PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

4-5 novembre 2003
(Laurea triennale)

Esercizio N. 1

Si consideri il sistema descritto dalla seguente relazione tra l'uscita $y(t)$ e l'ingresso $x(t)$:

$$y(t) = x(-t+2)$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema
a) è lineare;
b) è tempo invariante;
c) è stabile;
d) è causale.

Soluzione

a) il sistema è lineare:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) = x_1(-t+2) \\ x_2(t) \to y_2(t) = x_2(-t+2) \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \to ax_1(-t+2) + bx_2(-t+2) = ay_1(t) + by_2(t)$$

b) il sistema non è tempo invariante:
$$x(t) \to y(t) = x(-t+2) \Rightarrow x(t-t_0) \to y_1(t) = x(-t+2-t_0) \neq y(t-t_0)$$

c) Il sistema è stabile:
Se $|x(t)| < M$, allora anche $|y(t)| = |x(-t+2)| < M$

d) Il sistema non è causale:
Es.: $x(t) = u(t) \to y(t) = u(-t+2) \quad (\neq 0 \text{ per } t < 0)$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso centrato in n_0 con il segnale:

$$h[n, n_0] = \delta[n+n_0] + \delta[n-n_0]$$

Disegnare con cura la risposta del sistema al segnale di figura 2.

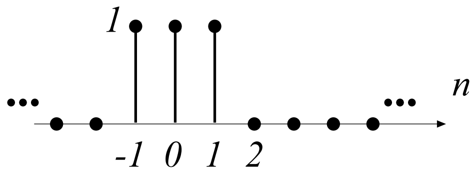

Fig. 2

Soluzione

Il segnale di ingresso è pari a $\delta[n+1]+\delta[n]+\delta[n-1]$. Pertanto la risposta risulta:

$$\begin{aligned} y[n] &= \{\delta[n+1]+\delta[n-1]\}-\{\delta[n]+\delta[n]\}-\{\delta[n-1]+\delta[n+1]\} \\ &= 2\delta[n+1]+2\delta[n]+2\delta[n-1] \end{aligned}$$

L'andamento è quello riportato in figura I:

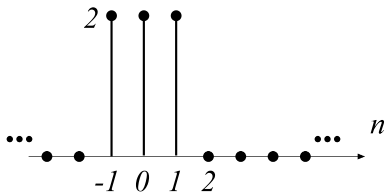

Fig. I

Esercizio N. 3

La risposta impulsiva di un sistema LTI tempo continuo è:

$$h(t)=e^{-\alpha t}u(t)$$

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t)=u(2-t)$.

Soluzione

Osservando la figura II si deduce che:

$$y(t)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha} & t\le 2 \\ \displaystyle\int_{t-2}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{e^{-\alpha(t-2)}}{\alpha} & t>2 \end{cases}$$

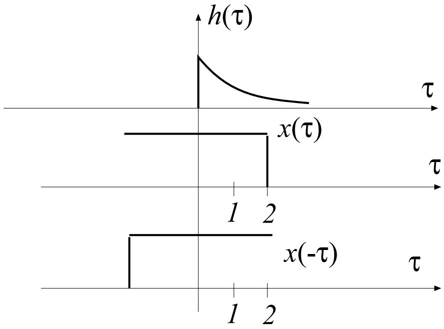

Fig. II

Esercizio N. 4

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale in figura 2.

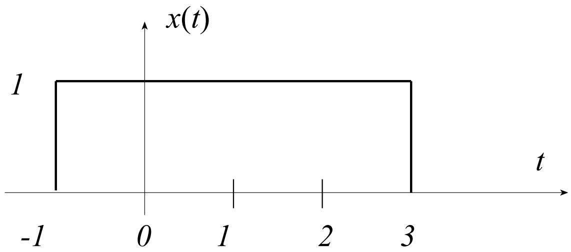

Fig. 2

Soluzione

La funzione $x(t)$ corrisponde ad un impulso rettangolare di durata $T = 4$, traslato di $t_0 = 1$. Pertanto la sua trasformata di Fourier è pari a:

$$X(f) = 4\,\mathrm{Sa}(4\pi f)e^{-j2\pi f} = 4\,\mathrm{sinc}(4f)e^{-j2\pi f}$$

Esercizio N. 5

Individuare i segnali tempo discreto che hanno per trasformate di Fourier le seguenti funzioni:

a) $1 + e^{-j\Omega}$

b) $1 - \frac{1}{2}e^{-j2\Omega}$

c) $1 + 2e^{-j\Omega\frac{1}{2}}$ per $|\Omega| \le \pi$

Soluzione

a) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

b) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-2]$

c) $$x[n] = \delta[n] + 2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-j\frac{\Omega}{2}} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \delta[n] + \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\left[\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]}{n-\frac{1}{2}}$$

$$= \delta[n] + 2\,\mathrm{sinc}\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \delta[n] - \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(\pi n)}{n-\frac{1}{2}}$$

$$= \delta[n] - \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}}$$