ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 7 – 11 luglio 2000

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI ha la seguente risposta in frequenza:

$$H(\omega) = 2\,rect\left[\frac{\omega}{2\times 10^4}\right] e^{-j\omega t_0}$$

Esprimere la sua risposta $y(t)$ quando il segnale di ingresso è:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - k\times 10^{-3}\right)$$

Soluzione

In figura I sono riportati il segnale $x(t)$ e la risposta in frequenza del sistema.

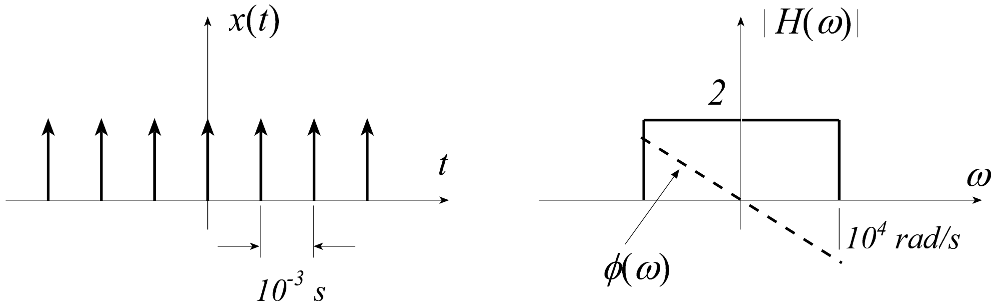

Fig. I

Il segnale di ingresso è periodico, con frequenza fondamentale $\omega_0 = 2\pi\times 10^3$ rad/s. Attraverso il sistema transiteranno solamente la sua componente continua e la prima armonica. Si avrà pertanto:

$$y(t) = \frac{2}{10^{-3}}\left(1 + e^{-j2\pi\times 10^3 (t-t_0)} + e^{+j2\pi\times 10^3 (t-t_0)}\right) = 2\times 10^3\left\{1 + 2\cos\left[2\pi\times 10^3 (t-t_0)\right]\right\}$$

Esercizio N. 2

a) Un sistema LTI tempo discreto risponde al segnale $x[n]$ con il segnale:

$$y[n] = \sum_{k=n-5}^{n} x[k]$$

Determinare la sua funzione di trasferimento $H(z)$.

b) Si consideri quindi il segnale

$$x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} f[n-kN]$$

in cui $f[n]$ è un segnale diverso da zero soltanto sull'intervallo $0 \le n \le N-1$.
Si calcoli la Z-trasformata di $x[n]$ in funzione di quella di $f[n]$.

c) Sfruttando il risultato ottenuto al punto b), si determini la risposta del sistema di cui al punto a) al segnale $x[n]$, allorquando $f[n]$ è il segnale mostrato in figura 1 e $N=6$.

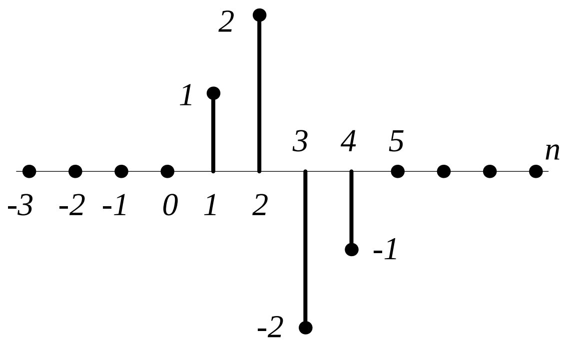

Fig.1

Soluzione

a) La risposta del sistema è data in generale dalla somma di convoluzione $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]x[k]$. Quest'ultima si riduce all'espressione $y[n] = \sum_{k=n-5}^{n} x[k]$ se la risposta impulsiva è:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 5 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Pertanto:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{5} z^{-n} = \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

b) Per definizione di Z-trasformata si ha:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} f[n-kN]\,z^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f[n-kN]\,z^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} F(z)\,z^{-kN} =$$

$$= F(z)\frac{1}{1-z^{-N}} \qquad (|z|>1)$$

c) In particolare, per il segnale $x[n]$ costruito con la $f[n]$ di figura 1 si ha:

$$X(z) = F(z)\frac{1}{1-z^{-6}} \qquad (|z|>1)$$

e pertanto la Z-trasformata della risposta risulta:

$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}F(z) \quad \leftrightarrow \quad y[n] = f[n] \otimes u[n]$$

La corrispondente somma di convoluzione fornisce il segnale di figura II.

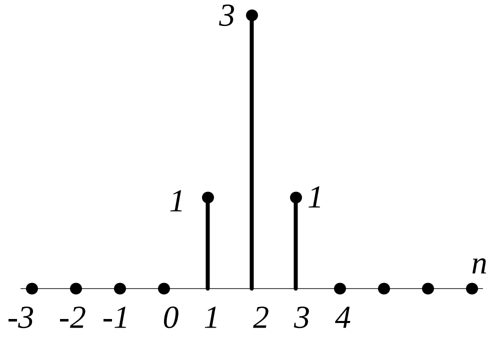

Fig.II

Esercizio N. 3

Con riferimento alla figura 2, si determini la risposta in frequenza $H(\omega)$ del sistema che elabora il segnale campionato $x(t)\times\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(t-kT)$.

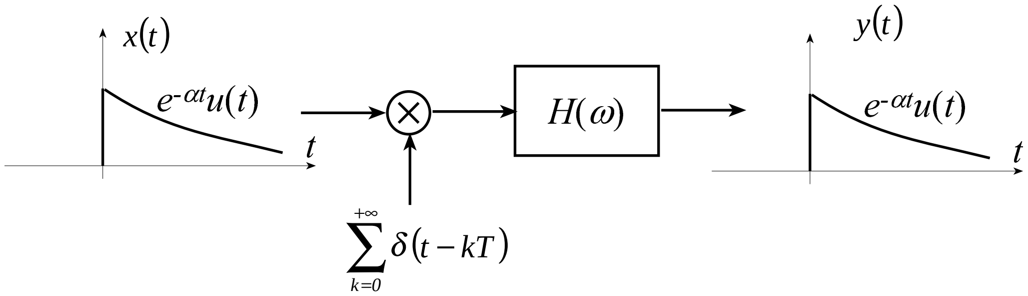

Fig. 2

Soluzione

All'ingresso del sistema $H(\omega)$ è presente il segnale $x_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\alpha kT}\delta(t-kT)$, il cui spettro è:

$$X_1(\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\alpha kT}e^{-j\omega kT}=\frac{1}{1-e^{-\alpha T}e^{-j\omega T}}$$

Lo spettro del segnale di uscita è pari a $\frac{1}{\alpha+j\omega}$. Dovrà quindi sussistere la seguente uguaglianza:

$$X_1(\omega)H(\omega)=\frac{H(\omega)}{1-e^{-\alpha T}e^{-j\omega T}}=\frac{1}{a+j\omega}$$

da cui si ricava:

$$H(\omega)=\frac{1-e^{-(\alpha+j\omega)T}}{\alpha+j\omega}.$$

A titolo di esempio, in fig. III è riportato l'andamento di $|H(\omega)|$ per $\alpha=0.5$ e $T=1\ s$.

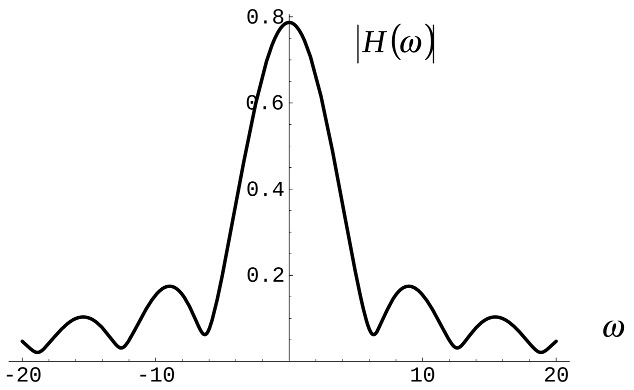

Fig. III

Esercizio N. 4

Un processo $\{\phi(t)\}$ stazionario in senso lato modula di fase una portante sinusoidale, dando luogo al processo $\{y(t)\}$ le cui realizzazioni sono:

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi(t) + \theta)$$

in cui A e ω_0 sono delle costanti e θ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π, indipendente dal processo $\phi(t)$.

Si dica se il processo $\{y(t)\}$ è, o non è, stazionario in senso lato.

(Attenzione: vien chiesto solamente di pronunciarsi, giustificando ovviamente la risposta, sulla stazionarietà del processo; non si richiede la valutazione di un'esplicita funzione di autocorrelazione.)

Soluzione

a) Esprimiamo il valor medio di $\{y(t)\}$:

$$E\{A\cos(\omega_0 t - \phi(t) + \theta)\} = A\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t - \phi(t) + \theta)p_1(\phi, t)p_\theta(\theta)d\phi\, d\theta =$$

$$= A\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t - \phi(t) + \theta)p_1(\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi\, d\theta = 0$$

b) Scriviamo formalmente la funzione di autocorrelazione del processo:

$$R_y(t, t+\tau) = E[A\cos(\omega_0 t - \phi(t) + \theta)\, A\cos(\omega_0(t+\tau) - \phi(t+\tau) + \theta)] =$$

$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau - \phi(t) - \phi(t+\tau) + 2\theta)] + \frac{A^2}{2}E[\cos(\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t+\tau))]$$

Il primo valor medio è sicuramente nullo (la variabile aleatoria θ è uniformemente distribuita tra 0 e 2π ed è indipendente da $\phi(t)$. Il secondo valor medio può essere posto nella forma seguente:

$$\frac{A^2}{2}E[\cos(\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t+\tau))] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)E[\cos(\phi(t) - \phi(t+\tau))] +$$

$$+ \frac{A^2}{2}\sin(\omega_0\tau)E[\sin(\phi(t) - \phi(t+\tau))]$$

Questo valore medio dipende soltanto da τ. Infatti, dette:

$$\phi_1 = \phi(t)$$
$$\phi_2 = \phi(t+\tau)$$

possiamo scrivere:

$$E[\cos(\phi(t)-\phi(t+\tau))] = E[\cos(\phi_1-\phi_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\phi_1-\phi_2)\, p_2(\phi_1,t;\phi_2,t+\tau)d\phi_1 d\phi_2$$

$$E[\sin(\phi(t)-\phi(t+\tau))] = E[\sin(\phi_1-\phi_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\phi_1-\phi_2)\, p_2(\phi_1,t;\phi_2,t+\tau)d\phi_1 d\phi_2$$

Ma, per la stazionarietà del processo $\phi(t)$, $p_2(\phi_1,t;\phi_2,t+\tau) = p_2(\phi_1,\phi_2;\tau)$. Pertanto i due valori medi dipendono solamente da τ. Ciò implica $R_y(t,t+\tau) = R_y(\tau)$ e quindi $y(t)$ è un processo stazionario in senso lato.