

**ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE**

Appello del 30 – 31 gennaio 2001

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI causale è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

Determinare la sua risposta al segnale  $x(t)$  avente trasformata di Fourier:

$$X(\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)}$$

Soluzione

Si determini preliminarmente la risposta in frequenza del sistema dato. Trasformando entrambi i membri dell'equazione differenziale risulta:

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

La trasformata della risposta cercata è pertanto:

$$Y(\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)^2 (1 + j\omega)}$$

Attraverso la scomposizione in fratti parziali  $Y(\omega)$  può essere posta nella forma:

$$Y(\omega) = \frac{A}{(2 + j\omega)^2} + \frac{B}{(2 + j\omega)} + \frac{C}{(1 + j\omega)}$$

Risulta essere:  $A = -1$ ,  $B = -1$  e  $C = 1$ . In definitiva:

$$y(t) = (-te^{-2t} - e^{-2t} + e^{-t})u(t)$$

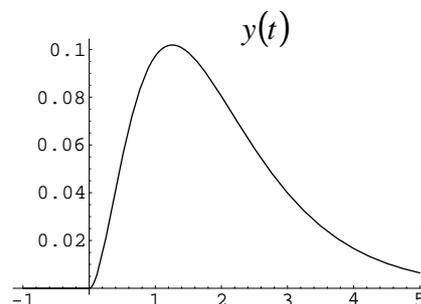
L'andamento di  $y(t)$  è riportato in figura I.

Fig. I

Esercizio N.2

Esiste una classe di sistemi LTI tempo discreto per i quali, dette  $H_1(e^{j\Omega})$  e  $H_2(e^{j\Omega})$  le risposte in frequenza di due qualsiasi di essi, si ha che:

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1(e^{j\Omega}) d\Omega \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_2(e^{j\Omega}) d\Omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1(e^{j\Omega}) H_2(e^{j\Omega}) d\Omega$$

Dire, giustificando la risposta, quale proprietà caratterizza questa classe di sistemi.

Soluzione

Nell'uguaglianza scritta, i due integrali di sinistra corrispondono rispettivamente a  $h_1[0]$  e  $h_2[0]$ , mentre quello di destra rappresenta  $h_1[n] \otimes h_2[n]_{n=0}$ . Quindi si tratta di evidenziare quale proprietà dei due sistemi garantisce l'uguaglianza:

$$h_1[0]h_2[0] = h_1[n] \otimes h_2[n]_{n=0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[-k]$$

Considerando il significato dell'operazione "somma di convoluzione", si conclude che questa relazione è verificata se e solo se i due sistemi sono entrambi causali (oppure entrambi anticausali).

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto ha come risposta impulsiva un segnale sinistro, la cui trasformata Z è:

$$H(z) = \frac{z^{-8} + \frac{1}{2}z^{-2} + z}{z^{-5} + \frac{1}{2}}$$

Dire qual è la regione di convergenza di  $H(z)$  e calcolare i valori di  $h[n]$  per  $n \geq 0$ . Dire inoltre se il sistema è (o non è) stabile.

Soluzione

Poiché  $h[n]$  è un segnale sinistro, la regione di convergenza sarà la parte del piano  $z$  interna a una circonferenza di raggio  $r_0$  con centro nell'origine, esclusa al più l'origine. La funzione  $H(z)$  ha cinque poli di modulo pari a  $\sqrt[5]{2}$  e un polo triplo nell'origine. Quindi la sua regione di convergenza è definita da  $0 < |z| < \sqrt[5]{2}$ . Poiché la

circonferenza di raggio unitario è inclusa in questa regione, il sistema risulta stabile. Attraverso la divisione lunga si vede che:

$$H(z) = \frac{z^{-8} + \frac{1}{2}z^{-2} + z}{z^{-5} + \frac{1}{2}} = z^{-3} - \frac{1}{2}z^2 + \dots$$

Quindi  $h[n] = 0$  per  $n \geq 0$ , tranne che per  $n = 3$ , ove vale 1.

#### Esercizio N. 4

Le realizzazioni di un processo aleatorio sono date dalle funzioni periodiche  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-k)$ , ove  $f(t)$  è la funzione rappresentata in figura 1. In tale figura  $\alpha$  è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 1.

Fissato un istante  $t_0$ , con  $0 \leq t_0 \leq 1$ , si esprima la densità di probabilità del primo ordine  $p_1(x_0, t_0)$ .

Fissati poi due istanti  $t_1$  e  $t_2$ , con  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ , si esprima la densità di probabilità del secondo ordine  $p_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ .

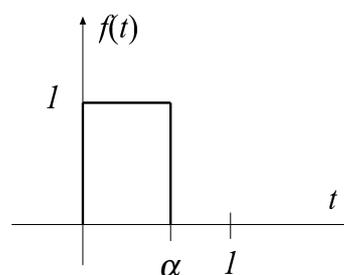


Fig. 1

#### Soluzione

All'istante  $t_0$  il processo diventa una variabile aleatoria che può assumere i valori 0 e 1. Essa assume il valore 0 se  $\alpha < t_0$  ed il valore 1 se  $\alpha$  è compreso tra  $t_0$  e 1. Poiché  $\alpha$  è uniformemente distribuita tra 0 e 1, si avrà:

$$P[x(t_0) = 0] = t_0$$

$$P[x(t_0) = 1] = 1 - t_0$$

La corrispondente densità di probabilità risulta:

$$p_1(x_0, t_0) = t_0 \delta(x_0) + (1 - t_0) \delta(x_0 - 1) \text{ (fig. II)}$$

Scelti due istanti  $t_1$  e  $t_2$ , con  $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ , le corrispondenti variabili aleatorie  $x_1$  e  $x_2$  possono assumere congiuntamente i seguenti valori:

$$1) \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 0$$

$$2) \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 0$$

$$3) \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$

Il primo evento ha probabilità  $t_1$ , il secondo ha probabilità  $t_2 - t_1$  il terzo infine ha probabilità  $1 - t_2$ . Di conseguenza:

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = t_1 \delta(x_1) \delta(x_2) + (t_2 - t_1) \delta(x_1 - 1) \delta(x_2) + (1 - t_2) \delta(x_1 - 1) \delta(x_2 - 1) \quad (\text{fig. III})$$

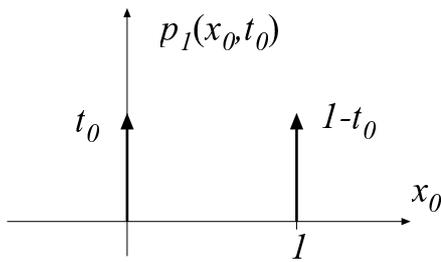


Fig. II

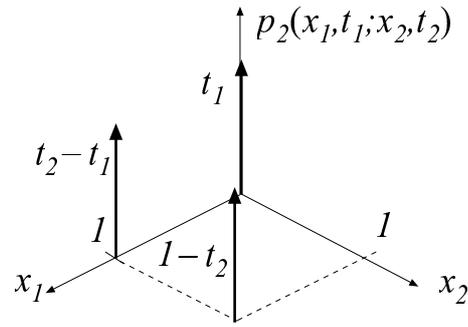


Fig. III

Questo esercizio si presta all'approfondimento di vari concetti, propri dei processi aleatori. Immaginiamo, per maggior generalità, che la variabile aleatoria  $a$  sia uniformemente distribuita tra 0 e  $T$  e che le varie realizzazioni del processo siano date dalla funzione:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(t - kT)$$

Disegniamo alcune realizzazioni del processo: esse si presenteranno come indicato nella figura IV:

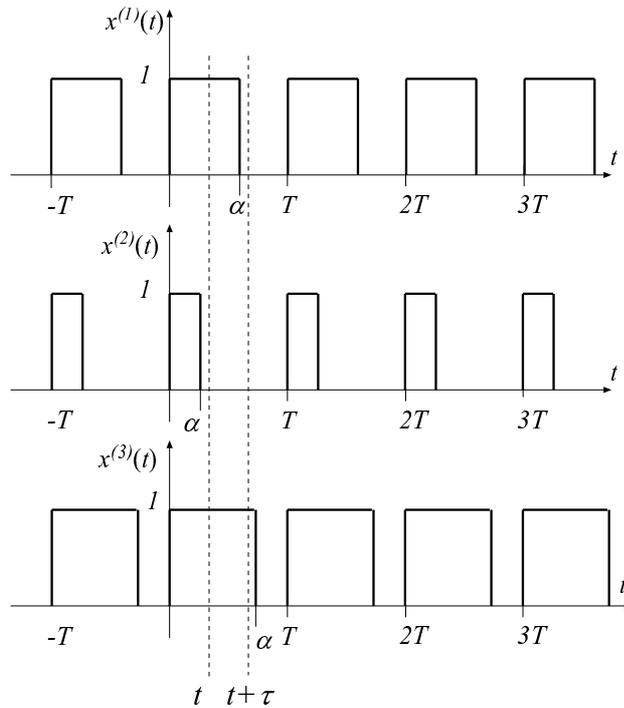


Fig. IV

Osserviamo innanzitutto che ogni realizzazione è una funzione periodica di periodo  $T$ : ciò può far intuire una probabile ciclostazionarietà del processo. Proviamo innanzitutto a calcolare il valor medio del processo  $x(t)$ . Scegliamo, a titolo di esempio, un istante generico  $t$ , compreso tra  $0$  e  $T$ . La variabile aleatoria che nasce all'istante  $t$  può assumere solamente due valori, e precisamente si avrà:

$$x(t) = 0, \quad x(t) = 1.$$

$$P_0 = P[x(t) = 0] = P[\alpha < t] = \frac{t}{T}$$

$$P_1 = P[x(t) = 1] = P[t \leq \alpha < T] = 1 - \frac{t}{T}$$

Per il valor medio  $m_x(t)$ , nell'intervallo  $0 \leq t < T$ , si ha:

$$m_x(t) = 1 - \frac{t}{T}$$

È chiaro che in ogni intervallo  $kT \leq t < (k+1)T$  la situazione si ripete e pertanto il valor medio è periodico in  $t$ . Esso si presenta come in figura V.

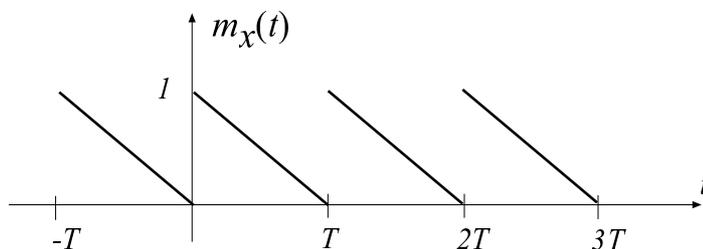


Fig. V

#### Calcolo della funzione di autocorrelazione.

Per il calcolo della funzione di autocorrelazione conviene procedere nel seguente modo. Ricordiamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned} R_x(t, t + \tau) &= E[x(t)x(t + \tau)] = 0 \times P[x(t) = 0, x(t + \tau) = 0] + \\ &\quad + 0 \times P[x(t) = 1, x(t + \tau) = 0] + \Rightarrow \text{oppure} \\ &\quad (+ 0 \times P[x(t) = 0, x(t + \tau) = 1]) + \\ &\quad + 1 \times P[x(t) = 1, x(t + \tau) = 1] = \\ &= \underline{P[x(t) = 1, x(t + \tau) = 1]} \end{aligned}$$

1) Sia  $0 \leq \tau < T$

a) Scegliamo un istante  $t$  tale che  $0 \leq t < T - \tau$ :

$$R_x(t, t + \tau) = P[x(t) = 1, x(t + \tau) = 1] = P[\alpha > t + \tau] = 1 - \frac{t + \tau}{T}$$

b) Se invece  $T - \tau \leq t < T$ :

$$R_x(t, t + \tau) = P[x(t) = 1, x(t + \tau) = 1] = P[\alpha > t] = 1 - \frac{t}{T}$$

c) Questi due andamenti si ripetono evidentemente in ogni intervallo  $nT \leq t < (n+1)T$ . Pertanto per ogni  $0 \leq \tau < T$  la funzione di autocorrelazione è periodica in  $t$ . Essa ha l'andamento riportato in figura VI a.

2) Sia ora  $\tau > T$  e sia  $kT \leq \tau < (k+1)T$ . (con  $k > 0$ )

a) Se è  $0 \leq t < (k+1)T - \tau$  si ha:

$$R_x(t, t+\tau) = P[x(t)=1, x(t+\tau)=1] = P[\alpha > t + \tau - kT] = 1 - \frac{t + (\tau - kT)}{T}$$

b) Se è  $(k+1)T - \tau \leq t < (k+1)T$  invece si ha:

$$R_x(t, t+\tau) = P[x(t)=1, x(t+\tau)=1] = P[\alpha > t] = 1 - \frac{t}{T}$$

c) L'andamento si ripete ogni qualvolta  $t$  aumenta (o diminuisce) di un numero intero di periodi  $T$

L'andamento della funzione di autocorrelazione è identico a prima: in questo caso i valori che caratterizzano le ampiezze della funzione sono quelli indicati in fig. VI b.

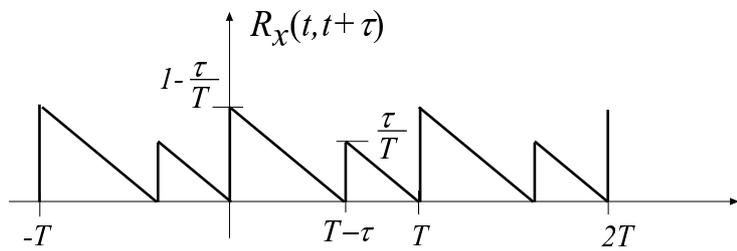


Fig. VI a

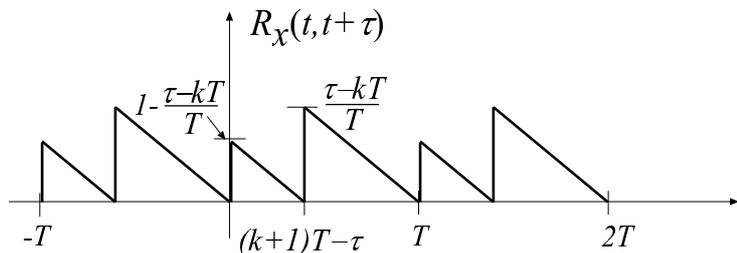


Fig. VI b

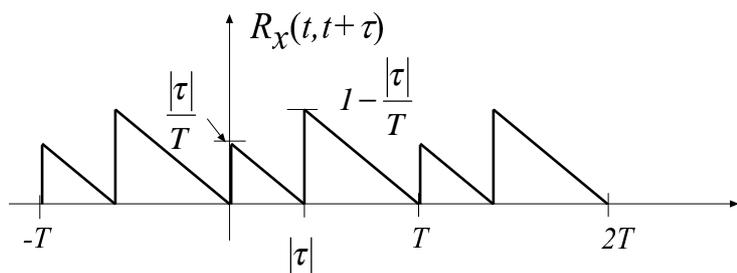


Fig. VI c

3) Sia ora  $\tau < 0$ . Possiamo limitare l'analisi al caso  $0 < |\tau| < T$ :

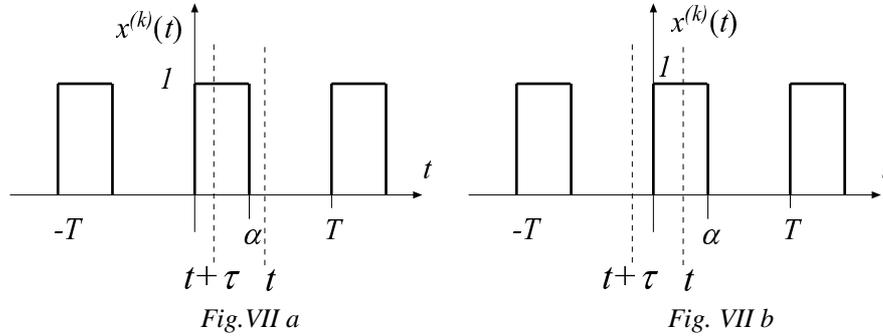
a) Se  $t + \tau > 0$ , cioè se  $t > |\tau|$  (vedi figura VII a),

$$R_x(t, t+\tau) = P[x(t)=1, x(t+\tau)=1] = P[\alpha > t] = 1 - \frac{t}{T}$$

b) se è  $t + \tau < 0$ : (vedi figura VII b)

$$R_x(t, t + \tau) = P[x(t) = 1, x(t + \tau) = 1] = P[\alpha > t + \tau + T] = 1 - \frac{|t + \tau|}{T} = 1 - \frac{|\tau| - t}{T}$$

(l'ultima uguaglianza risulta dal fatto che si è fatta l'ipotesi che  $t + \tau$  sia negativo).  
La funzione di autocorrelazione appare ora come in figura VI c.



E' importante notare che sia per  $\tau > 0$ , sia per  $\tau < 0$ , la funzione di autocorrelazione è, per ogni valore di  $\tau$ , periodica in  $t$ . Quindi il processo è ciclostazionario, almeno in senso lato. Inoltre, per ogni valore di  $t$  essa è periodica in  $\tau$  (si rifletta in particolare sulla figura VI c). Pertanto, se valutiamo il valor medio di  $R_x(t, t + \tau)$  rispetto a  $t$  su un periodo, troveremo una funzione della variabile  $\tau$ , periodica di periodo  $T$ . Infatti tale valor medio è dato dall'area dei due triangoli che caratterizzano  $R_x(t, t + \tau)$  su un periodo, divisa per  $T$ . Quindi sia per  $\tau > 0$ , sia per  $\tau < 0$ , si ha:

$$\bar{R}_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(\tau - kT) \text{ con } r_x(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \left( \frac{(T - |\tau|)^2 + \tau^2}{2T} \right) & \text{per } 0 \leq \tau < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{T^2} - \frac{\tau}{T} \text{ per } 0 \leq \tau < T$$

L'andamento di  $\bar{R}_x(\tau)$  è riportato in figura VIII, per  $T=5$

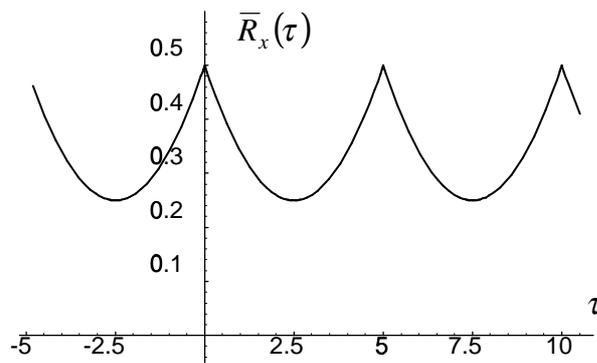


Fig. VIII

### Calcolo della densità spettrale di potenza

La densità spettrale di potenza  $S_x(f)$  può essere calcolata in due modi, e precisamente come trasformata di Fourier di  $\bar{R}_x(\tau)$ , oppure a partire dalle realizzazioni del processo, secondo la definizione di  $S_x(f)$ .

1) Calcolo di  $S_x(f)$  come trasformata di Fourier di  $\bar{R}_x(\tau)$ .

Poiché  $\bar{R}_x(\tau)$  è una funzione periodica, la sua trasformata sarà costituita da una serie di impulsi centrati alle frequenze  $f_n = \pm \frac{n}{T}$ . L'area di ciascun impulso coinciderà con il valore del corrispondente coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier di  $\bar{R}_x(\tau)$ . Quindi:

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{T^2} - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{-j\frac{2n\pi}{T}\tau} d\tau = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{T^2} - \frac{\tau}{T}\right) \cos\left[\frac{2n\pi}{T}\tau\right] d\tau$$

L'integrale è dato dalla somma dei seguenti tre integrali:

$$a) \quad \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \cos\left[\frac{2n\pi}{T}\tau\right] d\tau = \frac{1}{T} \frac{\sin\left[\frac{2n\pi}{T}\tau\right]}{\frac{2n\pi}{T}} \Bigg|_0^{T/2} = 0$$

$$b) \quad \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{\tau^2}{T^2} \cos\left[\frac{2n\pi}{T}\tau\right] d\tau = \frac{2}{T^3} \int_0^{T/2} \tau^2 \cos\left[\frac{2n\pi}{T}\tau\right] d\tau$$

posto:

$$y = \frac{2n\pi}{T}\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{Ty}{2n\pi} \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{T}{2n\pi} dy$$

si ottiene:

$$\frac{1}{4n^3\pi^3} \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy = \frac{1}{4n^3\pi^3} \left\{ \underbrace{y^2 \sin(y)}_{=0} \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} 2y \sin(y) dy \right\} =$$

$$= \frac{-1}{4n^3\pi^3} \left\{ -2y \cos(y) \Big|_0^{n\pi} + \underbrace{\int_0^{n\pi} \cos(y) dy}_{=0} \right\} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -\frac{\tau}{T} \cos\left[\frac{2n\pi}{T} \tau\right] d\tau = \\
 & = \frac{-1}{2n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} y \cos(y) dy = \\
 & = \frac{-1}{2n^2\pi^2} \left\{ \underbrace{y \sin(y)}_0 \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \sin(y) dy \right\} = \frac{-1}{2n^2\pi^2} \left\{ \cos(y) \Big|_0^{n\pi} \right\} = \\
 & = -\frac{(-1)^n}{2n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^2\pi^2}
 \end{aligned}$$

Sommando i tre termini si perviene al seguente risultato:  $c_n = \frac{1}{2n^2\pi^2}$  per  $n \neq 0$

Per  $n=0$  si ha:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} + \frac{\tau^2}{T^2} - \frac{\tau}{T} \right) d\tau = \frac{1}{3}$$

In conclusione la densità spettrale di potenza appare come indicato in figura IX.

2) Calcolo diretto di  $S_x(f)$ .

Poiché le realizzazioni del processo sono funzioni periodiche di periodo  $T$ , ciascuna di esse possederà una sua densità spettrale di potenza, costituita da impulsi centrati in corrispondenza alle frequenze multiple di  $1/T$ , di area pari al quadrato del modulo del corrispondente coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier.

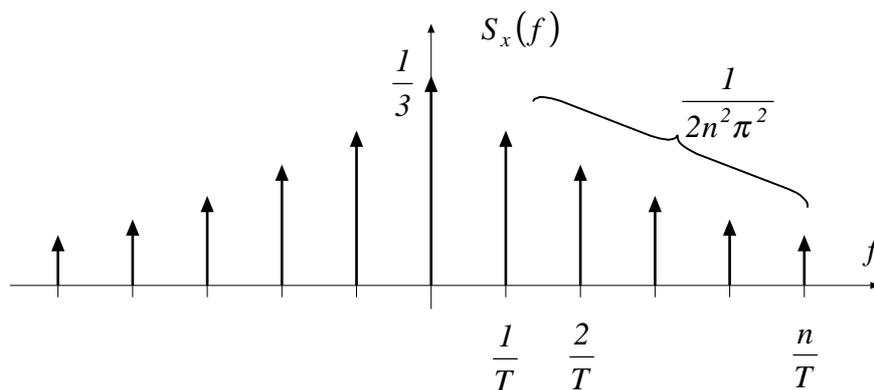


Fig. IX

La densità spettrale di potenza del processo risulterà (per definizione) la media di tutte le densità spettrali di potenza delle singole realizzazioni, fatta sull'insieme delle realizzazioni stesse. Data una realizzazione generica, caratterizzata da un certo valore della variabile aleatoria  $\alpha$ , i suoi coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono:

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha} e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt = \frac{1}{T} \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi n}{T}\alpha}}{j\frac{2\pi n}{T}} = \frac{1}{2n\pi} \left[ \sin\left(\frac{2\pi n}{T}\alpha\right) + j\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\alpha\right) - 1\right) \right]$$

$$|b_n|^2 = \frac{1}{4n^2\pi^2} \left\{ \sin^2\left(\frac{2n\pi}{T}\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2n\pi}{T}\alpha\right) + 1 - 2\cos\left(\frac{2n\pi}{T}\alpha\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi^2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\alpha\right) \right\}$$

In corrispondenza alla frequenza  $n/T$  (con  $n \neq 0$ ) la densità spettrale di potenza del processo presenterà un impulso di area pari al valor medio di insieme di  $|b_n|^2$ . Risulta:

$$E\left[|b_n|^2\right] = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2n^2\pi^2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\alpha\right) \right\} d\alpha = \frac{1}{2n^2\pi^2} \text{ per } n \neq 0$$

Per  $n=0$  la media del valor quadratico medio di ciascuna realizzazione porta al valore  $1/3$ . Come si vede, i due procedimenti portano effettivamente alla stessa espressione per la densità spettrale di potenza.