Esercizi sui numeri complessi

Richiami

Un numero complesso z può essere rappresentato in più modi.
In forma *cartesiana* o *rettangolare* esso si presenta così:

$$z = x + jy$$

ove $j = \sqrt{-1}$ e x e y sono numeri reali, denominati *parte reale* e *parte immaginaria* di z. Spesso si usa la notazione:

$$x = \Re e\{z\}, \qquad y = \Im m\{z\}$$

La forma *polare* è:

$$z = re^{j\theta}$$

ove r $(r > 0)$ è il *modulo* di z e θ è l'*argomento* o la *fase* di z.
Le due rappresentazioni sono legate tra loro dalle relazioni di Eulero:

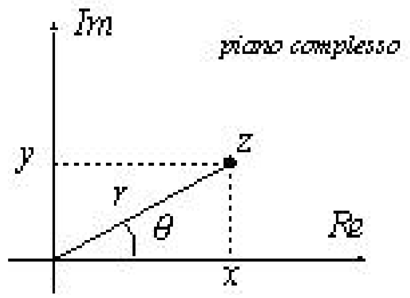
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

per cui :

$$z = re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta$$

La figura accanto illustra tale relazione, evidenziando *modulo*, *fase*, *parte reale* e *parte immaginaria* di un numero complesso z.

Dato un numero complesso $z = x + jy$, si definisce coniugato di z il numero complesso $z^* = x - jy$.



Esercizi

1. a) Usando le relazioni di Eulero, determinare le espressioni di x e y in termini di r e θ.
   b) determinare le espressioni di r e θ in termini di x e y.

2. Tramite le formule di Eulero ricavare le seguenti relazioni:

   a) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$

   b) $\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$

   c) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)$

   d) $(\sin\theta)(\sin\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$

   e) $\sin(\theta + \phi) = (\sin\theta)(\cos\phi) + (\cos\theta)(\sin\phi)$

3. Sia z_0 un numero complesso con coordinate polari r_0 e θ_0, e con coordinate cartesiane x_0 e y_0. Determinare, in funzione di x_0 e di y_0, le espressioni delle coordinate cartesiane dei seguenti numeri complessi. Riportare inoltre sul piano complesso i punti rappresentativi di z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 quando $r_0 = 2$ e $\theta_0 = \pi/4$ e quando $r_0 = 2$ e $\theta_0 = \pi/2$.

a) $z_1 = r_0 e^{-j\theta_0}$ b) $z_2 = r_0$ c) $z_3 = r_0 e^{j(\theta_0+\pi)}$

d) $z_4 = r_0 e^{j(-\theta_0+\pi)}$ e) $z_5 = r_0 e^{j(\theta_0+2\pi)}$

4. Siano z, z_1, e z_2 tre numeri complessi qualsiasi. Derivare le seguenti relazioni:

a) $zz^* = r^2$

b) $\dfrac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$

c) $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$

d) $z - z^* = 2j\,\mathrm{Im}\{z\}$

e) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

f) $(a z_1 z_2)^* = a z_1^* z_2^*$ essendo a un numero reale arbitrario

g) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

h) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{z_1 z_2^* + z_1^* z_2}{z_2 z_2^*}\right]$

5. Ricavare la parte reale e quella immaginaria dei seguenti numeri complessi:

a) $\dfrac{3+4j}{1-2j}$

b) $\dfrac{j(2+j)}{(1+j)(2-j)}$

c) $2j\dfrac{(1+j)^2}{(3-j)}$

d) $4e^{j(\pi/6)}$

e) $\sqrt{2}e^{j\left(\frac{25}{4}\right)\pi}$

f) $je^{j\left(\frac{11}{4}\right)\pi}$

g) $3e^{j4\pi} + 2e^{j7\pi}$

h) numero complesso con modulo $|z| = \sqrt{2}$ e fase $\angle z = -\dfrac{\pi}{4}$

i) $(1-j)^9$

j) $\dfrac{6e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1-j}$

6. Esprimere i seguenti numeri complessi in forma polare:

a) $1 + j\sqrt{3}$

b) $3 + 4j$

c) $(\sqrt{3} + j^3)(1-j)$

d) $j(1+j)e^{j\pi/6}$

e) -5

f) $(1 - j\sqrt{3})^3$

g) $\dfrac{2 - j(6/\sqrt{3})}{2 + j(6/\sqrt{3})}$

h) $(\sqrt{3} + j)2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$

i) $-5-5j$

j) $(1+j)^5$

k) $\dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$

l) $\dfrac{e^{j\pi/3} - 1}{1 + j\sqrt{3}}$