Teoria dei Segnali

(Appello del 28 gennaio 2004)

Laurea triennale

Prova scritta

Esercizio N. 1

I sistemi A e B di figura 1 sono lineari e tempo-invarianti. La risposta impulsiva $h_A(t)$ del sistema A è pari a $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t-kT)$. Quale deve essere la risposta impulsiva del sistema B affinché quella del sistema complessivo sia pari a $\delta(t)$?

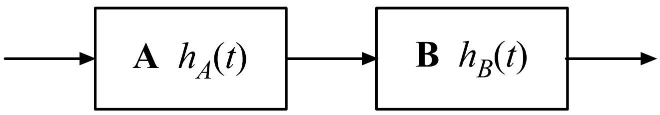

Fig. 1

Soluzione

La risposta in frequenza del sistema A è:

$$H_A(\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-j\omega kT}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega T}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega T}}$$

Affinché la risposta impulsiva dell'intero sistema sia $\delta(t)$, la risposta in frequenza del sistema B dovrà risultare pari a $1-\frac{1}{2}e^{-j\omega T}$. Pertanto $h_B(t)=\delta(t)-\frac{1}{2}\delta(t-T)$.

Esercizio N. 2

In figura 2 è riportato l'andamento del segnale $x(t)$, avente spettro $X(\omega)$. Disegnare con cura il segnale che ha spettro pari a $2X^*(2\omega)e^{j2\omega}$.

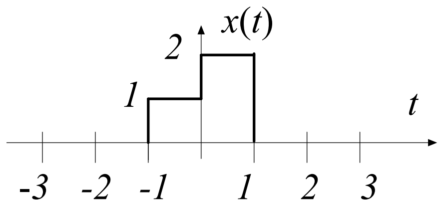

Fig. 2

Soluzione

L'operazione di coniugazione denota una corrispondente trasformazione nel dominio del tempo da t a $-t$. La presenza del fattore 2 è indice di uno scalaggio nel tempo, mentre l'aggiunta del termine esponenziale corrisponde ad una traslazione temporale. In conclusione, lo spettro in questione è quello del segnale $x\left(-\frac{t}{2}-1\right)$, il cui andamento è riportato in fig. I.

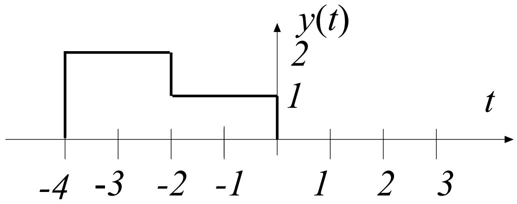

Fig. I

Esercizio N. 3

Un sistema tempo discreto lineare risponde all'impulso unitario $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n]$. Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$?

Soluzione

Il sistema non è tempo-invariante. La risposta è calcolabile attraverso la seguente sommatoria:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}u[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}u[n]=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

Esercizio N. 4

Due variabili aleatorie X e Y hanno la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c & -1\le y\le 1,\quad 0\le x\le 1,\quad \left(x^2+y^2\right)\le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Determinare la costante c. Dire, giustificando la risposta, se le due variabili aleatorie sono tra loro indipendenti.

Soluzione

La funzione $f_{XY}(x,y)$ è diversa da zero sulla regione indicata in figura II, ove vale c. L'area di detta regione è pari a $\pi/2$, per cui,dovendo essere $\int_R f_{XY}(x,y)dxdy = 1$, $c = 2/\pi$.

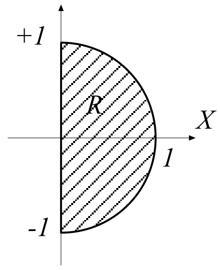

Fig. II

Per verificare l'eventuale indipendenza di *X* e di *Y*, è necessario calcolare le rispettive densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \qquad -1 \le y \le +1$$

Poiché $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, le due variabili aleatorie non sono indipendenti.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha la seguente densità spettrale di potenza:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)$$

Calcolare la funzione di mutua correlazione tra $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ (trasformato di Hilbert di $x(t)$)

Soluzione

La funzione di autocorrelazione di $x(t)$ è data da $\cos(2\pi f_0 \tau)$. Poiché:

$$R_{x\hat{x}}(t, t+\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) = R_x(\tau) \otimes \frac{1}{\pi\tau}$$

risulta:

$$R_{x\hat{x}}(t, t+\tau) = \hat{R}_x(\tau) = \sin(2\pi f_0 \tau)$$

Esercizio N. 6

La generica realizzazione di un processo aleatorio risulta essere:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}[t - 2k + \alpha]$$

ove α è una variabile aleatoria uniformemente distribuita sull'intervallo $[0 \div 2]$. Per la generica realizzazione valutare il valor medio temporale e disegnare con cura la funzione di autocorrelazione temporale.

Soluzione

In figura III è raffigurata una tipica realizzazione di questo processo: si tratta, per qualsiasi valore di α, di una funzione periodica di periodo $T = 2$, che ha valor medio temporale $\langle x(t) \rangle = 1/2$.

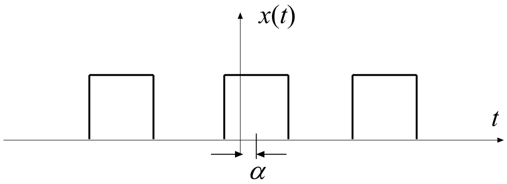

Fig. III

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, come evidenziato in figura IV, il prodotto tra $x(t)$ e $x(t+\tau)$ dà luogo ad una funzione rettangolare periodica di durata $1-\tau$ e di periodo 2. Il suo valor medio è quindi $\frac{1}{2} - \frac{|\tau|}{2}$ per $|\tau| \le 1$, ed è periodico di periodo 2, come illustrato nella citata figura IV.

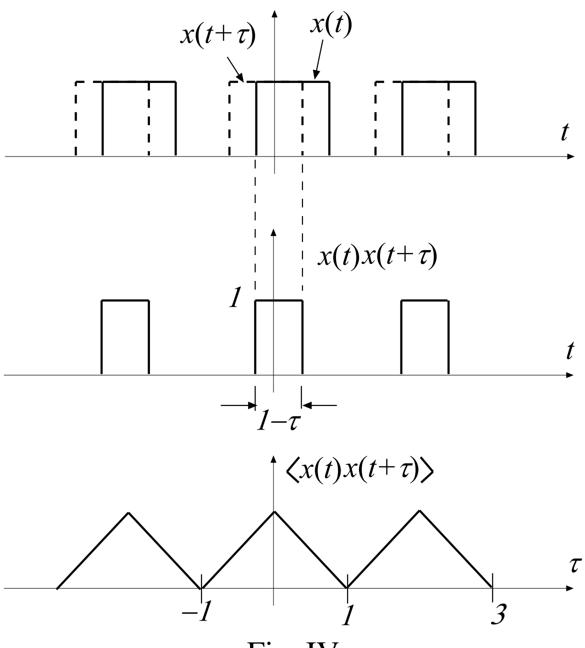

Fig. IV