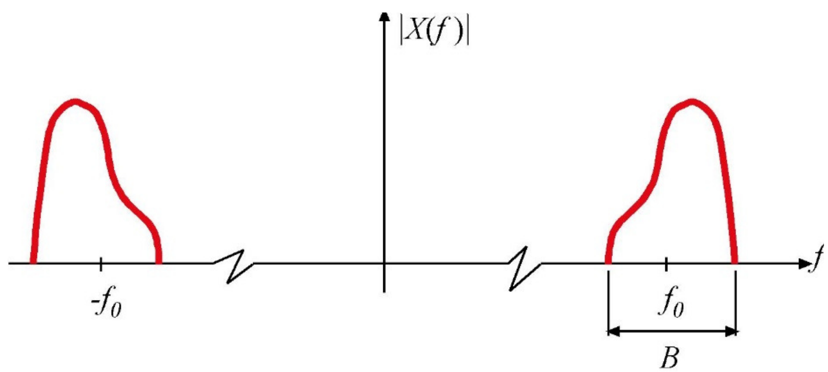
- Segnali passa-banda
- Segnale analitico
- Inviluppo complesso
- Trasformata di Hilbert
- Analisi dei sistemi LTI passa-banda
- Ritardo di fase, ritardo di gruppo

Segnale passa banda:

segnale il cui spettro $X(f)$ è nullo ovunque, tranne su un intervallo (usualmente piccolo) di frequenze attorno a una frequenza f_0 . Precisamente:

$$X(f) = 0 \quad sicuramente\ per\ |f - f_0| > B \quad B < f_0$$



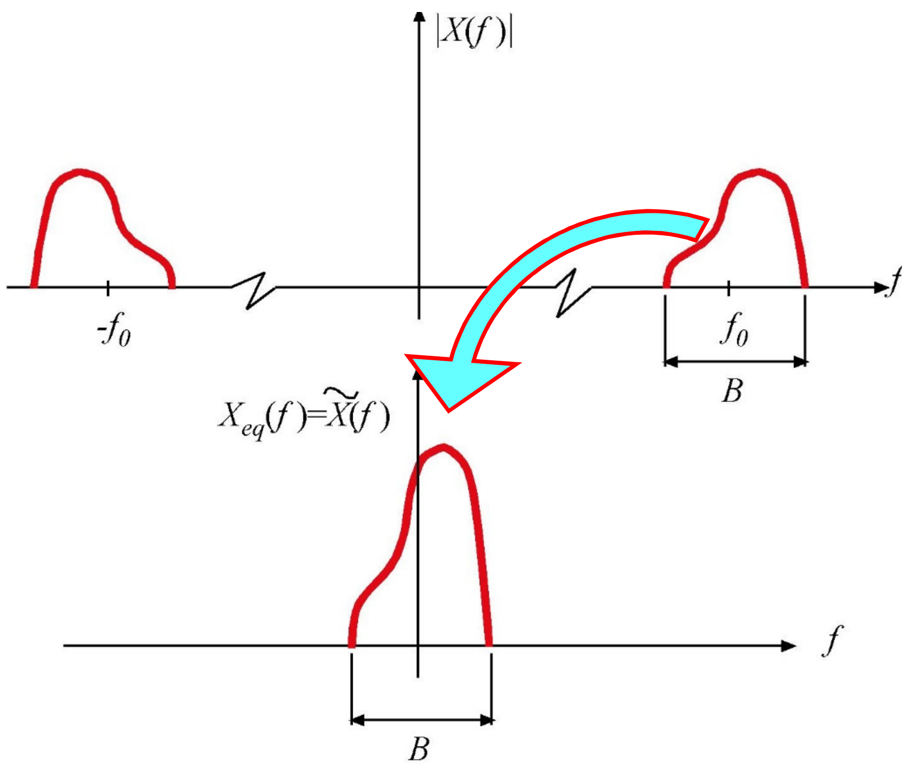
Attenzione:

f_0 ***non è necessariamente*** *la frequenza al centro dell'intervallo* B**.**

Sistema passa banda :

sistema la cui risposta in frequenza $H(f)$ è diversa da zero solamente in un intervallo di frequenze B attorno a una frequenza f_0

Nello studio di segnali e sistemi passa banda è comodo far riferimento a **segnali e sistemi equivalenti** in banda base (a bassa frequenza).



Lo spettro $\tilde{X}(f)$ è ottenuto traslando a sinistra di f_0 la parte a frequenze positive di $X(f)$, dopo averne raddoppiato l'ampiezza:

$$\tilde{X}(f) = 2u(f+f_0)X(f+f_0)$$

- Segnale analitico: è ottenuto considerando solo la parte a frequenze positive (moltiplicata per due) dello spettro di un segnale passabanda.

$$X_+(f) = 2u(f)X(f)$$

- Ricordando che (per dualità): $u(f) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}$
- si ottiene: $x_+(t) = x(t) + j\left(x(t) \otimes \frac{1}{\pi t}\right)$
- Pertanto: $x(t) = \mathrm{Re}\{x_+(t)\}$

- Inviluppo complesso: si ottiene traslando in banda base il segnale analitico:

$$\tilde{X}(f) = X_+(f + f_0) \qquad X_+(f) = \tilde{X}(f - f_0)$$

- Pertanto: $x_+(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}$ $\qquad x(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$

Da funzione di t ⇨ a funzione di t

Può essere considerata come un'operazione eseguita da un **opportuno** sistema **LTI**

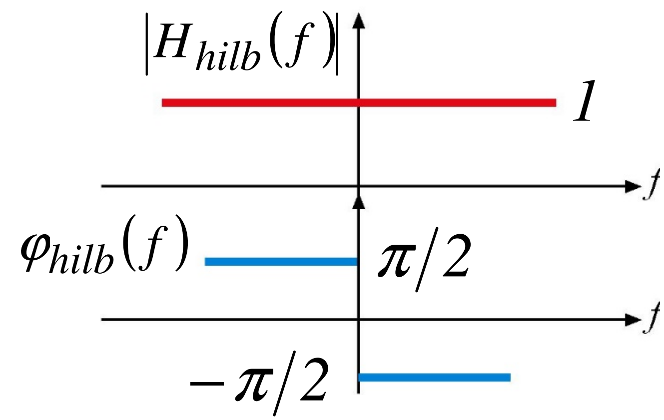
$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_{hilb}(t)} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

$$\boxed{h_{hilb}(t) = \frac{1}{\pi t}}$$

Rem.: $\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{j\pi f}$

Per dualità:

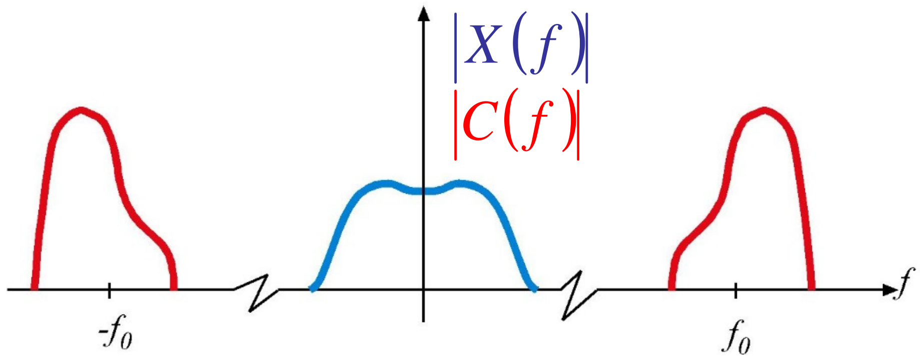
$$\boxed{H_{hilb}(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\operatorname{sgn}(f)}$$



Sia

$$y(t) = x(t)c(t)$$

con: $X(f) \times C(f) = 0$



Allora:

$$\boxed{\hat{y}(t) = x(t)\hat{c}(t)}$$

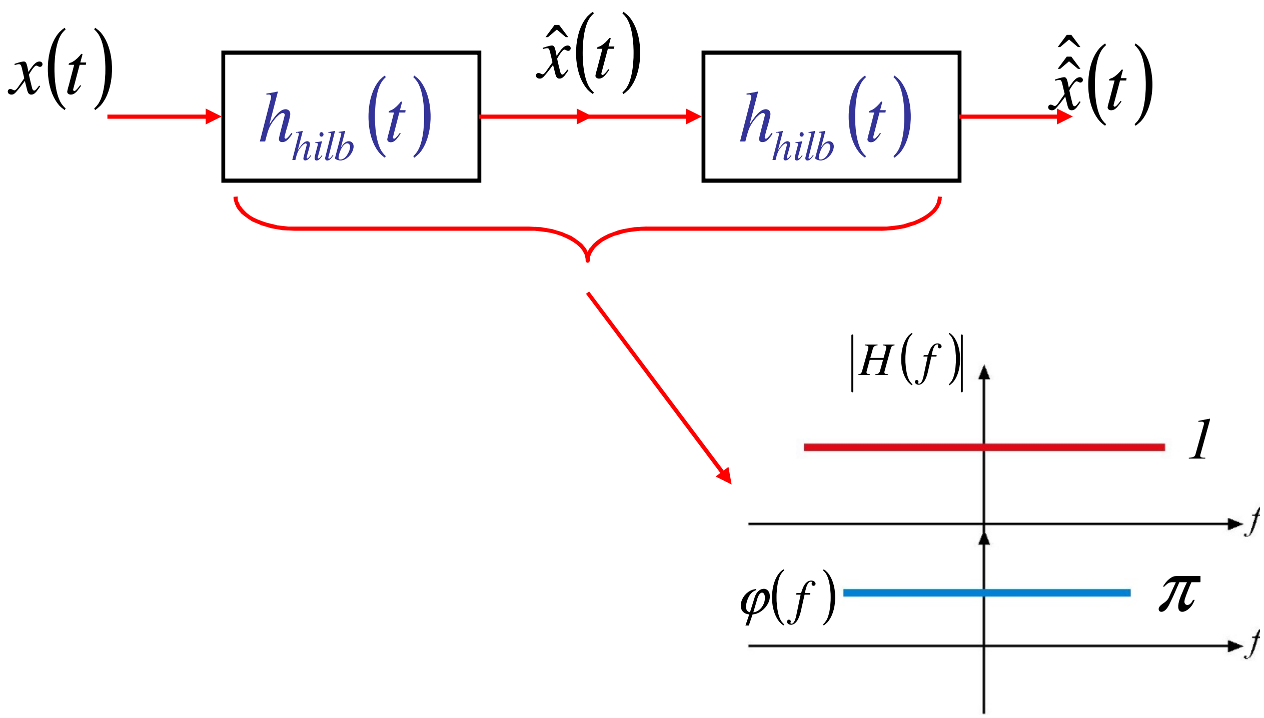
Esempio tipico:

$$y(t) = m(t)\cos(\omega_0 t) \Longrightarrow \hat{y}(t) = m(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Longrightarrow \hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \Longrightarrow \hat{x}(t) = -\cos(2\pi f_0 t)$$

(verifica per mezzo dei rispettivi spettri)

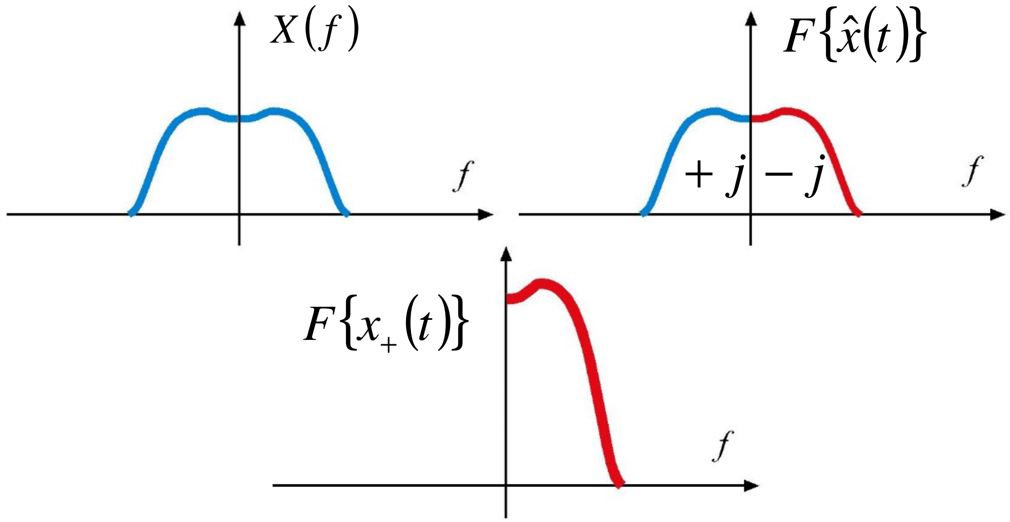


$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

Riepilogo

Segnale analitico: $x^{+}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$

$$X^{+}(f) = 2u(f)X(f)$$



Convenzione:

$\hat{X}(f) =$ Spettro di $\hat{x}(t)$

$X_{+}(f) =$ Spettro di $x_{+}(t)$

$$\tilde{X}(f) = X_{+}(f + f_0)$$

Inviluppo complesso: $\tilde{x}(t) = x_{+}(t)e^{-j2\pi f_0 t} = \tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t) + j\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)$

Il segnale passa banda può essere posto quindi nella forma:

$$\boxed{x(t) = \Re e\left\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

Inoltre:

$$x(t) = \tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t)\cos(2\pi f_0 t) - \tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

*(forma **canonica** di un segnale passa banda)*

$\tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t) =$ **parte in fase** ($x_c(t)$)

$\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t) =$ **parte in quadratura** ($x_s(t)$)

$$a(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{\tilde{x}_{\mathrm{Re}}^2(t) + \tilde{x}_{\mathrm{Im}}^2(t)}$$ **Inviluppo naturale** di $x(t)$

Calcolo inviluppo complesso

$$x(t)=\Re e\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$x(t)=x_c(t)\cos(2\pi f_0 t)-x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(t)=x_c(t)\sin(2\pi f_0 t)+x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_c(t)=\Re e\{\tilde{x}(t)\} \quad = x(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

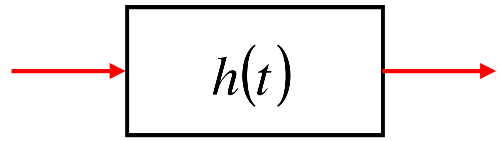
$$x_s(t)=\Im m\{\tilde{x}(t)\} \quad = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t)-x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{x}(t)$, $x_c(t)$, $x_s(t)$ **dipendono dalla scelta di** f_0

$a(t)=|\tilde{x}(t)|=$ **inviluppo naturale, non dipende dalla scelta di** f_0

Analisi di sistemi passa banda *(senza dimostrazione)*

$$x(t) = \Re e\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$



$$h(t) = 2\Re e\left\{\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

(per convenienza)

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

ma anche:

$$y(t) = \Re e\left\{\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

essendo $\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)$

L'analisi coinvolge soltanto segnali a "bassa frequenza"

sistema passa banda

rappresentazione equivalente in banda base, seguendo le medesime regole viste per i segnali:

$$h(t) \rightarrow h_+(t) = \frac{1}{2}\left\{h(t) + j\hat{h}(t)\right\}$$ Segnale analitico associato a $h(t)$

per convenienza

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= h_+(t)e^{-j2\pi f_0 t} = h_c(t) + jh_s(t) \\ \tilde{H}(f) &= H(f+f_0)u(f+f_0) \\ h(t) &= 2\Re e\left\{\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \end{aligned}}$$

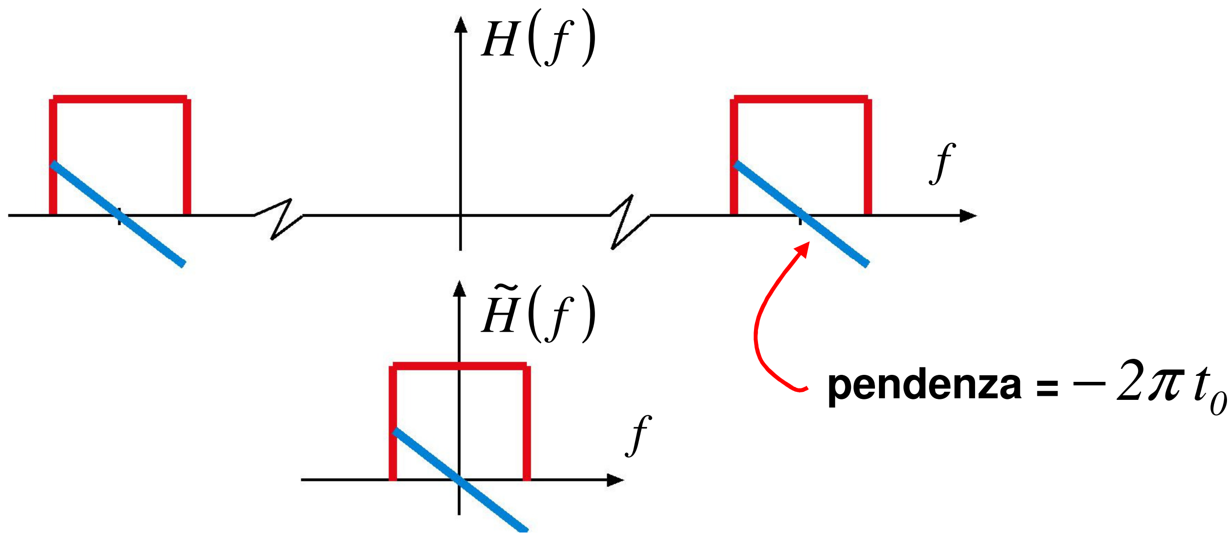
a causa del fattore $1/2$

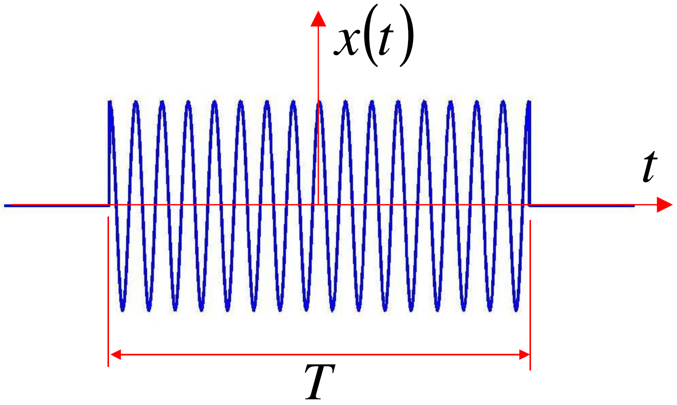
Si può dimostrare che tra gli inviluppi complessi dei segnali passa banda $y(t)$ e $x(t)$, rispettivamente all'uscita e all'ingresso di un sistema passa banda, esiste il seguente legame:

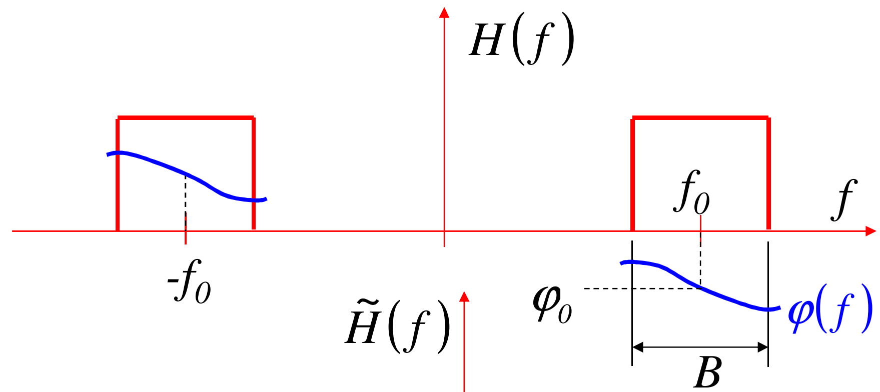
$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)$$

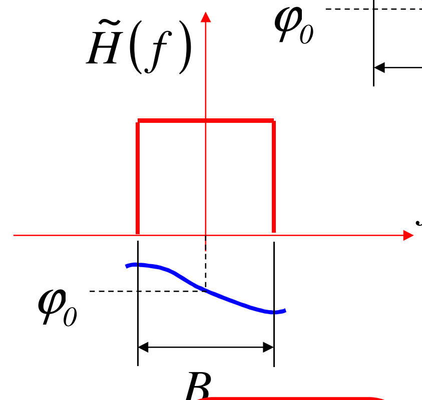
$$\tilde{Y}(f) = \tilde{X}(f)\tilde{H}(f)$$

Esempio:









$$x(t) = rect\left[\frac{t}{T}\right]\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} e^{j\varphi(f+f_0)} & per -\frac{B}{2} < f < \frac{B}{2} \\ 0 & |f| > \frac{B}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(f) \cong \varphi_0 + \boxed{\left.\frac{d\varphi}{df}\right|_{f=f_0}}(f - f_0)$$

$$-2\pi\, t_g$$

$$\boxed{\tilde{H}(f) \cong e^{j\varphi_0} e^{-j2\pi t_g f}}$$

$$x(t) = rect\left[\frac{t}{T}\right]\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow \tilde{x}(t) = rect\left[\frac{t}{T}\right]$$

$$\tilde{H}(f) \cong e^{j\varphi_0} e^{-j2\pi t_g f} \Rightarrow \tilde{h}(t) = B\,\mathrm{sinc}\left(B\left(t-t_g\right)\right)e^{j\varphi_0}$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t) \;= B\,e^{j\varphi_0}\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{\sin\left[\pi B\left(t-t_g-\tau\right)\right]}{\pi B\left(t-t_g-\tau\right)}d\tau$$

$$posto \;\; \lambda = \pi B\left(t-t_g-\tau\right)$$

$$\boxed{\mathrm{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda \quad (seno\;\; integrale)}$$

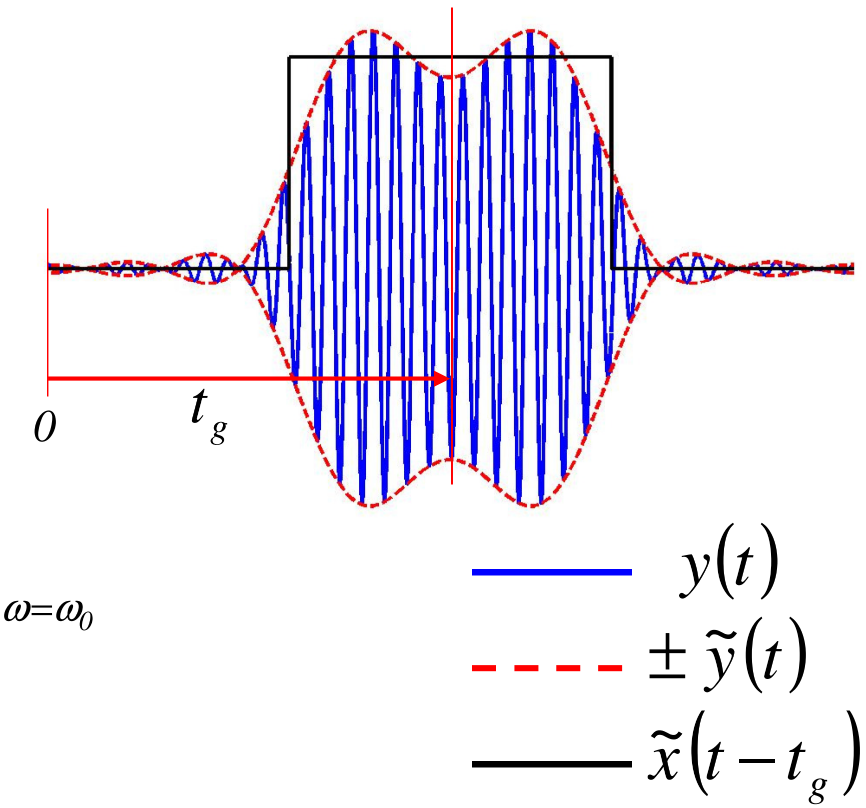
$$\tilde{y}(t) = \frac{e^{j\varphi_0}}{\pi}\int_{\pi B\left(t-t_g-T/2\right)}^{\pi B\left(t-t_g+T/2\right)}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

$$= \frac{e^{j\varphi_0}}{\pi}\left\{\mathrm{Si}\left[\pi B\left(t-t_g+T/2\right)\right]-\mathrm{Si}\left[\pi B\left(t-t_g-T/2\right)\right]\right\}$$

$$y(t) = \Re e\left\{\tilde{y}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{Si}\left[\pi B\left(t - t_g + T/2\right)\right] - \mathrm{Si}\left[\pi B\left(t - t_g - T/2\right)\right]\right\}\cos\left[2\pi f_0 (t - t_0)\right]$$

$$t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega_0} = \text{ritardo di fase}$$



$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{df}\bigg|_{f=f_0} = -\frac{d\varphi}{d\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}$$

ritardo di gruppo

Inviluppo complesso $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t) + j\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)$

$$\boxed{x(t) = \Re e\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

forma **canonica** di un segnale passa banda:

$$x(t) = \tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t)\cos(2\pi f_0 t) - \tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t) =$ **parte in fase** **($x_c(t)$)**

$\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t) =$ **parte in quadratura** **($x_s(t)$)**

$a(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{\tilde{x}_{\mathrm{Re}}^2(t) + \tilde{x}_{\mathrm{Im}}^2(t)}$ **Inviluppo naturale** di $x(t)$

Per un sistema passa basso

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)$$
$$\tilde{Y}(f) = \tilde{X}(f)\tilde{H}(f)$$

Riassunto

Trasformata di Hilbert: $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$

$$H_{hilb}(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\,\mathrm{sgn}(f) \qquad \hat{X}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)X(f)$$

Relazioni importanti:

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$\hat{x}(t) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_c(t) = \Re e\{\tilde{x}(t)\} \quad = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$x_s(t) = \Im m\{\tilde{x}(t)\} \quad = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

segnale analitico associato a $x(t)$ **:** $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$