Teoria dei Segnali

(Appello del 6 luglio 2004)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso ideale centrato in $t = \tau$ con il segnale $h(t,\tau) = e^{-|\tau|}\sin(2\pi t)u(t)$. Calcolare la sua risposta al segnale rappresentato in fig. 1.

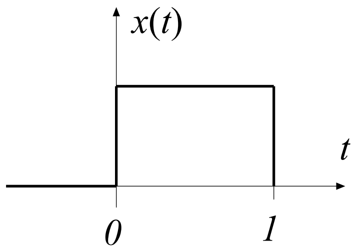


Fig. 1

Soluzione

Il sistema non è tempo-invariante. La risposta ad un generico segnale $x(t)$ deve essere calcolata con l'integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

che in questo caso diventa:

$$y(t) = \sin(2\pi t)u(t)\int_0^1 e^{-\tau}d\tau = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\sin(2\pi t)u(t)$$

Esercizio N. 2

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \sin(2\pi t)u(t)$.

Soluzione

La trasformata è data dalla seguente convoluzione:

$$\frac{1}{2\pi}F\{\sin(2\pi t)\} \otimes F\{u(t)\}$$

La due trasformate di Fourier sono rispettivamente:

$$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - 2\pi) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + 2\pi) \quad e \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Eseguendo la convoluzione tra queste due funzioni (e dividendo il risultato per 2π) si ottiene:

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{j}\left(\frac{1}{j(\omega-2\pi)}\right)-\frac{\pi}{j}\left(\frac{1}{j(\omega+2\pi)}\right)+\frac{\pi}{j}[\pi\delta(\omega-2\pi)]-\frac{\pi}{j}[\pi\delta(\omega+2\pi)]\right\}$$

$$X(\omega)=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{4\pi}{4\pi^2-\omega^2}+\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-2\pi)-\delta(\omega+2\pi)]\right\}$$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto è caratterizzato dalla risposta impulsiva riportata in figura 2. Disegnare con cura la sua risposta al gradino unitario.

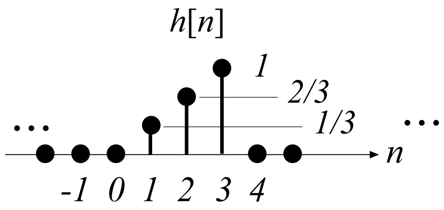
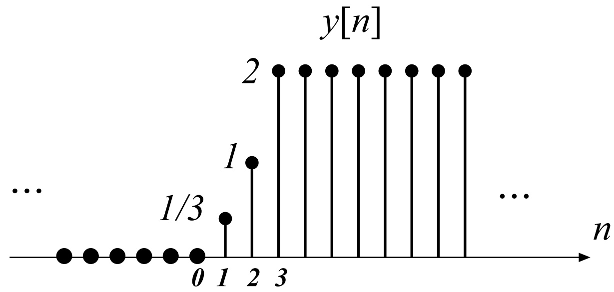


Fig. 2

Soluzione

La somma di convoluzione fornisce il seguente risultato:



Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

La funzione di sistema di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

Calcolare la sua risposta al gradino unitario, sapendo che esso è stabile.

Soluzione

La funzione di sistema presenta due poli, rispettivamente in $z=\frac{1}{2}$ e in $z=2$.

Poiché il sistema stabile, la regione di convergenza dovrà contenere la circonferenza di raggio unitario e pertanto sarà definita da $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

La trasformata Z della risposta è: $Y(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$

Essa può essere scritta come:

$$H(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - 2z^{-1}}$$

con $A = -\frac{1}{3}$ e $B = \frac{4}{3}$. Tale trasformata, nella suddetta regione di convergenza, corrisponde alla funzione:

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

Esercizio N. 5

In una scatola ci sono tre palline, una bianca e due nere. Si consideri il processo aleatorio associato al seguente esperimento: vengono estratte contemporaneamente due palline: se hanno lo stesso colore la realizzazione del processo è $\cos(\omega_0 t)$, mentre se hanno colore diverso essa è $\cos(2\omega_0 t)$.

Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo.

Soluzione

Le realizzazioni distinte del processo sono due sinusoidi di ampiezza unitaria, a frequenza angolare ω_0 e $2\omega_0$, aventi probabilità di manifestarsi pari rispettivamente a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. La potenza media del processo è pari a $0.5\,W$. Tale potenza è distribuita in corrispondenza alle due frequenze, in modo proporzionale alla probabilità che ciascuna realizzazione ha di manifestarsi. La densità spettrale di potenza unilatera è perciò data da:

$$S_x(\omega) = \frac{\pi}{3}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{2\pi}{3}\delta(\omega - 2\omega_0)$$

Esercizio N. 6

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2} - k\right)$$

ove le varie a_k sono variabili aleatorie tra loro indipendenti, che assumono in modo equiprobabile i valori *0* e *1*.

Si calcoli:

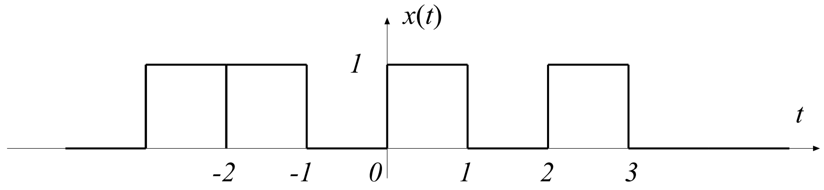
a) il valor medio $m_x(t)$ del processo aleatorio

b) l'autocorrelazione $R_x(0.5, 0.6)$

c) l'autocorrelazione $R_x(0.5, 1.5)$

Soluzione

Nella seguente figura è disegnato il grafico di una tipica realizzazione del processo.



In qualsiasi istante *t* il processo può assumere il valore *1* o *0*, in modo equiprobabile: il valor medio è quindi pari a *0.5*.

In ogni realizzazione negli istanti *t=0.5* e *t=0.6* il processo assume lo stesso valore (o *1* oppure *0*), per cui si ha:

$$R_x(0.5,0.6) = E[x(0.5)\times x(0.6)] = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 1 = 0.5$$

In corrispondenza degli istanti *t=0.5* e *t=1.5* si potranno avere quattro possibili coppie di valori, e precisamente:

$$x(0.5)=0 \quad x(1.5)=0 \Rightarrow x(0.5)\times x(1.5)=0$$
$$x(0.5)=0 \quad x(1.5)=1 \Rightarrow x(0.5)\times x(1.5)=0$$
$$x(0.5)=1 \quad x(1.5)=0 \Rightarrow x(0.5)\times x(1.5)=0$$
$$x(0.5)=1 \quad x(1.5)=1 \Rightarrow x(0.5)\times x(1.5)=1$$

Ogni coppia di valori ha probabilità $\frac{1}{4}$ di verificarsi e pertanto

$$R_x(0.5,1.5) = E[x(0.5)\times x(1.5)] = \frac{1}{4}\times 1 = 0.25$$