ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Appello del 18 novembre 2002

Prova scritta

Esercizio N. 1

Il segnale periodico di figura 1a è applicato all'ingresso di un filtro con risposta in frequenza indicata in figura 1b. Qual è il segnale all'uscita del filtro?

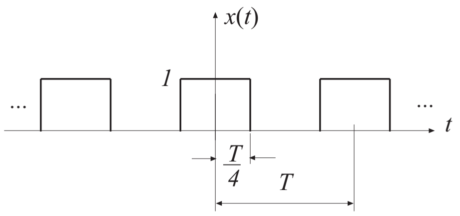

Fig. 1a

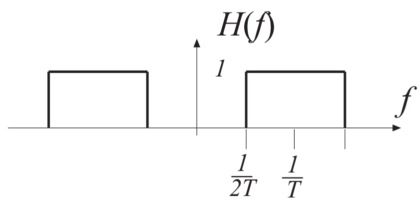

Fig. 1b

Soluzione

Il segnale periodico $x(t)$ ha componenti armoniche alle frequenze $\frac{k}{T}$. Attraverso il filtro passerà solamente la prima armonica. Pertanto il segnale di uscita sarà una sinusoide a frequenza $\frac{1}{T}$, definita da:

$$y(t) = c_1 e^{j2\pi\frac{t}{T}} + c_{-1} e^{-j2\pi\frac{t}{T}} = 2\,\mathrm{Re}\left\{c_1 e^{j2\pi\frac{t}{T}}\right\}$$

La soluzione dell'esercizio richiede pertanto solamente il calcolo del primo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$.

$$c_1 = \frac{1}{T} F\{g(t)\}\Big|_{f=\frac{1}{T}}$$

essendo $g(t)$ la funzione raffigurata in figura I.

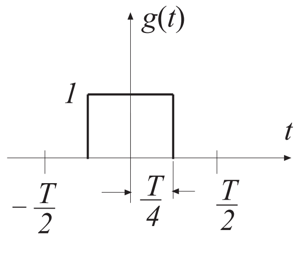

Fig. I

$$F\{g(t)\} = \frac{T}{2} \frac{\sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)}{\pi f \frac{T}{2}}$$

$$c_1 = \frac{1}{T} F\{g(t)\}\Big|_{f=\frac{1}{T}} = \frac{1}{\pi}$$

Il segnale all'uscita del filtro è dunque $y(t) = \frac{2}{\pi}\cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right)$

Esercizio N. 2

Qual è la trasformata di Fourier del segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$?

Dopo averla calcolata , individuare il segnale $y[n]$ che ha per trasformata la funzione $Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$.

(Conviene risalire da questa espressione alla serie di potenze corrispondente, traendo ispirazione dalla risposta alla prima domanda dell'esercizio)

Soluzione

La trasformata di $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ è pari a $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$.

Questa espressione suggerisce che la $Y\left(e^{j\Omega}\right)$ è pari a $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\Omega}\right)^n$. Per trasformarla in una trasformata di Fourier del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ conviene fare il cambiamento di variabile $m = -n$:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}e^{j\Omega}\right)^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^m e^{-j\Omega m}$$

Posta in questa forma, si vede che $Y\left(e^{j\Omega}\right)$ è la trasformata di Fourier del segnale $y[n] = 2^n u[-n]$.

Esercizio N. 3

Si consideri il segnale passa banda $s(t) = 2\cos[(\omega_0 + \Omega)t] + \sin[(\omega_0 - \Omega)t]$. Qual è il suo inviluppo complesso relativo a ω_0 ?

Soluzione

Sviluppando le funzioni coseno e seno si possono facilmente individuare la parte in fase e quella in quadratura del segnale $s(t)$:

$$s(t) = 2\cos(\Omega t)\cos[\omega_0 t] - 2\sin(\Omega t)\sin[\omega_0 t] + \cos(\Omega t)\sin[\omega_0 t] - \sin(\Omega t)\cos[\omega_0 t]$$
$$s(t) = \{2\cos(\Omega t) - \sin(\Omega t)\}\cos[\omega_0 t] - \{2\sin(\Omega t) - \cos(\Omega t)\}\sin[\omega_0 t]$$

Quest'ultima espressione costituisce la forma canonica di $s(t)$. Isolando la parte in fase e quella in quadratura si ricava:

$$\tilde{s}(t) = \{2\cos(\Omega t) - \sin(\Omega t)\} + j\{2\sin(\Omega t) - \cos(\Omega t)\}$$
$$\tilde{s}(t) = 2e^{j\Omega t} - je^{-j\Omega t}$$

Esercizio N. 4

Su un tavolo ci sono 10 carte coperte, numerate da 1 a 10. Ne vengono scelte 3. Qual è la probabilità che la terza carta estratta abbia un valore maggiore delle prime due?

Soluzione

Il problema non richiede calcoli complessi per la sua soluzione. I casi possibili sono solamente tre:

a) la prima carta ha il punteggio più alto,
b) la seconda carta ha punteggio più alto;
c) la terza carta ha il punteggio più alto.

E' facile rendersi conto che questi tre eventi sono equiprobabili, per cui la probabilità richiesta è $1/3$.

Esercizio N. 5

Si consideri il processo così legato all'esperimento del lancio di una moneta: all'uscita 'testa' corrisponde la funzione $\cos(\omega_0 t)$, alla 'croce' corrisponde la funzione $-\cos(\omega_0 t)$.

Dire se, almeno in senso lato, il processo è:

- stazionario
- ciclostazionario
- regolare
- ergodico

Soluzione

a) Valore medio del processo.

$$E[x(t)] = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) = 0 \quad \text{indipendente da } t$$

b) Funzione di autocorrelazione

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)\cos[\omega_0 (t+\tau)] + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)\cos[\omega_0 (t+\tau)] =$$

$$= \cos(\omega_0 t)\cos[\omega_0 (t+\tau)] = \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Periodica rispetto a t per ogni valore di τ : il processo è ciclostazionario

c) Valore medio temporale della realizzazione $\cos(\omega_0 t)$:

$$\langle \cos(\omega_0 t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\omega_0 t) dt = 0$$

stesso per la realizzazione $-\cos(\omega_0 t)$

d) Autocorrelazione temporale:

Realizzazione $\cos(\omega_0 t)$

$$\Re_x(t, t+\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

stesso risultato per la realizzazione $-\cos(\omega_0 t)$

Il processo è regolare, almeno in senso lato.

e) Il processo, non essendo stazionario, non può essere ergodico

Esercizio N. 6

All'ingresso del sistema LTI di figura 2 è posto un processo aleatorio stazionario con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$. Ricavare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

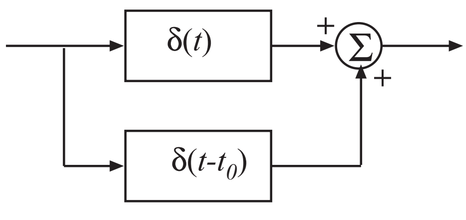

Fig. 2

Soluzione

La funzione di autocorrelazione del processo di uscita è data da: $R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$. Poiché $h(t) = \delta(t) + \delta(t+\tau)$, risulta:

$$h(\tau) \otimes h(-\tau) = \delta(\tau + t_0) + 2\delta(\tau) + \delta(\tau - t_0)$$

Pertanto si avrà:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau + t_0) + 2R_x(\tau) + R_x(\tau - t_0) = e^{-\frac{1}{2}|\tau + t_0|} + 2e^{-\frac{1}{2}|\tau|} + e^{-\frac{1}{2}|\tau - t_0|}$$