Teoria dei Segnali
(Appello del 18 aprile 2002)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Si consideri il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k rect\left[\frac{t-k2T}{T}\right]$$

il cui andamento è accennato in figura 1.

Si calcoli il valore della sua trasformata di Fourier per $f = \frac{1}{2T}$.

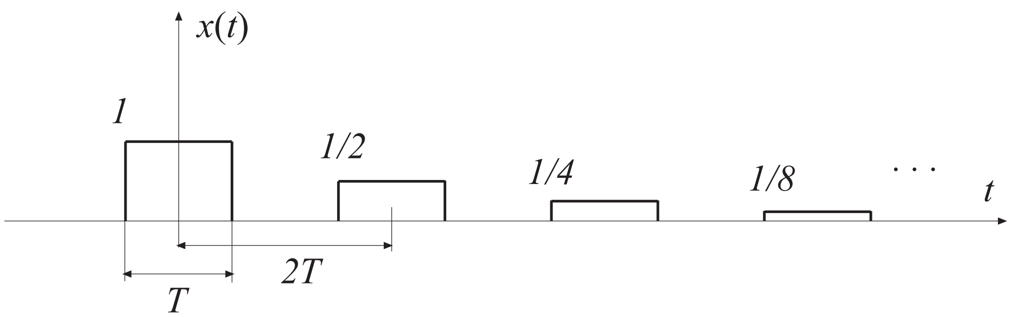

Fig. 1

Soluzione

Sfruttando la linearità della trasformata di Fourier e la sua proprietà di traslazione temporale, si trova:

$$X(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k F\left\{\text{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\right\} e^{-jk2\pi f 2T} = F\left\{\text{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\right\} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j4\pi fT}\right)^k$$

Ricordando che:

$$F\left\{\text{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\right\} = T\frac{sin(\pi fT)}{\pi fT} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j4\pi fT}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j4\pi fT}}$$

risulta:

$$X\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{4T}{\pi}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Disegnare con cura la risposta del sistema al segnale disegnato in figura 2.

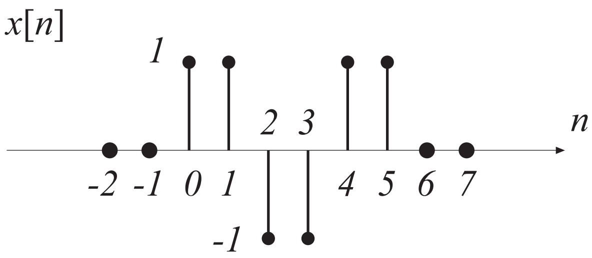

Fig. 2

Soluzione

Un sistema LTI con risposta impulsiva $\delta[n]$ è il sistema ‘identità’: esso risponde al segnale $x[n]$ con il segnale $x[n]$.

Pertanto la risposta cercata sarà pari a $x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$, che presenta l’andamento riportato in figura I.

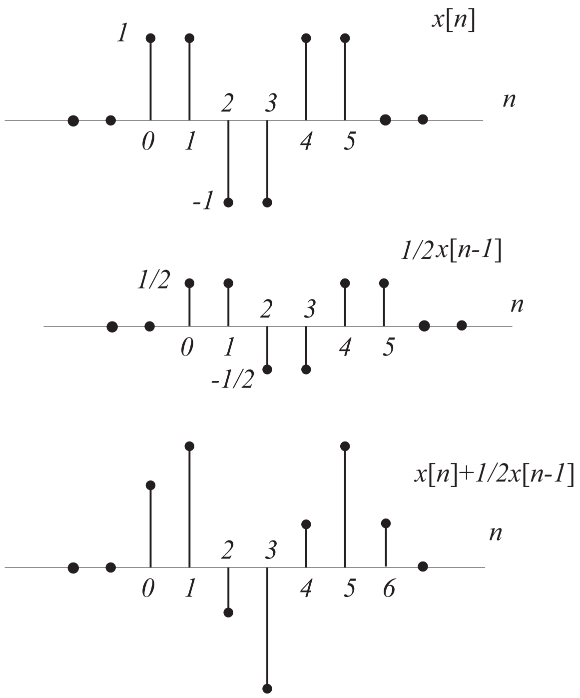

Fig. I

Esercizio N. 3

Una sinusoide di frequenza f_0 si dice *modulata di fase* con il segnale $m(t)$ se la sua espressione analitica è:

$$s(t) = A\cos[2\pi f_0 t + \phi_M m(t)]$$

essendo ϕ_M una costante.

Dire qual è l'inviluppo complesso di $s(t)$ e chi sono le sue parti in fase e in quadratura.

Soluzione

Sviluppando la funzione cos si possono facilmente individuare la parte in fase e quella in quadratura del segnale $s(t)$:

$$s(t) = A\cos(\phi_M m(t))\cos[2\pi f_0 t] - A\sin(\phi_M m(t))\sin[2\pi f_0 t]$$

Questa non è nient'altro che la forma canonica del segnale $s(t)$. E' evidente che:

parte in fase = $A\cos(\phi_M m(t))$

parte in quadratura = $A\sin(\phi_M m(t))$

inviluppo complesso = $Ae^{j\phi_M m(t)}$

Esercizio N. 4

Due treni arrivano totalmente a caso in stazione tra le 8 e le 8.20. Il treno A si ferma 4 minuti, il treno B si ferma 5 minuti. Sapendo che il treno A è arrivato prima del treno B, calcolare la probabilità che i due treni siano presenti contemporaneamente in stazione.

Soluzione

I due treni arrivano totalmente a caso: le due variabili aleatorie:

X_A = istante di arrivo del treno A, misurato a partire dalle ore 8,

X_B = istante di arrivo del treno B, misurato a partire dalle ore 8,

sono uniformemente distribuite sull'intervallo $[0-20]$. Esse sono anche indipendenti, per cui la loro densità di probabilità congiunta è:

$$p_{X_A X_B} = \begin{cases} \dfrac{1}{400} & 0 \le X_A \le 20, \;\; 0 \le X_B \le 20 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

I punti del quadrato rappresentato in figura II costituiscono delle possibili coppie di valori degli istanti di arrivo dei due treni. Il triangolo tratteggiato corrisponde all'evento {A arriva prima di B}, mentre il doppio trapezio corrisponde all'evento: { A e B si incontrano}. Dalla definizione di probabilità condizionata si ricava:

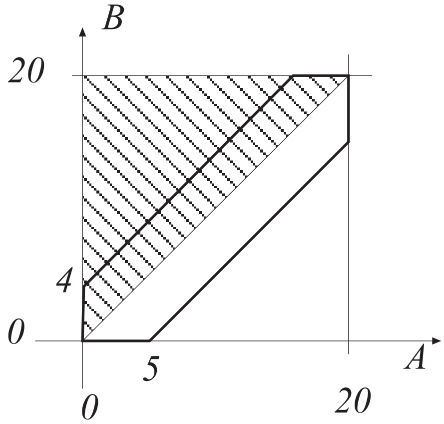

Fig. II

$$P\{\text{ A e B si incontrano/A prima di B}\} = \frac{P\{\text{A e B si incontrano} \cap \text{A prima di B}\}}{P\{\text{A prima di B}\}}$$

$$= \frac{\text{Area trapezio superiore} \times \dfrac{1}{400}}{\text{Area triangolo} \times \dfrac{1}{400}} = \frac{\text{Area trapezio superiore}}{\text{Area triangolo}} = \frac{72}{200} = 0.36$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario gaussiano ha un valor medio pari a $\sqrt{2}$ e una varianza pari a 2. Quanto vale il suo valore quadratico medio?

La sua densità spettrale di potenza è:

$$S_x(f) = e^{-\alpha|f|}$$

Quanto vale la costante α ?

Soluzione

Dalla relazione: $E[x^2] = \sigma_x^2 + m_x^2$, risulta $E[x^2] = 4 + 2 = 6$.

Tale valore quadratico medio corrisponde anche alla potenza media, pari a:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|f|}df = \frac{2}{\alpha}$$

Affinché tale integrale sia pari a *6,* α deve essere pari a $1/3$.

Esercizio N. 6

Il processo aleatorio dell'esercizio N. 5 viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \frac{1}{T}$, ottenendo così una successione di variabili aleatorie x_n, $n = (-\infty, +\infty)$.

Calcolare $E[x_n]$ e $R_x(m,n) = E[x_m x_n]$. Dire (giustificando la risposta) se $R_x(m,n)$ può essere scritta come $R_x(k)$, con $k = n - m$.

Soluzione

Il processo è stazionario: pertanto $E[x_n]$ non dipende dall'indice n ed è pari al valore medio del processo aleatorio, cioè $E[x_n] = \sqrt{2}$.

Per quanto riguarda $R_x(m,n)$, si ha:

$$R_x(m,n) = E[x_m x_n] = E[x(mT)x(nT)] = R_x(mT, nT) = R_x((n-m)T)$$

La funzione di autocorrelazione può essere valutata come antitrasformata della densità spettrale di potenza:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{3}|f|} e^{j2\pi f\tau} df = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + 4\pi^2\tau^2}$$

$$R_x((n-m)T) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + 4\pi^2(n-m)^2 T^2} = \frac{6}{1 + 36\pi^2 k^2 T^2}$$

Grazie alla stazionarietà del processo, $R_x(m,n)$ può essere scritta come $R_x(k)$, con $k = n - m$.