**ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE**

Appello del 14 settembre 2001

# Prova scritta

## Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)u(t)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale:

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Valutare la risposta del sistema.

# Soluzione

La risposta del sistema è data dalla convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$.

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-\tau)\right)d\tau = -\frac{1}{2}t\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) + \frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) & 0 \le t \le T \\ \int_0^T \sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-\tau)\right)d\tau = -\frac{1}{2}T\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) & t > T \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

## Esercizio N.2

Si consideri la funzione:

$$H(z) = \frac{z + 1 - z^{-3}}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

a) Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto di cui essa può essere la funzione di sistema?
b) Uno di essi avrà come risposta impulsiva un segnale destro: per quale valore di $n$ tale risposta inizia ad essere diversa da zero?
c) Analogamente, da quale valore di $n$ in poi sarà nulla la risposta impulsiva del sistema che ha come risposta impulsiva un segnale sinistro?

## Soluzione

La funzione $H(z)$ ha tre poli, rispettivamente in $z=0$, $z=\frac{1}{2}$ e $z=2$. Essi determinano tre regioni di convergenza e quindi sono tre i sistemi tempo discreto che possono avere $H(z)$ quale funzione di sistema.

Per rispondere ai punti b) e c) è opportuno eseguire la 'divisione lunga' considerando il numeratore e il denominatore di $H(z)$ polinomi in $z$ (segnale destro) ovvero in $z^{-1}$ (segnale sinistro).

Per il segnale destro si ha:

$$H(z)=\frac{z+1-z^{-3}}{z^2-\frac{5}{2}z+1}=z^{-1}+\frac{5}{2}z^{-2}+\frac{11}{4}z^{-3}\cdots$$

Pertanto esso inizia in $n=1$. Per quello sinistro invece risulta:

$$H(z)=\frac{-z^{-3}+1+z}{1-\frac{5}{2}z+z^2}=-z^{-3}-\frac{5}{2}z^{-2}-\frac{21}{4}z^{-1}\cdots$$

Di conseguenza esso diventa nullo da $n=4$ in poi.

## Esercizio N. 3

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale tempo discreto:

$$x[n]=\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{N}n\right) & |n|\le\frac{N}{2}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

in cui $N$ è un intero pari.

## Soluzione

Applicando pedestremente la formula che definisce la trasformata di Fourier per segnali tempo discreto risulta:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-N/2}^{+N/2}\cos\left(\frac{\pi}{N}n\right)e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-N/2}^{+N/2}\left\{e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{N}\right)n}+e^{-j\left(\omega+\frac{\pi}{N}\right)n}\right\}$$

Si ponga $m=n+\frac{N}{2}$, in modo da ottenere una sommatoria che parta da $m=0$:

$$X\left(e^{jW}\right)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}\left\{e^{-j\left(W-\frac{p}{N}\right)m}e^{j\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{N}{2}}+e^{-j\left(W+\frac{p}{N}\right)m}e^{j\left(W+\frac{p}{N}\right)\frac{N}{2}}\right\}$$

per quanto concerne la prima sommatoria, essa risulta:

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}e^{-j\left(W-\frac{p}{N}\right)m}e^{j\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{N}{2}}=\frac{1}{2}e^{j\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{N}{2}}\frac{1-e^{-j\left(W-\frac{p}{N}\right)(N+1)}}{1-e^{-j\left(W-\frac{p}{N}\right)}}$$

Indicando per semplicità con $a$ la quantità $W-\dfrac{p}{N}$:

$$\frac{1}{2}e^{ja\frac{N}{2}}\frac{1-e^{-ja(N+1)}}{1-e^{-ja}}=\frac{1}{2}e^{ja\frac{N}{2}}e^{-ja\frac{N+1}{2}}\frac{\left(e^{ja\frac{N+1}{2}}-e^{-ja\frac{N+1}{2}}\right)}{e^{-j\frac{a}{2}}\left(e^{j\frac{a}{2}}-e^{-j\frac{a}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin\left\{\frac{a(N+1)}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\sin\left\{\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{(N+1)}{2}\right\}}{\sin\left(\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{1}{2}\right)}$$

Analogamente, per la seconda sommatoria si trova:

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}e^{-j\left(W+\frac{p}{N}\right)m}e^{j\left(W+\frac{p}{N}\right)\frac{N}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\sin\left\{\left(W+\frac{p}{N}\right)\frac{(N+1)}{2}\right\}}{\sin\left(\left(W+\frac{p}{N}\right)\frac{1}{2}\right)}$$

In definitiva si avrà:

$$X\left(e^{jW}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left\{\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{(N+1)}{2}\right\}}{\sin\left(\left(W-\frac{p}{N}\right)\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}\frac{\sin\left\{\left(W+\frac{p}{N}\right)\frac{(N+1)}{2}\right\}}{\sin\left(\left(W+\frac{p}{N}\right)\frac{1}{2}\right)}$$

In figura I è indicato l'andamento di $X\left(e^{jW}\right)$ per $N=12$.

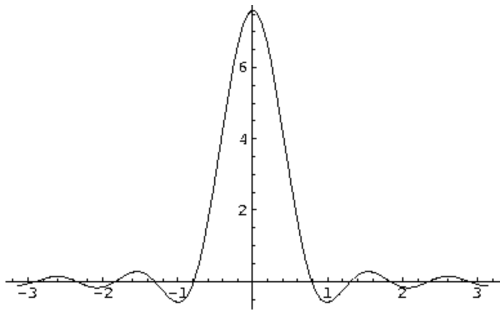


Fig. I

Esercizio N. 4

Il processo aleatorio stazionario gaussiano $x(t)$ ha media nulla e varianza $\sigma^2$. Esso è applicato ad un raddrizzatore lineare in mezz'onda, la cui relazione uscita-ingresso è:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$$

Calcolare il valore medio del processo di uscita $y(t)$.

## Soluzione

Il processo $x(t)$ ha la seguente densità di probabilità del I° ordine:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Pertanto il processo di uscita avrà una densità di probabilità data da:

$$p_y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} u(y)$$

Il suo valor medio è calcolabile come:

$$m_y = \int_0^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

Posto $v = \dfrac{y^2}{2\sigma^2}$, l'integrale diventa:

$$m_y = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-v} dv = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$