Teoria dei Segnali
(Appello del 22 gennaio 2003)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico tempo discreto rappresentato in figura 1.

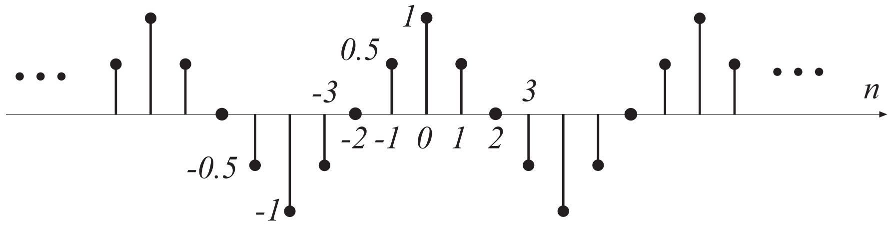

Fig. 1

Soluzione

Trattandosi di un segnale pari di periodo $N = 8$, sarà sufficiente calcolare i coefficienti dello sviluppo con esponenziali complessi caratterizzati da indice $0,1,2,3,4$.

Per il generico coefficiente risulterà:

$$c_k = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2}e^{jk\frac{2\pi}{8}} + \frac{1}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{8}} - \frac{1}{2}e^{jk\frac{2\pi}{8}3} - \frac{1}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{8}3} - e^{-jk\frac{2\pi}{8}4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + \cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3k\frac{\pi}{4}\right) - e^{-jk\pi}\right]$$

Pertanto:

$$c_0 = 0,\ c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ c_2 = c_{-2} = 0,\ c_3 = c_{-3} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ c_4 = 0$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare risponde ad un impulso ideale centrato in t_0 con il segnale $\delta(t - t_0) + u(t)$. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo-invariante e se è causale.

Disegnare con cura la sua risposta al segnale $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$, riportato in figura 2.

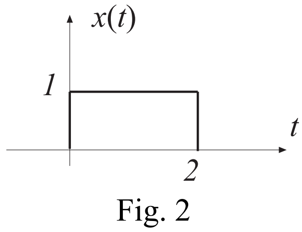

Fig. 2

Soluzione

Il sistema non è tempo-invariante, poiché traslando l'impulso ideale posto all'ingresso, la risposta presenta una parte che trasla nel tempo della medesima quantità ed un'altra (il gradino $u(t)$) che rimane fissa. Non è nemmeno causale, poiché, ad esempio, applicando all'ingresso un impulso centrato in $t = 1$ si ottiene una risposta che inizia all'istante $t = 0$.

Per calcolare la risposta ad un generico segnale $x(t)$ si può usare la formulazione generale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t,\tau) d\tau$$

Nel caso specifico, $h(t,\tau) = \delta(t-\tau) + u(t)$. Risulta pertanto:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau + u(t)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau = x(t) + u(t)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$$

Ponendo al posto di $x(t)$ la funzione di figura 2 si otterrà il segnale rappresentato in fig. I.

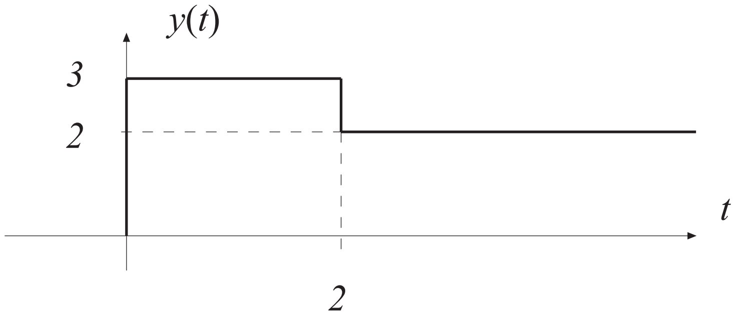

Fig. I

Esercizio N. 3

Un segnale modulato in ampiezza ha la seguente espressione analitica:

$$s(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$$

Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \delta(t) + \delta(t - t_0)$. Si esprima l'inviluppo complesso del segnale all'uscita del sistema. *(conviene operare nel dominio del tempo)*

Soluzione

L'espressione del segnale di uscita è:

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) + x(t-t_0)\cos(\omega_0 t - \omega_0 t_0)$$

Questo segnale può facilmente essere posto nella forma canonica:

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) + x(t - t_0)\{\cos(\omega_0 t_0)\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t_0)\sin(\omega_0 t)\}$$

Così facendo, si riconoscono immediatamente le parti in fase e in quadratura:

$$y_c(t) = x(t) + \cos(\omega_0 t_0)x(t - t_0)$$
$$y_s(t) = -\sin(\omega_0 t_0)x(t - t_0)$$

In conclusione, $\tilde{y}(t) = x(t) + x(t - t_0)e^{-j\omega_0 t_0}$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea triennale)*

Due variabili aleatorie X e Y hanno la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} cx^2 y & 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare il valore della costante c e calcolare la probabilità dell'evento $\{X \ge Y\}$

Soluzione

Per il calcolo della costante c è necessario imporre che :

$$c\int_0^1\int_0^2 x^2 y\, dy\, dx = 1$$

Risolvendo l'integrale doppio si ricava $c = \dfrac{3}{2}$.

Con riferimento alla figura II, la probabilità dell'evento $\{X \ge Y\}$ è pari all'integrale di $f_{XY}(x, y)$, esteso al dominio in tratteggio.

$$P\{X \ge Y\} = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 \int_0^x y\,dy\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^x dx = \frac{3}{2}\frac{x^5}{10}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}$$

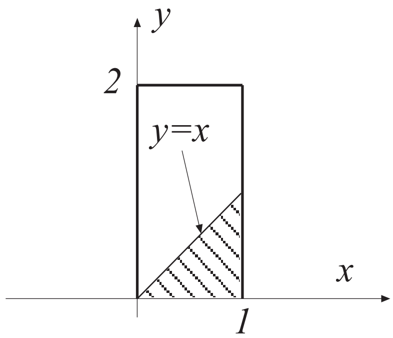

Fig. II

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema LTI tempo discreto ha come funzione di trasferimento la funzione:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-3}}{z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3}}$$

Sapendo che la risposta impulsiva è un segnale destro, dire (giustificando la risposta) se il sistema è stabile e se è causale.

Soluzione

Mettendo la funzione $H(z)$ nella forma:

$$H(z) = \frac{z^3 - 2}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}} = \frac{z^3 - 2}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

si nota che essa ha due poli, rispettivamente in $z = -\frac{1}{2}$ e $z = 1$. Poiché la risposta impulsiva è un segnale destro, la regione di convergenza è definita da $|z| > 1$: il sistema quindi non è stabile.

Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore, si vede inoltre che il primo termine di tale divisione è z, che significa $h[-1] = 1$: il sistema quindi non è causale.

<u>Esercizio N. 5</u>

La risposta impulsiva di un sistema LTI è:

$$h(t) = e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

Al suo ingresso vi è un processo aleatorio stazionario con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = \cos(2\pi f_0 \tau)$. Calcolare la funzione di autocorrelazione dl processo di uscita.

Soluzione

L'esercizio può essere risolto sia nel dominio della frequenza sia nel dominio del tempo.

Ad esempio, nel dominio della frequenza va dapprima calcolata la densità spettrale di potenza del processo aleatorio di ingresso che è:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0)$$

Poiché la risposta in frequenza del sistema è $H(f) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f}$, la densità spettrale di potenza del processo di uscita risulta:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{4} + 4\pi^2 f_0^2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{4} + 4\pi^2 f_0^2}\delta(f - f_0)$$

L'antitrasformata di $S_y(f)$ corrisponde alla funzione di autocorrelazione del processo di uscita. Pertanto:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\frac{1}{4} + 4\pi^2 f_0^2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Esercizio N. 6

In figura 3 è raffigurata la generica realizzazione di un processo aleatorio; a è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 1 e 2. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso lato.

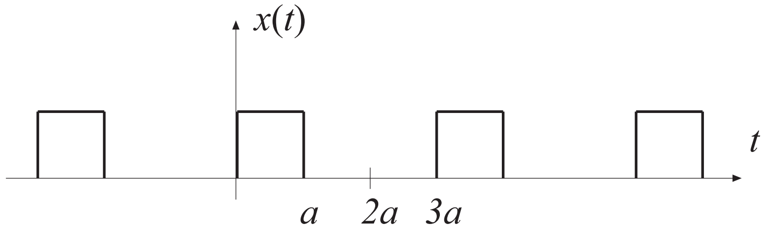

Fig. 3

Soluzione

Per verificare l'eventuale regolarità del processo è necessario calcolare il valor medio e l'autocorrelazione temporali.

1) Valor medio temporale.
   Ciascuna realizzazione è costituita da un segnale periodico di periodo 3a. E' immediato verificare che il valor medio di tale segnale periodico è pari a $1/3$. Esso è dunque indipendente dal valore assunto dalla variabile aleatoria a e pertanto è indipendente dalla realizzazione considerata.
2) Funzione di autocorrelazione temporale.
   a) $\tau \leq a$
      La situazione è quella rappresentata in figura II. Risulta:
      $$\Re_x(\tau) = \frac{1}{3a} \int_{\langle 3a \rangle} x(t) x(t+\tau) dt = \frac{a - |\tau|}{3a} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{|\tau|}{a}\right)$$

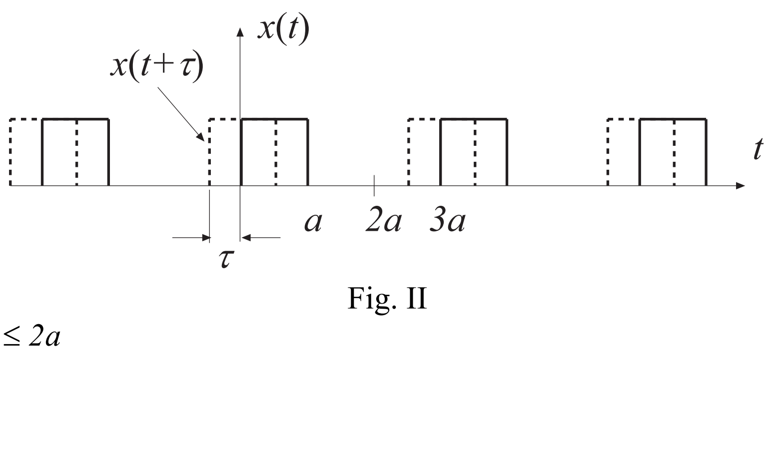

Fig. II

   b) $a \leq \tau \leq 2a$

In questo intervallo $\Re_x(\tau) = 0$.

Questo andamento si ripete con periodo 3a, per cui $\Re_x(\tau)$ si presenta come indicato in figura III.

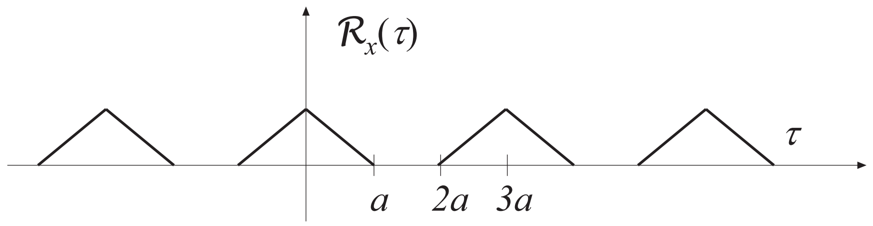

Fig. III

Poiché la funzione di autocorrelazione temporale dipende dalla variabile aleatoria a, e quindi dalla realizzazione considerata, il processo non è regolare.