Teoria dei Segnali

(Appello del 9 gennaio 2003)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La risposta impulsiva di un sistema LTI tempo continuo è:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t - kT)$$

Determinare il valore della sua risposta in frequenza in corrispondenza alla frequenza $f = \frac{1}{T}$.

Soluzione

La trasformata di Fourier di $h(t)$ è pari a $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-j2\pi f kT}$, che, in corrispondenza a $f = \frac{1}{T}$, diventa $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Pertanto $H(f)\Big|_{f=\frac{1}{T}} = 2.$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto risponde all'impulso unitario con la funzione

$$h[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

Si calcoli la sua risposta in frequenza (*si consiglia di sfruttare una opportuna proprietà della trasformata di Fourier*).

Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n] = \cos(6\pi n)$?

Soluzione

La funzione $h[n]$ è del tipo $nx[n]$, con $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$. La proprietà della trasformata di Fourier che conviene sfruttare è la seguente:

$$x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$nx[n] \leftrightarrow j\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}$$

Si calcoli dapprima la trasformata di $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}e^{-j\Omega n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\Omega n}=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}e^{j\Omega m}-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\Omega n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}-1=\frac{2-\cos(\Omega)}{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}-1$$

$$=\frac{2-\cos(\Omega)-\frac{5}{4}+\cos(\Omega)}{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}$$

La trasformata di Fourier di $h[n]$ è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=j\frac{-\frac{3}{4}\sin(\Omega)}{\left(\frac{5}{4}-\cos(\Omega)\right)^{2}}$$

Per $\Omega=6\pi$ essa vale zero. Pertanto al segnale di ingresso $x[n]=\cos(6\pi n)$ il sistema risponderà con un segnale nullo.

Esercizio N. 3

Un segnale $x(t)$ con banda limitata alla frequenza f_M viene campionato con la sequenza impulsiva ideale $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)$, con $T_s=\frac{1}{f_M}$. Poiché la condizione di Nyquist ($T_s\leq\frac{1}{2f_M}$) non è verificata, non sarà possibile ricostruire esattamente il segnale attraverso un filtraggio di tipo passa basso eseguito sul segnale campionato.

Si decide allora di inviare il segnale campionato $x_p(t)$ in un sistema LTI che fornisca in uscita una versione approssimata di $x(t)$, consistente nel mantenere il valore del campione i-esimo tra gli istanti iT_s e $(i+1)T_s$, come indicato in figura1. Quale deve essere la risposta in frequenza del filtro che fornisce tale versione approssimata di $x(t)$?

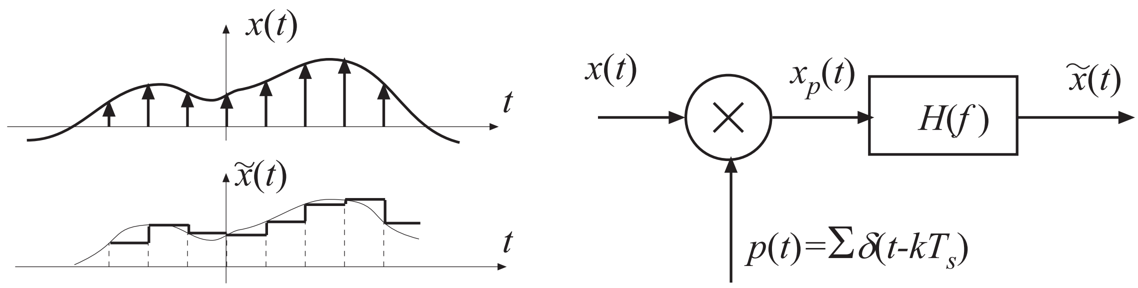

Fig. 1

Soluzione

Dalla figura 1 risulta che la risposta impulsiva del filtro deve essere pari a $\mathrm{rect}\left[\dfrac{t-\dfrac{T_S}{2}}{T_s}\right]$ cui corrisponde la sua risposta in frequenza : $H(f)=T_s\,\mathrm{sinc}(fT_s)e^{-j\pi f T_s}$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea triennale)*

Due variabili aleatorie *X* e *Y* hanno la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} xy & 0\le x\le 1,\;\; 0\le y\le 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, se le due variabili aleatorie sono indipendenti. Calcolare il valor medio delle variabili *X*, *Y* e *W=XY*.

Soluzione

Calcolo delle densità di probabilità di *X* e *Y*:

$$f_X(x)=\int_0^2 xy\,dy = x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 xy\,dx = y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\begin{cases} \frac{1}{2}y & 0\le y\le 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Poiché $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, le due variabili aleatorie sono indipendenti.

$$E[X]=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$E[Y]=\int_0^2 \frac{1}{2}y^2dy=\frac{1}{6}y^3\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}$$

Poiché *X* e *Y* sono indipendenti, $E[XY]=E[X]E[Y]=\dfrac{8}{9}$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Calcolare la trasformata Z del segnale $x[n]=\cos^2(10\pi n)u[n]$ (*ricordarsi di indicare la regione di convergenza*).

Soluzione

Scrivendo la funzione cos in forma esponenziale, si perviene al seguente risultato:

$$\cos^2(10\pi n)u[n] = \left\{\frac{e^{j20\pi n} + e^{-j20\pi n}}{4} + \frac{1}{2}\right\}u[n]$$

$$\frac{1}{4}e^{j20\pi n}u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{4}\frac{1}{1-e^{j20\pi}z^{-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$\frac{1}{4}e^{-j20\pi n}u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{4}\frac{1}{1-e^{-j20\pi}z^{-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$\frac{1}{2}u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{2}\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

Pertanto,

$$X(z) = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

Questo risultato è ovvio, poiché la funzione $x[n]$ coincide con $u[n]$ per ogni valore di n.

Esercizio N. 5

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio $\{x(t)\}$stazionario ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T} & per\,|\tau| \le T \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il processo aleatorio è posto all'ingresso di un sistema LTI che esegue la trasformata di Hilbert. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

Soluzione

Un sistema LTI che esegue la trasformata di Hilbert ha una risposta in frequenza $H(\omega)$ pari a $-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$. Poiché $H(\omega)$ ha modulo unitario, il processo aleatorio all'uscita del sistema ha la stessa densità spettrale di potenza di quello all'ingresso e quindi ha anche la stessa funzione di autocorrelazione.

Esercizio N. 6

La tensione di ingresso applicata al filtro di figura 2 è un processo aleatorio $\{x(t)\}$stazionario gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza bilatera pari a 1 W/Hz. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita, corrispondente alla tensione ai capi di R.

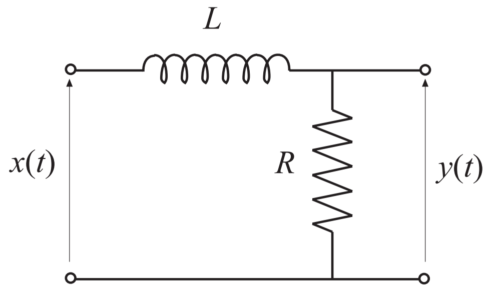

Fig. 2

Soluzione

Il sistema ha una risposta in frequenza pari a $\frac{R}{R+j\omega L}$. La densità spettrale di potenza del processo di uscita è quindi data da $\frac{R^2}{R^2+\omega^2 L^2}$. La funzione di autocorrelazione del processo di uscita sarà l'antitrasformata di Fourier di tale funzione. Per calcolarla è opportuno ricordare che la trasformata di Fourier di $e^{-b|\tau|}$ è pari a $\frac{2b}{b^2+\omega^2}$. Scrivendo la densità spettrale di potenza nella forma:

$$\frac{R}{2L}\frac{2\frac{R}{L}}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}$$

si deduce che la funzione di autocorrelazione richiesta è data da $\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{L}|\tau|}$.