Teoria dei Segnali

(Appello del 5 settembre 2003)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è:

$$X(\omega) = \frac{2\omega}{4+\omega^2} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Il segnale $x(t)$ è reale?

Qual è la trasformata di Fourier di $x(-t)$?

Se il segnale $x(t)$ è applicato all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = u(t)$, qual è il segnale all'uscita di tale sistema?

Soluzione

Poiché $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $X(\omega)$ è una funzione dispari puramente immaginaria: pertanto il segnale $x(t)$ è reale (tra l'altro è dispari).

La trasformata di Fourier di $x(-t)$ è pari a $X(-\omega)$, cioè $-j\frac{2\omega}{4+\omega^2}$.

Il sistema è un integratore, quindi il segnale in uscita avrà trasformata di Fourier:

$$Y(\omega) = X(\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{2}{4+\omega^2}$$

A tale trasformata corrisponde il segnale $y(t) = \frac{1}{2} e^{-2|t|}$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto risponde al segnale $x[n]$ con il segnale $y[n]$, rappresentati in figura 1.

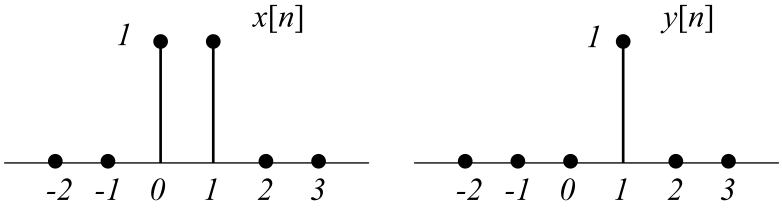

Fig. 1

Qual è la risposta in frequenza e la risposta impulsiva del sistema?

Soluzione

Le trasformate di Fourier di $x[n]$ e $y[n]$ sono rispettivamente:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=1+e^{-j\Omega} \qquad Y\left(e^{j\Omega}\right)=e^{-j\Omega}$$

Pertanto la risposta in frequenza è $H\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}}$, cui corrisponde la risposta impulsiva $h[n]=(-1)^{n-1}u[n-1]$.

Esercizio N. 3

Dato il segnale $s(t)=A\cos(\omega_0 t+\sin\Omega t)$, con $\Omega << \omega_0$, si valuti, con riferimento a ω_0:

- l'inviluppo complesso $\tilde{s}(t)$;
- il segnale analitico $s_+(t)$;
- l'inviluppo naturale $a(t)$.

Soluzione

La forma canonica di $s(t)$ è:

$$s(t)=A\cos(\sin\Omega t)\cos(\omega_0 t)-A\sin(\sin\Omega t)\sin(\omega_0 t)$$

Di conseguenza la parte in fase è $A\cos(\sin\Omega t)$ e quella in quadratura $A\sin(\sin\Omega t)$. L'inviluppo complesso è dato da $s_c(t)+js_s(t)$ e quindi:

$$\tilde{s}(t)=A\cos(\sin\Omega t)+jA\sin(\sin\Omega t)=Ae^{j\sin\Omega t}$$

mentre il segnale analitico, corrispondente a $\tilde{s}(t)e^{j\omega_0 t}$, è pari a $Ae^{j(\omega_0 t+\sin\Omega t)}$. L'inviluppo naturale è costante e pari ad *A*.

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea triennale))*

La variabile X è uniformemente distribuita tra *a* e *b*. Il suo valor medio è *7* e la sua varianza è pari a 3. Calcolare la sua densità di probabilità.

Soluzione

La densità di probabilità è espressa dalla relazione $\dfrac{1}{b-a}$. Si tratta pertanto di individuare gli estremi *a* e *b*, tramite le relazioni:

$$E[X]=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=7 \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\sigma^2+(E[X])^2=52$$

Sviluppando tali relazioni si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}=7\rightarrow b+a=14$$

$$\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}\left(b^2+ab+a^2\right)=52$$

Il sistema di due equazioni nelle incognite *a* e *b* può essere risolto tramite sostituzione:

$$a=14-b \qquad b^2+14b-b^2+14^2+b^2-28b=156$$

$$b^2-14b+40=0 \rightarrow b=\begin{cases}10 \rightarrow a=4\\ 4 \rightarrow a=10\end{cases}$$

La densità di probabilità è quindi pari a $\frac{1}{6}$.

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z)=\frac{1+z}{1-z^{-2}}$$

con regione di convergenza $|z|>1$.

Si ricavi la risposta impulsiva del sistema. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale.

Soluzione

La funzione $H(z)$ può essere semplificata:

$$H(z)=\frac{1+z}{1-z^{-2}}=\frac{1+z}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}=\frac{1+z}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z\right)z^{-1}}=\frac{z}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

Nell'ultima espressione si riconosce la trasformata Z della funzione $u[n+1]$. Tale risposta impulsiva è propria di un sistema non causale. Inoltre il sistema non è stabile, poiché la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza

Esercizio N. 5

Si consideri il processo aleatorio associato all'esperimento "lancio di una moneta", in cui alle uscite "testa" e "croce" corrispondono rispettivamente le funzioni:

$$x_1(t)=\mathrm{sgn}(t)$$
$$x_2(t)=\mathrm{sgn}(-t)$$

Si calcoli il valor medio del processo.

Si disegni con cura la funzione di autocorrelazione $R_x(t,t+\tau)$ in funzione di t per $\tau = 1, 2, 3$.

Si calcoli la densità spettrale di potenza.

Soluzione

Le due realizzazioni distinte del processo hanno l'andamento riportato in figura I.

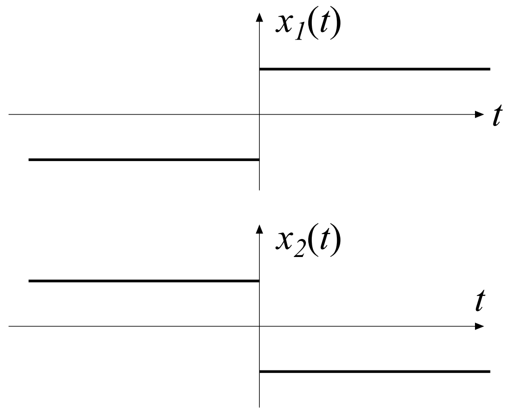

Fig. I

Il valore medio del processo è evidentemente nullo. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione, scelto un valore di $\tau > 0$ essa risulta pari a *1* se è $t + \tau < 0$ oppure se è $t > 0$. Altrimenti essa è pari a *-1*. Gli andamenti richiesti sono riportati in figura II.

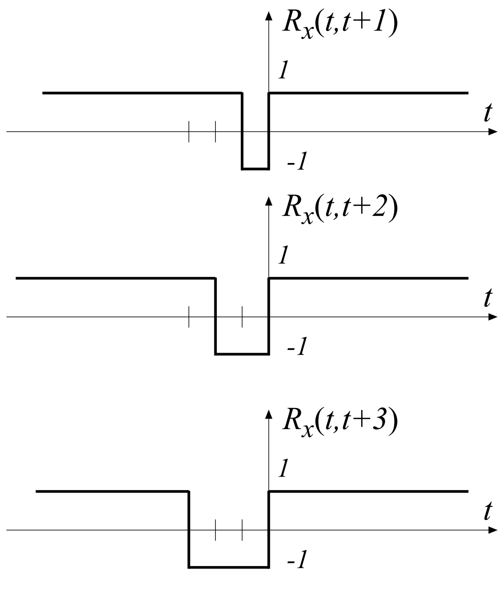

Fig. II

Poiché per ogni valore finito di τ il valore medio di $R_x(t, t+\tau)$, rispetto alla variabile t, è pari a *1*, la densità spettrale di potenza, che è la trasformata di tale valore medio, è data da $2\pi\delta(\omega)$.

Esercizio N. 6

Si consideri il processo aleatorio, la cui generica realizzazione è:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_k)$$

in cui A è una costante ϕ_k è una variabile aleatoria discreta, che può assumere in modo equiprobabile i valori $k\frac{\pi}{2}$, con $k = 0,1,2,3$.

Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario (in senso debole).

Soluzione

Calcolo del valor medio:

$$E[x(t)] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} A\cos\left(\omega_0 t + k\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t,t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{4}A^2\sum_{k=0}^{3}\cos\left(\omega_0 t + k\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega_0 t + \omega_0\tau + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}A^2\sum_{k=0}^{3}\cos(\omega_0\tau) + \underbrace{\sum_{k=0}^{3}\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + k\pi)}_{=0} = \frac{1}{2}A^2\cos(\omega_0\tau)$$

Il processo è stazionario in senso debole.