Teoria dei Segnali
(17 dicembre 2003)

II Provetta (laurea triennale)

<u>Esercizio N. 1</u>

In un club ci sono 30 soci maschi e 20 soci femmine. Il 40% dei maschi e il 60% delle femmine giocano a bridge. Incontrando a caso un socio del club, è più probabile che si tratti di un uomo che gioca a bridge o di una donna che non gioca a bridge? (giustificare la risposta).

Soluzione

Indicando con M l'evento "socio maschio", con F l'evento "socio femmina" e con G l'evento "gioca a bridge", si ha:

$$P[M] = 0.6 \qquad P[G/M] = 0.4$$
$$P[F] = 0.4 \qquad P[G/F] = 0.6$$

Le probabilità da mettere a confronto sono quelle degli eventi congiunti MG e $F\overline{G}$, che risultano:

$$P[MG] = P[G/M] \times P[M] = 0.24$$
$$P[F\overline{G}] = P[\overline{G}/F] \times P[F] = (1 - P[\overline{G}/F]) \times P[F] = 0.16$$

Conclusione: è più probabile che si tratti di un maschio che gioca a bridge.

<u>Esercizio N. 2</u>

In un sistema di telecomunicazioni viene trasmesso il bit 0 con probabilità q e il bit 1 con probabilità $p = 1 - q$. A causa del rumore presente, il bit ricevuto può essere giusto o errato. Il sistema è schematizzabile come in figura 1, ove X è il bit trasmesso e Y quello ricevuto.

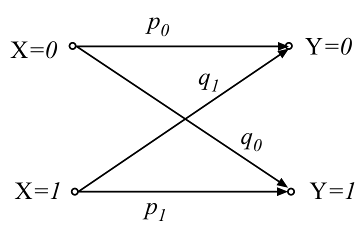

Fig. 1

Inoltre si sa che:

$$P[Y = 0 / X = 0] = p_0$$
$$P[Y = 1 / X = 0] = q_0 = 1 - p_0$$
$$P[Y = 0 / X = 1] = q_1 = 1 - p_1$$
$$P[Y = 1 / X = 1] = p_1$$

Determinare:

a) La probabilità che il bit ricevuto sia 1
b) La probabilità che avvenga un errore, quando è stato trasmesso 1
c) La probabilità di errore incondizionata

Soluzione

Risulta:

a) $P[\mathrm{Y}=1]=P[\mathrm{Y}=1/\mathrm{X}=0]P[\mathrm{X}=0]+P[\mathrm{Y}=1/\mathrm{X}=1]P[\mathrm{X}=1]=q_0q+p_1p$

b) $P[\mathrm{Y}=0/\mathrm{X}=1]=q_1$

c) $P[\varepsilon]=P[\mathrm{Y}=0/\mathrm{X}=1]P[\mathrm{X}=1]+P[\mathrm{Y}=1/\mathrm{X}=0]P[\mathrm{X}=0]=q_1p+q_0q$

<u>Esercizio N. 3</u>

Un rumore bianco, avente densità spettrale di potenza bilatera pari a 1, è applicato ad un sistema LTI con risposta impulsiva data da:

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{T} & 0\le t\le T\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo d'uscita e la mutua correlazione tra il processo di ingresso e quello di uscita.

Soluzione

La funzione di autocorrelazione del processo all'ingresso del sistema è: $R_x(\tau)=\delta(\tau)$. Pertanto:

$$R_{xy}(t,t+\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)=\delta(\tau)\otimes h(\tau)=h(\tau)$$

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=h(\tau)\otimes h(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\alpha)h(\alpha-\tau)d\alpha$$

La figura I mostra i grafici delle funzioni $h(\alpha)$ e $h(\alpha-\tau)$ che intervengono nell'integrale di convoluzione.

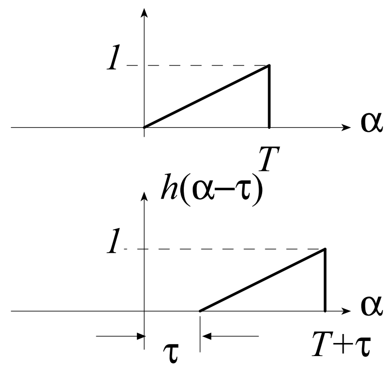

Fig. I

Da questo grafico si deduce che:

$$R_y(\tau) = \begin{cases} 0 \qquad per \quad |\tau| > T \\ \displaystyle\int_{\tau}^{T} \frac{\alpha}{T}\frac{\alpha-\tau}{T} d\alpha = \frac{1}{T^2}\left(\frac{\tau^3}{6} - \frac{T^2\tau}{2} + \frac{T^3}{3}\right) \qquad per\ |\tau| < T \end{cases}$$

Esercizio N. 4

Si consideri il processo aleatorio $x(t) = A\,\mathrm{sgn}(t)$, ove A è una variabile aleatoria gaussiana, a valor medio nullo e con varianza pari a 2.

a) Calcolare il valor medio di $x(t)$.
b) Dire se il processo, almeno in senso debole, è regolare (giustificare la risposta).

Soluzione

Per ogni valore di t $x(t)$ è una variabile aleatoria gaussiana a valor medio nullo.

Per quanto riguarda la regolarità, è necessario esaminare il valor medio temporale e la funzione di autocorrelazione temporale della generica realizzazione. La presenza della funzione sgn(t) fa sì che il valor medio temporale sua nullo per tutte le realizzazioni. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, essa risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A^2\,\mathrm{sgn}(t)gn(t+\tau)dt = A^2 \quad \forall\tau\ finito$$

Conclusione: il processo aleatorio non è regolare, nemmeno in senso debole.

Esercizio N. 5

Il processo aleatorio $A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t$, con A e B variabili aleatorie indipendenti ed uniformemente distribuite tra -1 e $+1$, è stazionario in senso debole? (giustificare la risposta).

Soluzione

Valor medio:

$$E[x(t)] = E[A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t] = E[A]\cos\omega_0 t - E[B]\sin\omega_0 t = 0$$

Funzione di autocorrelazione:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = E[(A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t)(A\cos\omega_0(t+\tau) - B\sin\omega_0(t+\tau))]$$
$$= E[A^2]\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + E[B^2]\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

(i valori medi incrociati sono nulli, trattandosi di variabili aleatorie incorrelate a valor medio nullo)

$$R_x(t,t+\tau) = E\lfloor A^2 \rfloor \cos\omega_0 t \cos\omega_0 (t+\tau) + E\lfloor B^2 \rfloor \sin\omega_0 t \sin\omega_0 (t+\tau)$$
$$= \frac{1}{3}\cos\omega_0\tau$$

Conclusione: il processo, almeno in senso debole, è stazionario.