Provetta di *TEORIA DEI SEGNALI*

20 dicembre 2001

Esercizio N. 1

Nell'80% delle sue lezioni un professore arriva in perfetto orario e la sua lezione inizia con un ritardo $T = 0$. Nelle restanti lezioni egli arriva in ritardo, ed il ritardo con cui inizia la lezione è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 300 s. Calcolare e disegnare la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile aleatoria T.

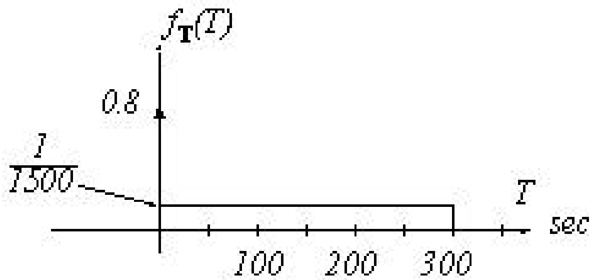
Soluzione

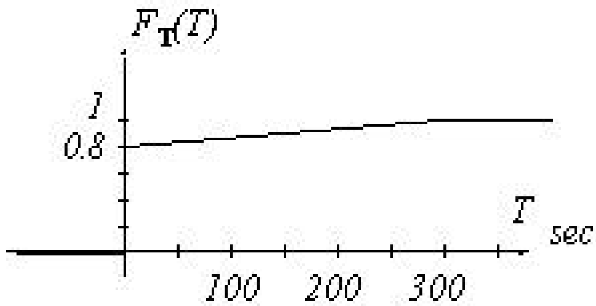
La variabile aleatoria assume il valore 0 con probabilità 0.8. Assume poi valori distribuiti tra 0 e 300 secondi in modo uniforme. Pertanto in tale intervallo la sua densità di probabilità è una funzione costante, il cui integrale da 0 a 300 deve dare 0.2. La densità di probabilità è dunque:

$$f_{\mathbf{T}}(T) = 0.8\delta(T) + \frac{1}{1500}\left[u(T) - u(T-300)\right]$$

La funzione di distribuzione è pari a:

$$F_{\mathbf{T}}(T) = \int_{-\infty}^{T} f_{\mathbf{T}}(\alpha)d\alpha = \begin{cases} 0 & T < 0 \\ \dfrac{1}{1500}T + 0.8 & 0 \le T < 300 \\ 1 & T \ge 300 \end{cases}$$





Esercizio N. 2

In una trasmissione dati binaria, con i bit 0 e 1 equiprobabili, ogni parola è composta da 6 bit. Qual è la probabilità che venga trasmessa:

a) una parola con il terzo bit pari a 1;
b) una parola il primo bit 1 in terza posizione;

c) una parola con nessun bit *1* nelle prime tre posizioni.

Soluzione:

a) Il numero totale di parole distinte (che per inciso è $2^6 = 64$) è composto per metà da parole che nella terza posizione hanno un *1* e per metà da parole che nella terza posizione hanno uno *0*. Dunque la probabilità richiesta è *0.5*.
b) Una parola con il primo bit in terza posizione inizia con la sequenza 001. Gli altri tre bit possono essere qualsiasi. Quindi le parole totali che soddisfano questa condizione sono in numero pari a $2^3 = 8$. La generica parola ha probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^6$, e pertanto la probabilità cercata è pari a $8\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$.
c) Le parole con nessun bit nelle prime tre posizioni devono iniziare con la sequenza *000*. Gli altri tre bit possono essere qualsiasi: anche in questo caso le possibili parole che soddisfano il requisito sono in numero di *8* e la probabilità cercata è nuovamente $\frac{1}{8}$.

Esercizio N. 3

Una variabile aleatoria ha la seguente funzione di distribuzione:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ (x+5)/8 & -5 \le x < -3 \\ 1/4 & -3 \le x < 3 \\ 1/4 + 3(x-3)/8 & 3 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

a) disegnare con cura la funzione $F_{\mathbf{X}}(x)$;
b) disegnare con cura la densità di probabilità $f_{\mathbf{X}}(x)$;
c) calcolare il valor medio di **X** e la sua varianza.

Soluzione:

In figura 1 è riportata la funzione $F_{\mathbf{X}}(x)$, mentre la figura 2 illustra l'andamento di $f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{dF_{\mathbf{X}}(x)}{dx}$

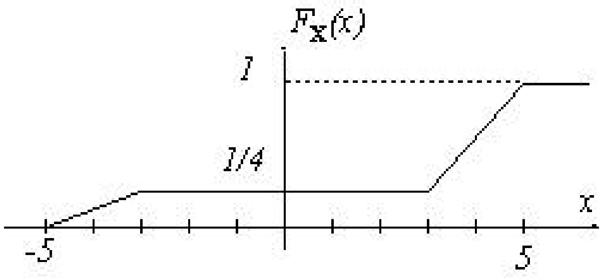


Fig. 1

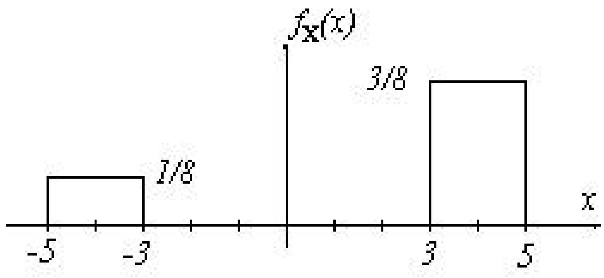


Fig. 2

Il valor medio di X risulta:

$$E\{X\} = \int_{-5}^{-3} \frac{1}{8} x dx + \int_{3}^{5} \frac{3}{8} x dx = 2$$

mentre la varianza è:

$$\sigma^2 = \int_{-5}^{-3} \frac{1}{8} (x-2)^2 dx + \int_{3}^{5} \frac{3}{8} (x-2)^2 dx = \frac{37}{3}$$

Esercizio N. 4

Il processo aleatorio $x(t)$ è stazionario ed ha una densità spettrale bilatera di potenza costante pari a 1 mW/Hz nella banda di frequenze $|f| \le 5$ KHz e nulla altrove. Calcolare il valor medio del processo e la potenza media portata mediamente dalle componenti sinusoidali del processo aventi frequenze comprese tra 2 e 3 KHz.

Soluzione

Il valor medio del processo è certamente nullo: altrimenti la sua densità spettrale di potenza presenterebbe un impulso ideale a frequenza $f = 0$. Per quanto riguarda la potenza portata da componenti sinusoidali con frequenza tra f_1 e f_2, questa è ottenibile integrando tra le due frequenze la densità spettrale unilatera di potenza, che ha valore doppio rispetto a quella bilatera. Pertanto la potenza richiesta è pari a 2 W.

Esercizio N. 5

A partire dal processo aleatorio $x(t)$ dell'esercizio N. 4, si costruiscano i seguenti processi aleatori:

a) $y_1 = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ ove f_0 è una costante;

b) $y_2 = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, ove f_0 è una costante e φ è una variabile aleatoria indipendente dal processo $x(t)$ e uniformemente distribuita tra 0 e 2π;

Calcolare il valor medio e la funzione di autocorrelazione dei due processi aleatori y_1, y_2 e dire se sono o meno stazionari in senso lato.

Soluzione

a) $E\{y_1(t)\} = E\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = E\{x(t)\}\cos(2\pi f_0 t) = 0 \quad \forall t$

$$R_{y_1}(t, t+\tau) = E\{y_1(t)y_1(t+\tau)\} = E\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)x(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau))\}$$
$$= E\{x(t)x(t+\tau)\}\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t+\tau))$$
$$= \frac{1}{2}R_x(\tau)[\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)]$$

Questa funzione, per ogni valore di τ, è periodica in t. Tenendo conto anche del valore medio del processo, si conclude che $y_1(t)$ è un processo aleatorio ciclostazionario.

b) $E\{y_2(t)\} = E\{x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = E\{x(t)\}E\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = 0 \quad \forall t$

$$R_{y_2}(t, t+\tau) = E\{y_2(t)y_2(t+\tau)\}$$
$$= E\{x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)x(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau) + \varphi)\}$$
$$= E\{x(t)x(t+\tau)\}E\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cos(2\pi f_0(t+\tau) + \varphi)\}$$
$$= \frac{1}{2}R_x(\tau)E[\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\varphi) + \cos(2\pi f_0 \tau)]$$

Il valor medio che appare nell'ultima espressione è fatto su una variabile aleatoria a sua volta funzione della variabile aleatoria φ. Quest'ultima è distribuita uniformemente tra 0 e 2π e pertanto la sua densità di probabilità è pari a $1/2\pi$ tra 0 e 2π e nulla altrove. Pertanto:

$$E[\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\varphi) + \cos(2\pi f_0 \tau)]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\varphi) + \cos(2\pi f_0 \tau)\}d\varphi = \cos(2\pi f_0 \tau)$$

In conclusione:

$$R_{y_2}(t, t+\tau) = \frac{1}{2}R_x(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$$

Il processo $y_2(t)$ è stazionario.

Nelle espressioni viste $R_x(\tau) = 10\,\text{sinc}(10^4\tau)$ W.