ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 4 febbraio 2000

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI causale è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = \frac{dx}{dt}$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = rect\left[\frac{t}{2} - 2\right]$.

Soluzione

Il segnale $x(t)$ è un impulso rettangolare di durata $T = 2$, centrato in $t = 4$. La sua derivata risulta quindi costituita dalla somma di due impulsi ideali, uno positivo e l'altro negativo, posti in $t_1 = 3$ e $t_2 = 5$. Più precisamente:

$$\frac{dx}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$$

Per valutare la risposta del sistema a $x(t)$basta conoscere la risposta impulsiva del sistema descritto dall'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = g(t),$$

che come è noto è pari a $e^{-3t}u(t)$. Di conseguenza la risposta cercata è:

$$y(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5).$$

Esercizio N.2

Nel sistema di figura 1 il segnale tempo-discreto $x[n]$ è convertito in una sequenza impulsiva di periodo T, che viene filtrata con un filtro passa basso ideale, avente frequenza di taglio π/T. Il segnale tempo-continuo $x_c(t)$ così ottenuto è applicato a un sistema LTI causale, descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{d\, y_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t)$$

L'uscita $y_c(t)$è campionata in maniera ideale con periodo di campionamento T e convertita nel segnale tempo-discreto $y[n]$.

Determinare la risposta in frequenza del sistema tempo-discreto equivalente all'intero sistema di figura 1. Dire inoltre quale legame esiste tra la risposta impulsiva del sistema equivalente e quella del sistema descritto dalla citata equazione differenziale.

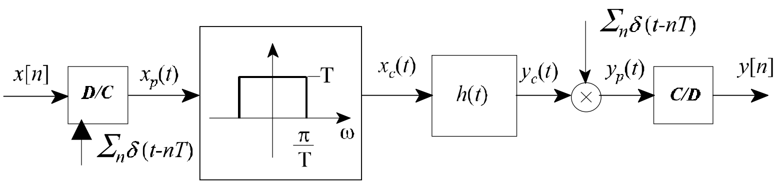
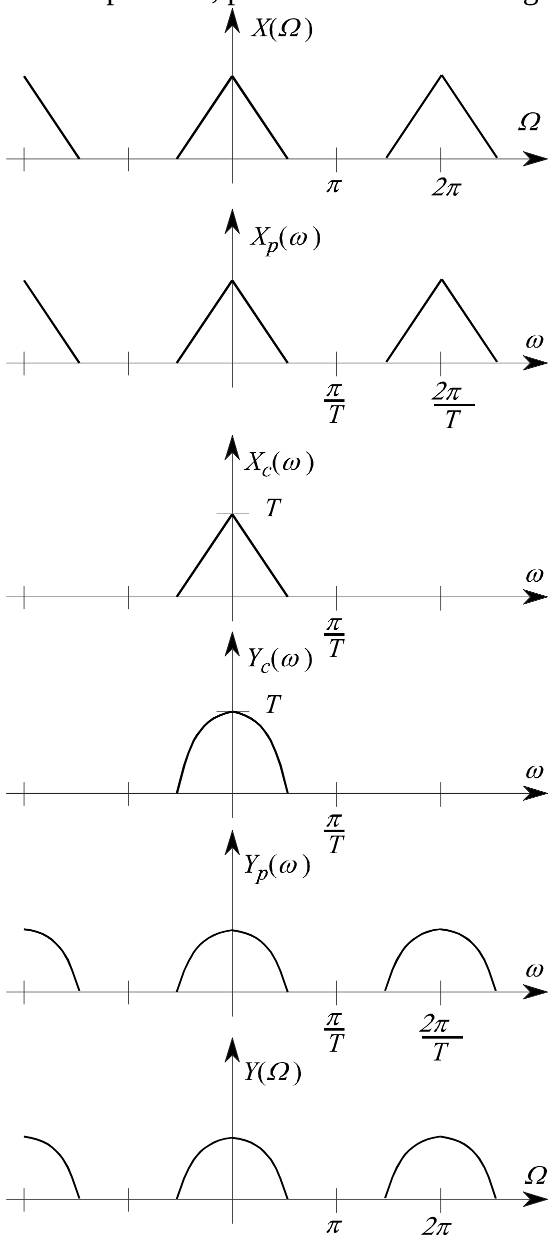


Fig. 1

Soluzione

Indicando con: $X(\Omega), X_p(\omega), X_c(\omega), Y_c(\omega), Y_p(\omega), Y(\Omega)$ gli spettri rispettivamente di: $x[n], x_p(t), x_c(t), y_c(t), y_p(t), \ y[n]$ e con $H_c(\omega)$ e $H_D(\Omega)$ le risposte in frequenza rispettivamente del sistema tempo continuo indicato in figura con $h(t)$ e del sistema tempo discreto complessivo, possiamo scrivere le seguenti relazioni:



$$X_p(\omega) = X(\omega T)$$

$$X_c(\omega) = \begin{cases} TX_p(\omega) = TX(\omega T) & \text{per } |\omega| \le \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{per } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$$Y_c(\omega) = \begin{cases} TX(\omega T) H_c(\omega) & \text{per } |\omega| \le \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{per } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$$Y_p(\omega) = H_c(\omega) X(\omega T) \quad \text{per } |\omega| \le \frac{\pi}{T}$$

(ripetuto con periodo $\frac{2\pi}{T}$)

$$Y(\Omega) = Y_p\left(\frac{\Omega}{T}\right) = X(\Omega) H_c\left(\frac{\Omega}{T}\right)$$

per $|\omega| \le \pi$, ripetuto con periodo 2π

Pertanto la risposta in frequenza dell'intero sistema è pari a $H_c\left(\frac{\Omega}{T}\right)$ per $|\omega| \leq \pi$, ripetuta con periodo 2π. La funzione $H_c(\omega)$ è ricavabile dall'equazione differenziale che descrive il sistema LTI tempo-continuo. Risulta:

$$H_c(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 4j\omega + 3} \;\Rightarrow\; H_D(\Omega) = \frac{1}{-\left(\frac{\Omega}{T}\right)^2 + 4j\left(\frac{\Omega}{T}\right) + 3}$$

Per quanto riguarda la relazione tra la risposta impulsiva dell'intero sistema e quella del sistema LTI tempo-continuo, se $x[n] = \delta[n]$ allora $x_p(t) = \delta(t)$. Supponendo di invertire il sistema indicato con $h(t)$con il filtro passa basso, risulta evidente che $y_p(t)$ non è null'altro che la risposta impulsiva $h(t)$ filtrata con un filtro passa basso ideale e successivamente campionata a frequenza $1/T$. Pertanto la risposta impulsiva dell'intero sistema corrisponde a un campionamento della versione filtrata di $h(t)$. In formule si ha:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} TH(\omega)e^{j\omega nT}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)}{\frac{\pi}{T}\tau}h(nT-\tau)d\tau .$$

Nell'ultima relazione la funzione $h(t)$è pari a $\frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)u(t)$.

<u>Esercizio N. 3</u>

Il segnale $x(t) = \cos\Omega_1 t + \frac{1}{2}\cos 2\Omega_1 t$ modula in ampiezza la portante $A\cos\omega_0 t$ con indice di modulazione $m = 0.6$ ($\omega_0 >> \Omega_1$). Il segnale così ottenuto è applicato all'ingresso di un filtro passa banda avente la risposta in frequenza indicata in figura 2.

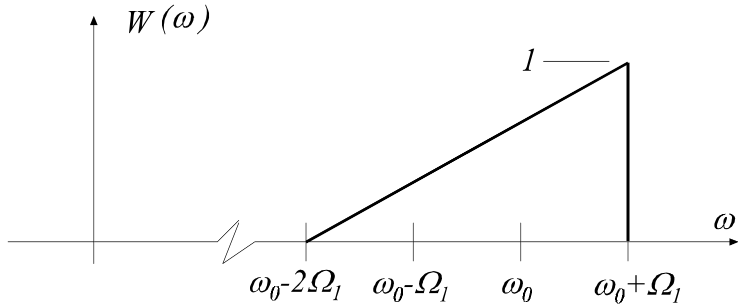


Fig. 2

Con riferimento alla frequenza ω_0 ricavare le parti in fase e in quadratura del segnale all'uscita del filtro passa banda.

Soluzione

Il segnale modulato ha la seguente espressione:

$$s(t) = A(1 + m\,\bar{x}(t))\cos(\omega_0 t)$$

in cui $\bar{x}(t)$ rappresenta la versione normalizzata a *1* di $x(t)$. Tenendo conto che il valore massimo del segnale modulante è pari a *1.5*, si avrà la seguente espressione per $s(t)$:

$$s(t) = A(1 + 0.4\cos\Omega_1 t + 0.2\cos 2\Omega_1 t)\cos(\omega_0 t)$$

Lo spettro di $s(t)$ è rappresentato in figura II, ove è mostrata pure la risposta in frequenza del filtro passa banda.

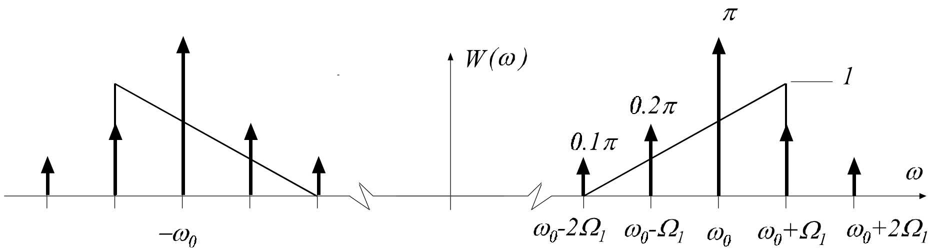


Fig. II

All'uscita del filtro rimangono le componenti a frequenza ω_0, $\omega_0 - \Omega_1$, $\omega_0 + \Omega_1$ con ampiezze modificate dalla presenza del filtro. Più precisamente, il segnale all'uscita è dato da:

$$s_u(t) = \frac{A}{15}\cos(\omega_0 - \Omega_1)t + \frac{2A}{3}\cos\omega_0 t + \frac{A}{5}\cos(\omega_0 + \Omega_1)t$$

$$= \left\{\frac{2A}{3} + \left(\frac{A}{15} + \frac{A}{5}\right)\cos\Omega_1 t\right\}\cos\omega_0 t - \left\{\left(\frac{A}{5} - \frac{A}{15}\right)\sin\Omega_1 t\right\}\sin\omega_0 t$$

In questa espressione si riconoscono le seguenti parti in fase e in quadratura:

$$s_c(t) = \frac{2A}{3} + \frac{4A}{15}\cos\Omega_1 t$$

$$s_s(t) = \frac{2A}{15}\sin\Omega_1 t$$

Esercizio N. 4

Le realizzazioni di un processo aleatorio sono costituite da funzioni che nel tempo assumono i valori *0* o *1*. Le transizioni tra *0* e *1* oppure tra *1* e *0* avvengono in istanti distribuiti in maniera casuale. La probabilità che in un intervallo di tempo *T* avvengano *n* transizioni è data da:

$$P(n,T) = \frac{1}{1+\alpha T}\left(\frac{\alpha T}{1+\alpha T}\right)^n$$

in cui α è una costante positiva. La probabilità che all'istante $t = 0$ la realizzazione valga *1* è pari a $\frac{1}{2}$.

1) Valutare il valore medio $m_x(t)$ del processo.

2) Valutare la funzione di autocorrelazione del processo.
3) Dire se il processo è stazionario, ciclostazionario, non stazionario.

Soluzione

Nel generico istante t il processo può assumere solamente i valori 0 e 1 . Il suo valore medio sarà pertanto pari a:

$$m_x(t) = 1 \times P(1,t) + 0 \times P(0,t) = P(1,t)$$

La probabilità che il processo valga 1 all'istante t è data dalla somma delle probabilità che esso valga 1 all'istante $t=0$ e in t ci sia un numero pari di transizioni, e che esso valga 0 all'istante $t=0$ e in t ci sia un numero dispari di transizioni.

$$m_x(t) = P(1,t=0) \times P(t,n = pari) + P(0,t=0) \times P(t,n = dispari)$$

$$= \frac{1}{2} \times P(t,n = pari) + \frac{1}{2} \times P(t,n = dispari) = \frac{1}{2} \times \{P(t,n = pari) + P(t,n = dispari)\} = \frac{1}{2}$$

Per inciso, si ha che:

$$P(t,n = pari) = \frac{1}{1+\alpha t} \sum_k \left(\frac{\alpha t}{1+\alpha t} \right)^{2k} = \frac{1}{1+\alpha t} \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha t}{1+\alpha t} \right)^2} = \frac{1+\alpha t}{1+2\alpha t}$$

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione, essa è calcolabile nella seguente maniera:

$$R_x(t,t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = 1 \times Prob[x(t) = 1, x(t+\tau) = 1] = P(1,t) \times P(\tau, n = pari)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+\alpha|\tau|}{1+2\alpha|\tau|}$$

Il processo quindi è stazionario, almeno in senso lato.