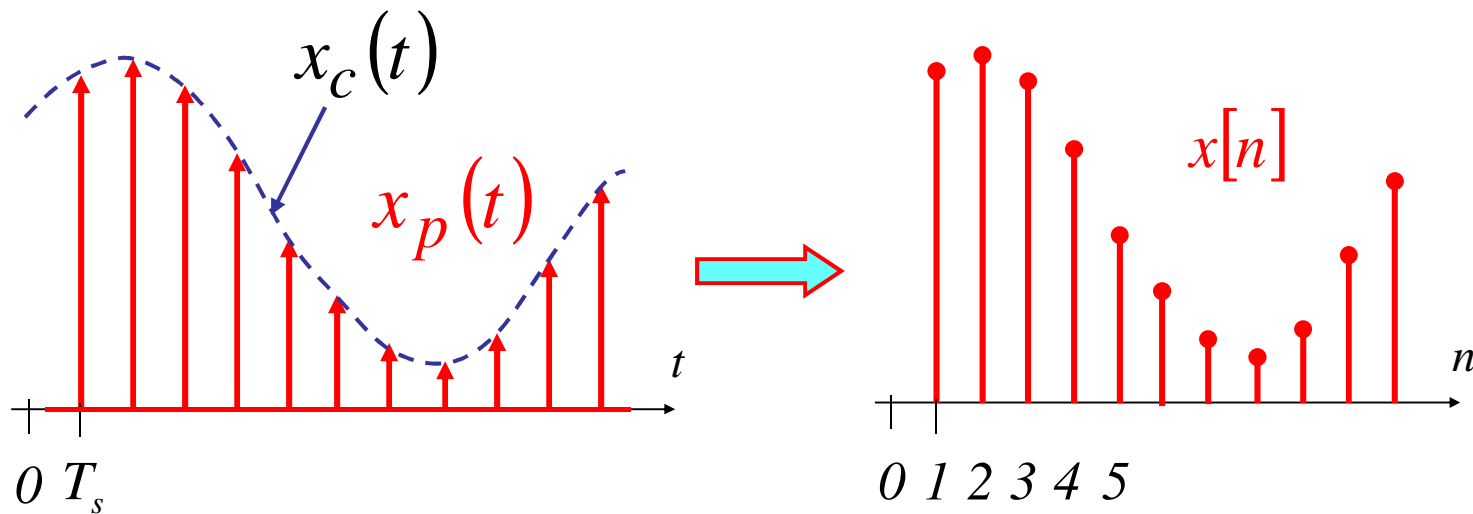
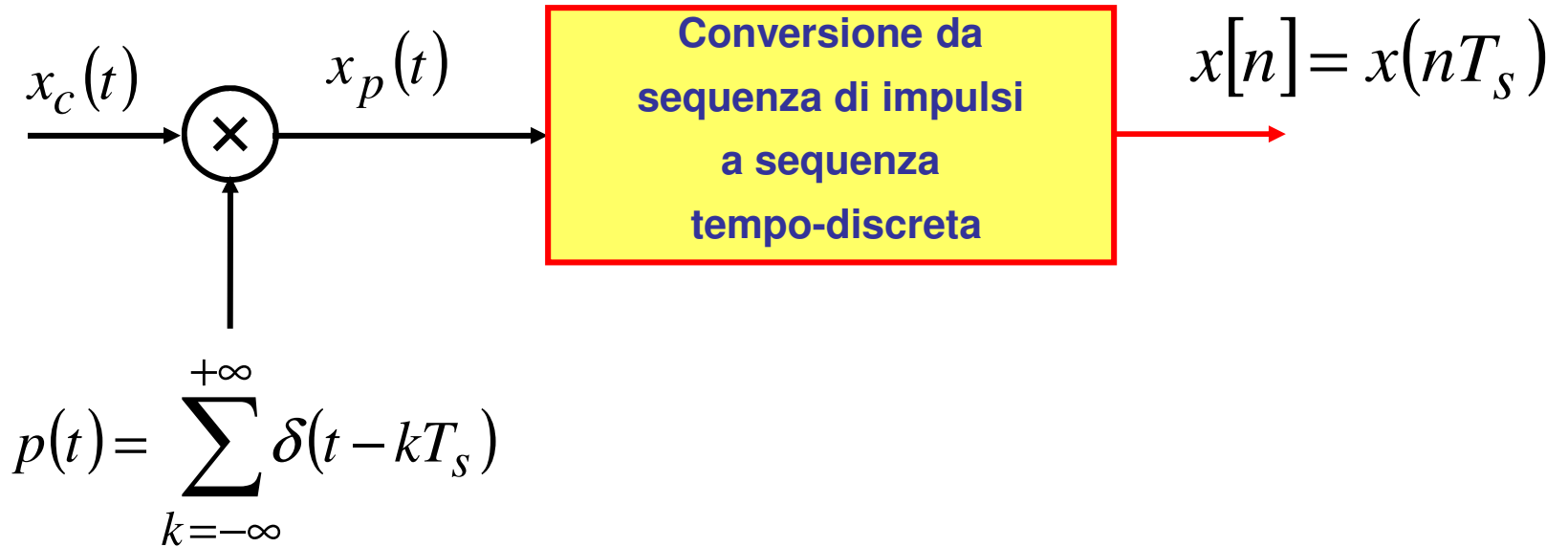
$$h_{RC}(t) = \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right) \frac{\cos(\alpha\pi t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2}$$



# Da tempo-continuo a tempo-discreto

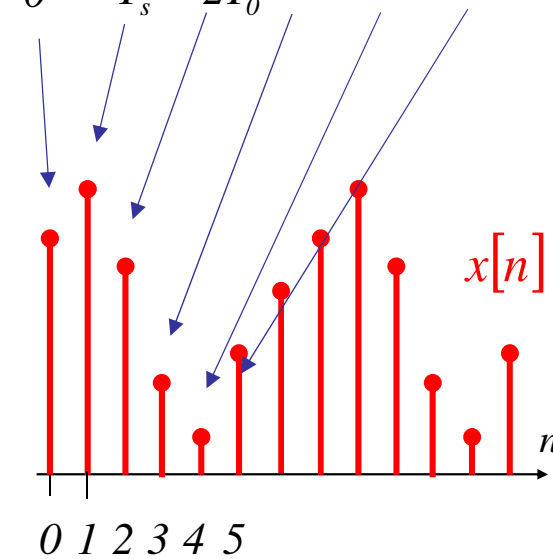
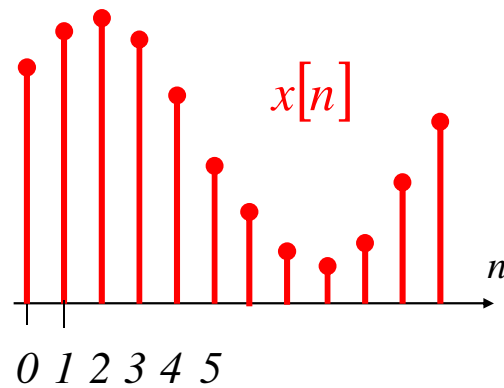
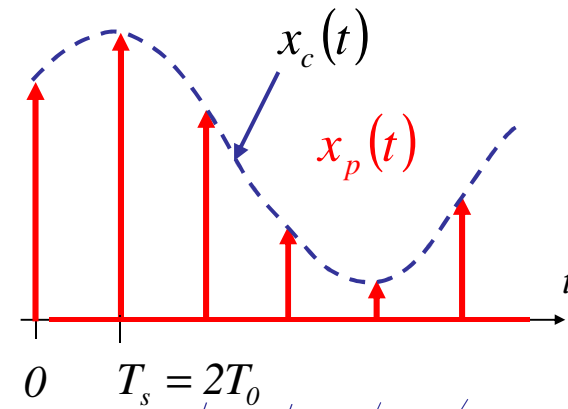
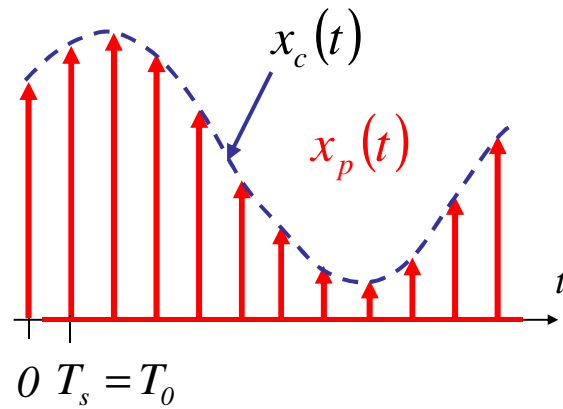


# Conversione C - D





## Conversione C - D

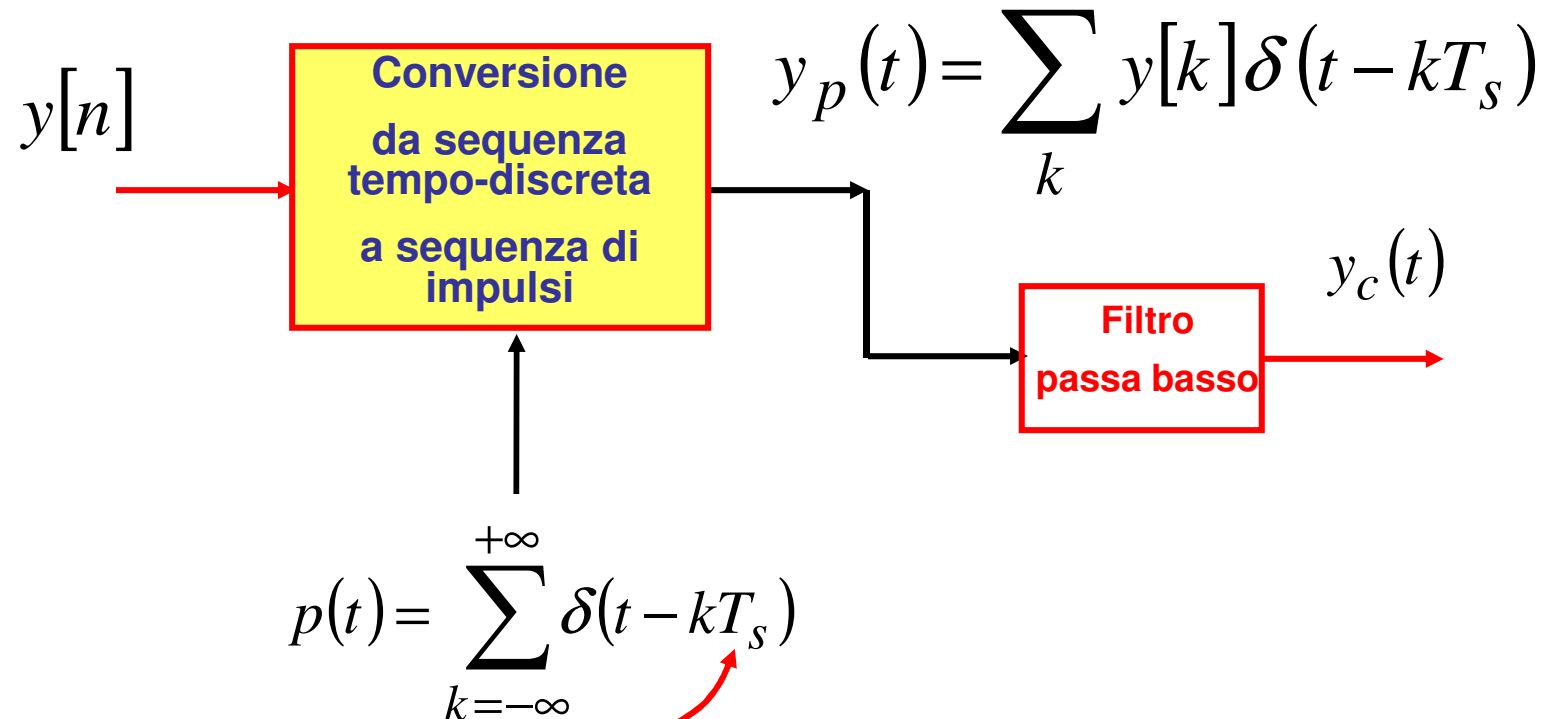


*Il segnale tempo-discreto è una sequenza: il concetto di intervallo temporale non esiste più.*



# Da tempo-discreto a tempo-continuo

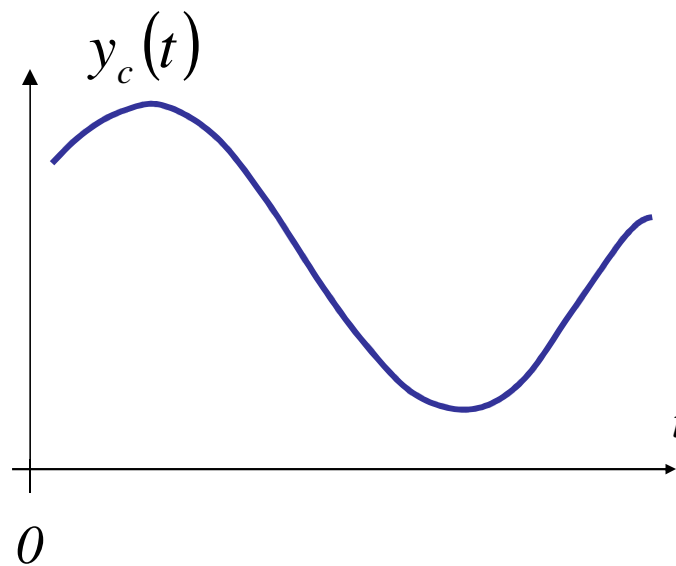
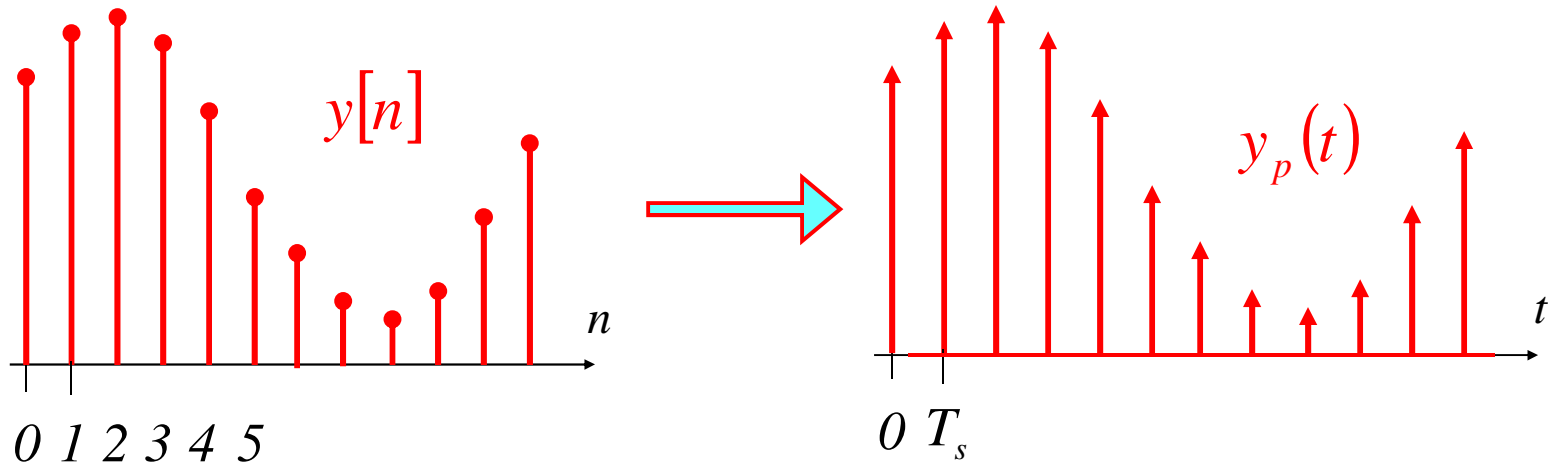
Conversione Discreto - Continuo



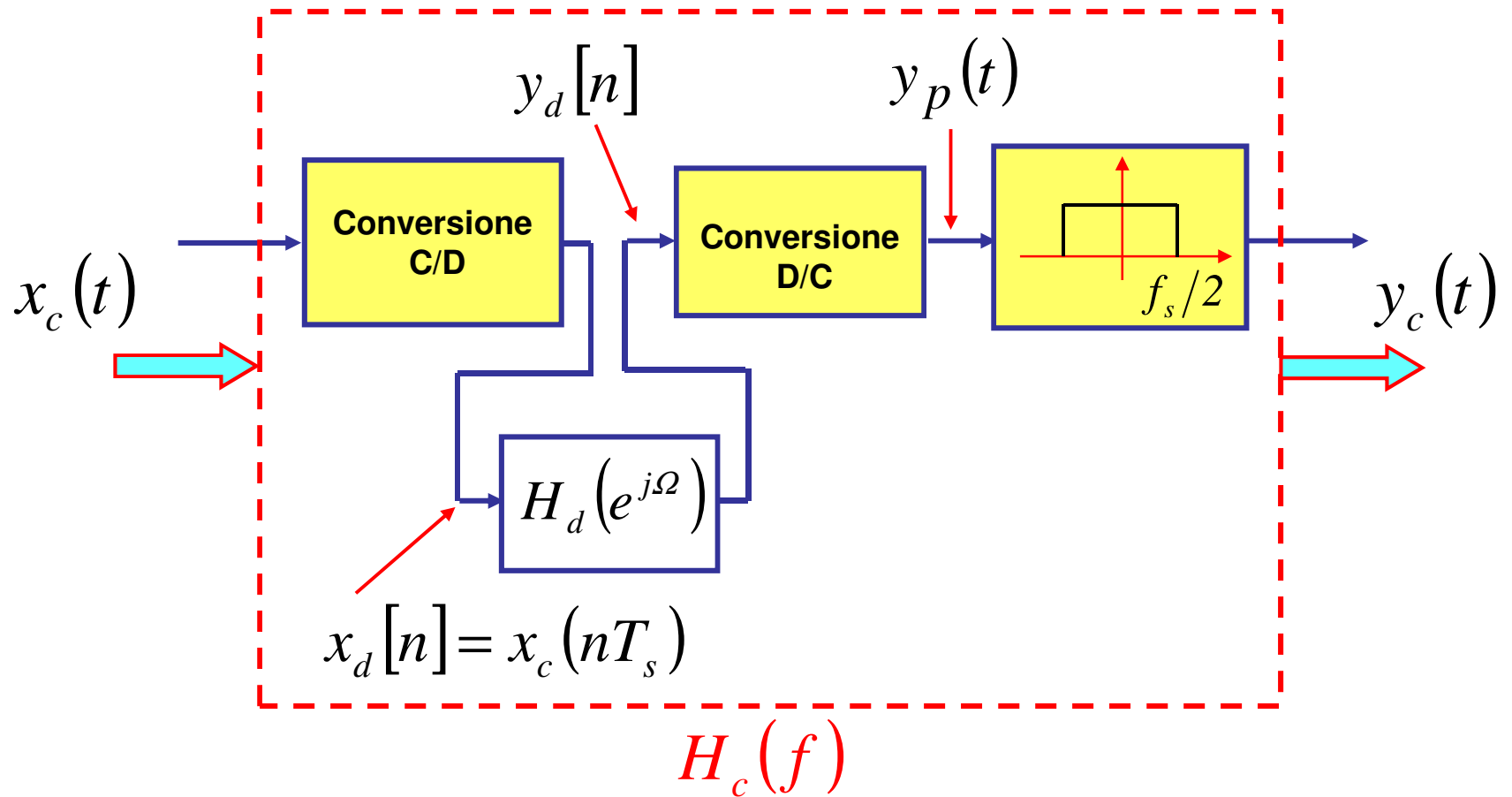
Nella conversione **D/C** viene reintrodotta l'intervallo temporale  $T_s$



# Conversione D - C



# Elaborazione tempo-discreta di un segnale tempo-continuo



## Relazione tra $X_p(\omega)$ e $X_d(e^{j\Omega})$

**Analisi nel dominio della frequenza:** (conviene  $\omega$  invece di  $f$ )

Segnale campionato

$$x_p(t) = \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Ricordando che:  $\delta(t - nT_s) \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\omega nT_s}$

$$X_p(\omega) = \sum_n x_c(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \quad (\text{altra forma dello spettro di } x_p(t))$$

Per il segnale  
tempo discreto:

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_n x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_n x_c(nT_s) e^{-j\Omega n}$$

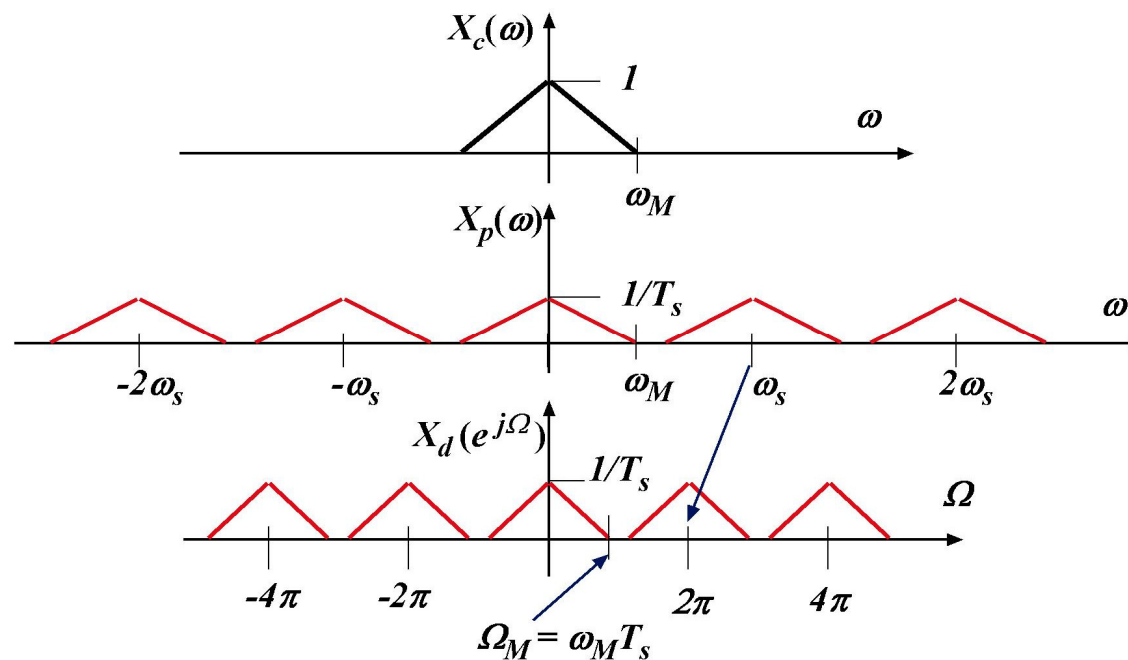
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$



## Esempio

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right) \Rightarrow X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T_s}\right)$$



## Da $y_d[n]$ a $y_c(t)$

In maniera analoga:

$$y_d[n] \stackrel{F}{\leftrightarrow} Y_d(e^{j\Omega}) = \sum_n y_d[n] e^{-j\Omega n}$$

Re-inserimento dell'intervallo di campionamento:

$$y_p(t) = \sum_n y_d[n] \delta(t - nT_c) \quad \rightarrow \quad Y_p(\omega) = \sum_n y_d[n] e^{-j\omega n T_c}$$

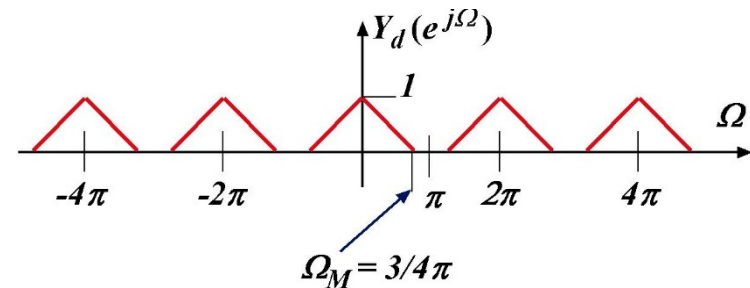
$$Y_p(\omega) = Y_d(e^{j\omega T_c})$$

$$Y_c(\omega) = \begin{cases} Y_p(\omega) = Y_d(e^{j\omega T_c}) & \text{per } |\omega| < \omega_{\text{taglioFPB}} \\ 0 & \text{per } |\omega| > \omega_{\text{taglioFPB}} \end{cases}$$



# Esempio

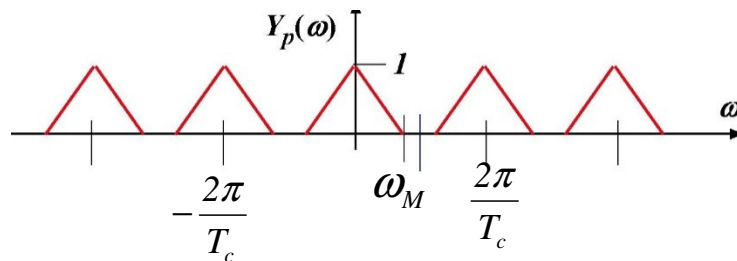
Sia questo lo spettro di  $y_d[n]$



Conversione da  $y_d[n]$  a  $y_p(t)$  con sequenze impulsive aventi periodi:

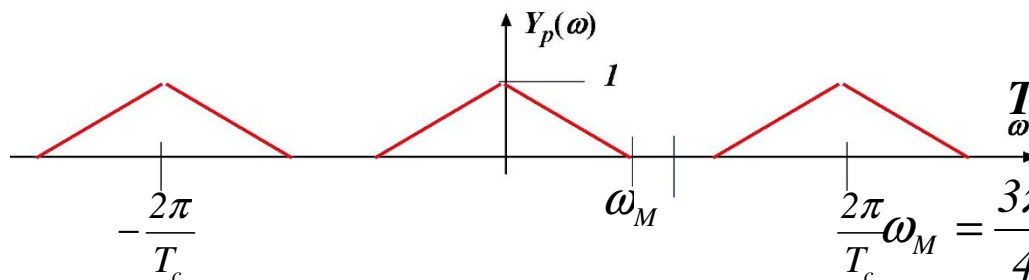
$$T_c = 125 \mu\text{sec} \quad f_c = 8 \text{ KHz}$$

$$T_c = 50 \mu\text{sec} \quad f_c = 20 \text{ KHz}$$



$$T_c = 125 \mu\text{sec} \quad f_c = 8 \text{ KHz}$$

$$\omega_M = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{T_c} = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{125 \cdot 10^{-6}} = 2\pi \times 3 \cdot 10^3$$



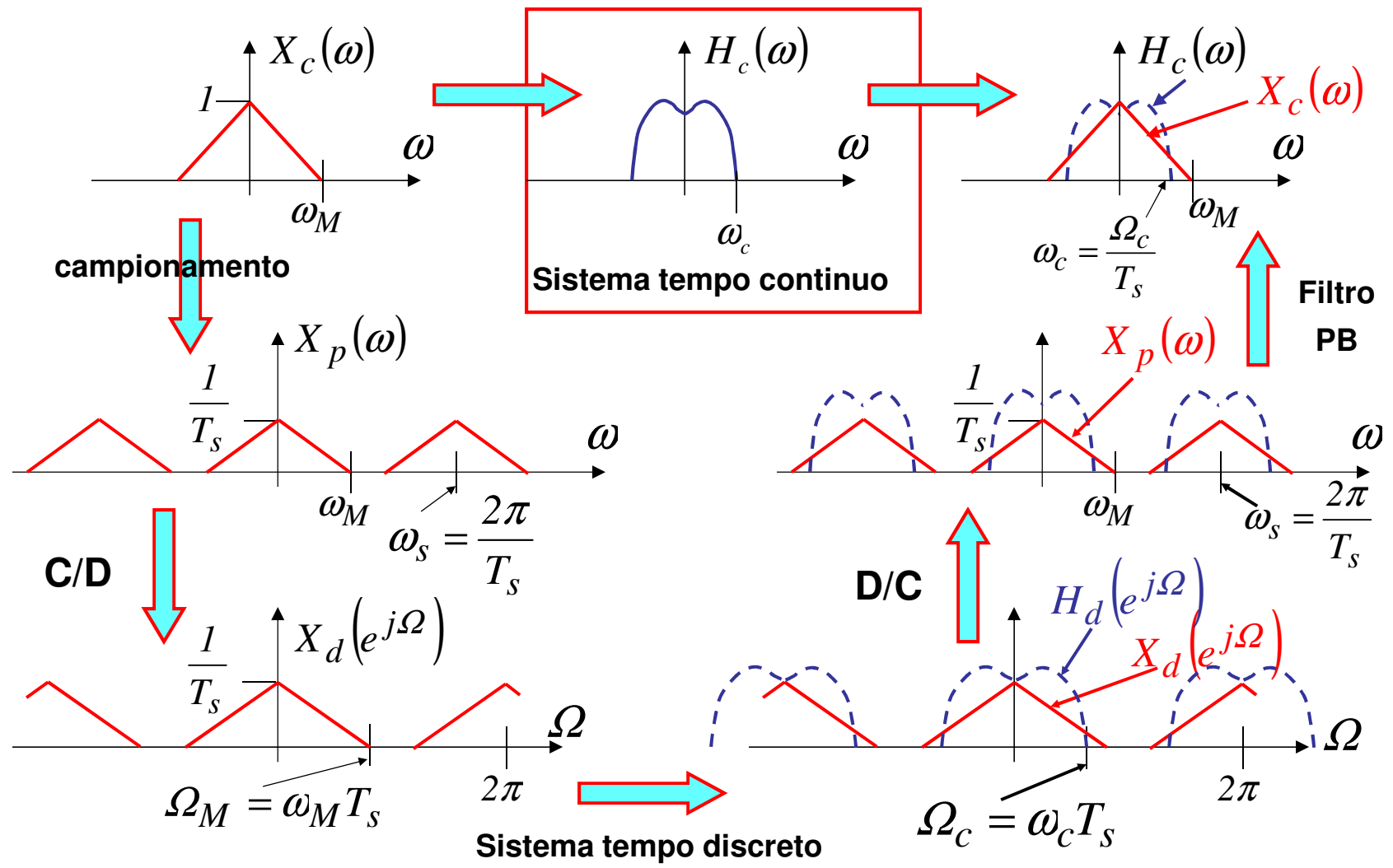
$$T_c = 50 \mu\text{sec} \quad f_c = 20 \text{ KHz}$$

$$\frac{2\pi}{T_c} \omega_M = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{T_c} = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} = 2\pi \times 7.5 \cdot 10^3$$





# Relazione tra $H_d(e^{j\Omega})$ e $H_c(\omega)$



## Relazione tra $H_d(e^{j\Omega})$ e $H_c(\omega)$

Le relazioni che seguono valgono per  $|\omega| < \omega_{\text{taglioFPB}}$  e  $T_c = T_s$

$$\begin{aligned} Y_c(\omega) &= T_s Y_p(\omega) = T_s Y_d(e^{j\omega T_s}) \\ &= T_s X_d(e^{j\omega T_s}) H_d(e^{j\omega T_s}) \\ &= T_s X_p(\omega) H_d(e^{j\omega T_s}) = X_c(\omega) H_d(e^{j\omega T_s}) \end{aligned}$$

In conclusione:

$$H_c(\omega) = H_d(e^{j\omega T_s})$$

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$



## Riassunto

Un segnale tempo-continuo a banda limitata può essere ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni se:

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2f_M$$

Spettro di un segnale campionato:  $X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$

Conversione C – D:  $x[n] = x(nT_s)$   $\xrightarrow{F}$   $X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$

Conversione D – C:  $Y_p(\omega) = Y_d(e^{j\omega T_c})$

$$Y_c(\omega) = \begin{cases} Y_p(\omega) = Y_d(e^{j\omega T_c}) & \text{per } |\omega| < \omega_{\text{taglioFPB}} \\ 0 & \text{per } |\omega| > \omega_{\text{taglioFPB}} \end{cases}$$

