ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Appello del 18 luglio 2002

Prova scritta

Esercizio N. 1

Se $X(f)$ è la trasformata di Fourier del segnale riportato in figura 1a, qual è la trasformata di Fourier del segnale mostrato in figura 1b?

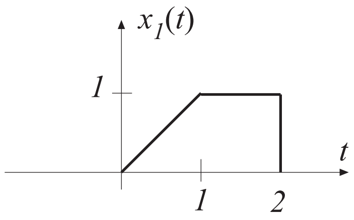

Fig. 1a

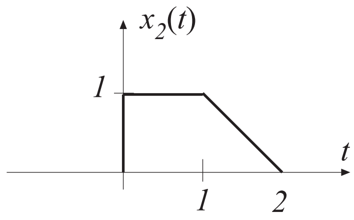

Fig. 1b

Soluzione

Poichè $x_2(t) = x_1(2-t)$, per note proprietà della trasformata di Fourier di segnali reali si ha:

$X_2(f) = X_1^*(f)e^{-j4\pi f}$ o, equivalentemente, $X_2(f) = X_1(-f)e^{-j4\pi f}$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto risponde all'impulso unitario con la funzione $\cos(\pi n)u[n]$, disegnata in figura 2. Qual è la risposta al gradino unitario?

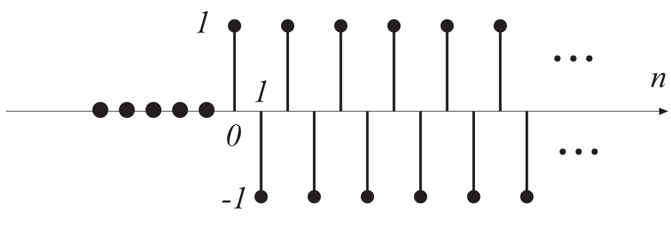

Fig. 2

Soluzione

La risposta $y[n]$ sarà la somma di convoluzione tra il gradino unitario e la risposta impulsiva del sistema. Pertanto:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{per } n < 0 \\ 1 & \text{per } n \geq 0 \text{ e pari} \\ 0 & \text{per } n > 0 \text{ e dispari} \end{cases}$$

(vedi figura I)

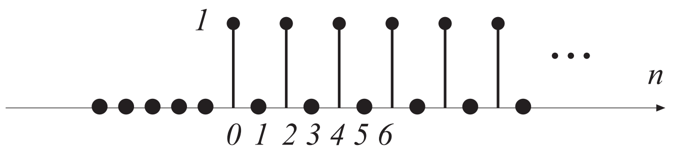

Fig. I

Esercizio N. 3

Il segnale periodico di figura 3 ha periodo $T_0 = 1\ \mu s$. Esso viene campionato con un periodo di campionamento $T_s = 10.25\ \mu s$. Il segnale campionato è convertito in un segnale tempo discreto $x[n]$ che risulterà periodico (*di quale periodo?*). Calcolare il suo sviluppo in serie di Fourier.

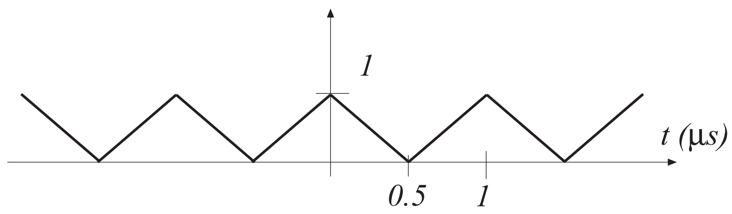

Fig. 3

Soluzione

Grazie alla periodicità del segnale di figura 3, il segnale campionato sarà costituito da una sequenza di impulsi aventi gli stessi valori di quelli che si otterrebbero campionando il segnale con periodo di campionamento pari a $0.25\ \mu s$, solamente distanziati di 10.25 μs. (figura II).

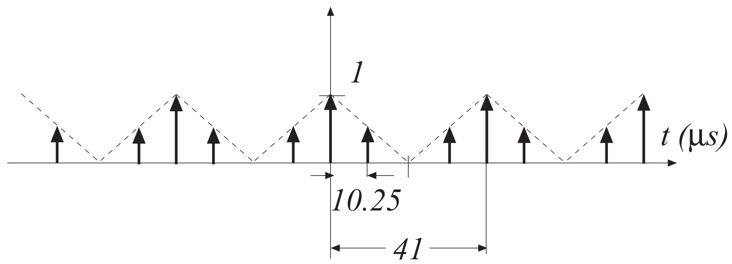

Fig. II

Il relativo segnale tempo discreto è periodico di periodo 4. I coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier risultano essere:

$$c_k = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}e^{jk\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left\{1 + \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \quad c_1 = \frac{1}{4} \quad c_2 = 0 \quad c_3 = \frac{1}{4}$$

Esercizio N. 4

Un giocatore si reca con 63 euro ad un Casinò, ove si può giocare solamente alla roulette, e solamente a rosso e nero. Egli adotta la seguente strategia: inizia a puntare 1 euro, se perde ne punta 2, se perde ancora ne punta 4 e così via. Appena ottiene una vincita se ne va a casa. Qual è il valor medio della somma con cui va a casa? (*si trascuri la presenza dello 0*)

Soluzione

Il giocatore può fare al massimo 6 puntate. Se perde sempre, va a casa a mani vuote. Questo evento si verifica con una probabilità pari a $\left(\frac{1}{2}\right)^6$. Se in una delle 6 puntate vince, va a casa con 64 euro. La probabilità di vincita è pari a $1-\left(\frac{1}{2}\right)^6$. Pertanto il valor medio della somma con la quale va a casa è:

$$64 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right] + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 2^6 - 1 = 63$$

Esercizio N. 5

Si consideri il processo aleatorio la cui generica realizzazione è:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

con A e ϕ due variabili aleatorie indipendenti. La variabile A può assumere solamente i valori $+1$ e -1, ciascuno con probabilità pari a $1/2$. La variabile ϕ è distribuita uniformemente tra 0 e π. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione

La regolarità del processo va valutata sulla base delle medie temporali delle varie realizzazioni. Il valor medio temporale di qualsiasi realizzazione è ovviamente nullo. Per quanto concerne la funzione di autocorrelazione temporale, risulta:

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A^2 \cos(\omega_0 t + \phi) \cos[\omega_0 (t + \tau) + \phi] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2} A^2 \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + \phi) dt + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega_0 \tau) dt$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega_0 \tau)$$

Tale funzione è la stessa sia se $A=1$ sia se $A=-1$; inoltre non dipende dalla variabile ϕ. Pertanto essa è la stessa per qualsiasi realizzazione: il processo è dunque regolare, almeno in senso debole.

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio $\{x(t)\}$stazionario gaussiano ha valor medio nullo e funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$. Calcolare il valor medio del processo così definito:

$$y(t) = [x(t+1) - x(t-1)]^2$$

Soluzione

Per il valor medio del processo vale la seguente relazione:

$$E\left[(y(t))^2\right] = E\left\{[x(t+1)]^2\right\} + E\left\{[x(t-1)]^2\right\} - 2E\{x(t+1)x(t-1)\}$$

$$= 2R_x(0) - 2R_x(4) = 8\left(1 - e^{-4}\right)$$