PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

16 dicembre 2004

caso a)

Esercizio N. 1

Il segnale $m(t)$ che appare in figura 1 ha uno spettro limitato alla frequenza $f_c = 10\ KHz$, mentre la frequenza f_0 è pari a $30\ MHz$. Con riferimento a f_0, esprimere l'inviluppo complesso e l'inviluppo naturale di $s(t)$.

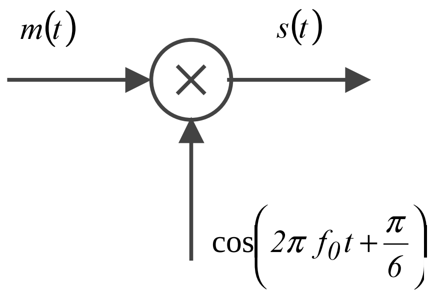

Fig. 1

Soluzione esercizio 1

La forma canonica di $s(t)$ è:

$$s(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6}\right) = m(t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(2\pi f_0 t) - m(t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(2\pi f_0 t)$$

Pertanto $\tilde{s}(t) = m(t)e^{j\frac{\pi}{6}}$, $a(t) = |m(t)|$

Esercizio N. 2

Dire quanti sono i sistemi LTI che possono avere come funzione di trasferimento la funzione:

$$H(z) = \frac{z}{2z+3}$$

Calcolare le loro risposte impulsive e dire (giustificando le risposte) se sono stabili e se sono causali.

Soluzione esercizio 2

Ricordando che la funzione

$$\frac{1}{1-az^{-1}}$$

ha due possibili antitrasformate, e precisamente:

$$(a)^n u[n] \quad per \;\; |z| > a$$

$$-a^n u[-n-1] \quad per \;\; |z| < a$$

si deduce che:

$$H(z) = \frac{z}{2z+3} = \frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}z^{-1}\right)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_1[n] = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n] \\ h_2[n] = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \end{cases}$$

Il sistema relativo a $h_1[n]$ è instabile (la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza) ed è causale.
Il sistema relativo a $h_2[n]$ è stabile (la circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza) e non è causale (segnale sinistro).

Esercizio N. 3

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|\tau| & per \;\; |\tau| \le 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il processo aleatorio è posto all'ingresso di un sistema LTI che esegue la trasformata di Hilbert. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

Soluzione esercizio 3

Un sistema che esegue la trasformata di Hilbert ha una risposta in frequenza $H(f)$ pari a $-j\,\mathrm{sgn}(f)$. Di conseguenza, poiché $|H(f)|^2 = 1$, il processo di uscita avrà la stessa densità spettrale di potenza di quello di ingresso. Essendo il processo stazionario, anche la funzione di autocorrelazione sarà identica a quella del processo di ingresso.

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = \cos(2\pi\, f\, t + \phi)$$

ove f è una variabile aleatoria che assume i valori 1 MHz, 2 MHz, 3 MHz con probabilità pari rispettivamente a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. La fase ϕ è una variabile aleatoria indipendente da f ed è uniformemente distribuita tra 0 e $\frac{\pi}{4}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione esercizio 4

La soluzione dell'esercizio comporta il calcolo del valor medio temporale e della funzione di autocorrelazione temporale per ciascuna realizzazione del processo. Poiché ogni realizzazione è una sinusoide, per ciascuna di esse il valor medio temporale è sicuramente nullo.

La funzione di autocorrelazione temporale risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi f\,t+\phi)\cos[2\pi f\,(t+\tau)+\phi]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{2}\left\{\int_{-T/2}^{+T/2}\cos[2\pi f\,(2t+\tau)+\phi]dt+\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi f\,\tau)dt\right\}=\frac{1}{2}\cos(2\pi f\,\tau)$$

Essa dipende dalla variabile f e pertanto dipende dalla realizzazione. Il processo quindi non è regolare.

Esercizio N. 5

Il processo aleatorio $\{x(t)\}$ è così definito: $x(t)=A\cos(2\pi f\,t+\phi)$, con:

A variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 1;

ϕ variabile aleatoria uniformemente distribuita distribuita tra 0 e 2π ;

f variabile aleatoria distribuita tra 0 e 4 Hz con densità di probabilità:

$$p_f(f)=\frac{1}{8}(4-f)$$

Le variabili aleatorie A, f e ϕ sono tra loro indipendenti.

Dire (giustificando la risposta) se il processo è stazionario in senso lato. Quanto vale la densità spettrale di potenza unilatera del processo aleatorio?

Soluzione esercizio 5

Per decidere sulla stazionarietà del processo bisogna analizzare le proprietà della sua funzione di autocorrelazione e del suo valor medio.

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_X(t,t+\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$$
$$=\int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^4 df\left\{A\cos(2\pi f t+\phi)A\cos[2\pi f(t+\tau)+\phi]p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$
$$=\int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^4 df\left\{\frac{A^2}{2}\cos[2\pi f(2t+\tau)+2\phi]p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}+$$
$$+\int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^4 df\left\{\frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau)p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$

con $p_A(A)=\begin{cases}1 & 0\le A\le 1\\ 0 & altrove\end{cases}$, $p_\phi(\phi)=\begin{cases}1/2\pi & 0\le\phi\le 2\pi\\ 0 & altrove\end{cases}$,

$$p_f(f)=\begin{cases}\frac{1}{8}(4-f) & 0\le f\le 4\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Eseguendo per prima cosa l'integrale in ϕ, la prima parte si annulla, mentre la seconda parte è pari a

$$R_x(t,t+\tau)=\int_0^1 dA\int_0^4 df\left\{\frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau)p_A(A)p_f(f)\right\}$$

Per decidere sulla stazionarietà del processo, non occorre calcolare questo integrale doppio: basta semplicemente osservare che esso dipende soltanto da τ.

Valor medio:

$$E[x(t)]=\int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^4 df\left\{A\cos(2\pi f t+\phi)p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$

Ancora una volta eseguendo dapprima l'integrazione nella variabile ϕ, si vede che $E[x(t)]=0$, indipendente da t. In conclusione il processo è stazionario, almeno in senso debole.

Per il calcolo della densità spettrale di potenza si osservi che ogni realizzazione è una sinusoide, cui compete una potenza pari a $\frac{A^2}{2}$. Siccome A è uniformemente distribuita tra 0 e 1, la potenza media del processo è pari a $\int_0^1 \frac{A^2}{2}p_A(A)dA=\frac{1}{6}$.

Questa potenza è distribuita nella banda tra 0 e 4 Hz, con legge proporzionale alla $p_f(f)$. Pertanto:

$$S_x(f) = \begin{cases} C\dfrac{1}{8}(4-f) & 0 \le f \le 4 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La costante C va calcolata imponendo che $\int_0^4 S_x(f)\,df = \frac{1}{6}$. Risulta $C = \frac{1}{6}$.

caso b)

Esercizio N. 1

Il segnale $m(t)$ che appare in figura 1 ha uno spettro limitato alla frequenza $f_c = 10 \ \ KHz$, mentre la frequenza f_0 è pari a $5 \ \ MHz$. Con riferimento alla frequenza $f_1 = 5.005 \ \ MHz$, esprimere l'inviluppo complesso e l'inviluppo naturale di $s(t)$.

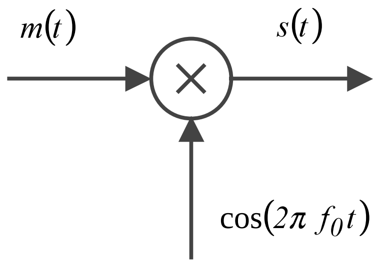

Fig. 1

Soluzione esercizio 1

Posto $\Delta f = 0.005 \times 10^6 = 5 \times 10^3 \ \ Hz$, risulta $f_0 = f_1 - \Delta f$. La forma canonica di $s(t)$ rispetto alla frequenza f_1 è:

$$s(t) = m(t)\cos[2\pi(f_1 - \Delta f)t] = m(t)\cos(2\pi f_1 t - 2\pi \Delta f t) =$$
$$= m(t)\cos(2\pi \Delta f t)\cos(2\pi f_1 t) + m(t)\sin(2\pi \Delta f t)\sin(2\pi f_1 t)$$

Pertanto $\tilde{s}(t) = m(t)e^{-j(2\pi \Delta f t)}$, $a(t) = |m(t)|$

Esercizio N. 2

Dire quanti sono i sistemi LTI che possono avere come funzione di trasferimento la funzione:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{2z^{-1} + 3}$$

Calcolare le loro risposte impulsive e dire (giustificando le risposte) se sono stabili e se sono causali.

Soluzione esercizio 2

Ricordando che la funzione:

$$\frac{1}{1 - az^{-1}}$$

ha due possibili antitrasformate, e precisamente:

$$(a)^n u[n] \quad per \ |z| > a$$
$$-a^n u[-n-1] \quad per \ |z| < a$$

si deduce che:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{2z^{-1}+3} = \frac{z^{-1}}{3\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)} \Rightarrow \begin{cases} h_1[n] = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \\ h_2[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[-n] \end{cases}$$

Il sistema relativo a $h_1[n]$ stabile (la circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza) ed è causale.
Il sistema relativo a $h_2[n]$ è instabile (la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza) e non è causale (segnale sinistro).

<u>Esercizio N. 3</u>

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$$

Il processo aleatorio è posto all'ingresso di un sistema LTI che esegue la trasformata di Hilbert. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

<u>Soluzione esercizio 3</u>

Un sistema che esegue la trasformata di Hilbert ha una risposta in frequenza $H(f)$ pari a $-j\,\mathrm{sgn}(f)$. Di conseguenza, poiché $|H(f)|^2 = 1$, il processo di uscita avrà la stessa densità spettrale di potenza di quello di ingresso. Essendo il processo stazionario, anche la funzione di autocorrelazione sarà identica a quella del processo di ingresso.

<u>Esercizio N. 4</u>

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = \cos(2\pi\, f\, t + \phi)$$

ove f è una variabile aleatoria discreta che assume i valori 1 MHz, e 3 MHz con probabilità pari rispettivamente a $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{3}$. La fase ϕ è una variabile aleatoria indipendente da f ed è uniformemente distribuita tra 0 e π. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione esercizio 4

La soluzione dell'esercizio comporta il calcolo del valor medio temporale e della funzione di autocorrelazione temporale per ciascuna realizzazione del processo. Poiché ogni realizzazione è una sinusoide, per ciascuna di esse il valor medio temporale è sicuramente nullo.

La funzione di autocorrelazione temporale risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi f t+\phi)\cos[2\pi f(t+\tau)+\phi]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{2}\left\{\int_{-T/2}^{+T/2}\cos[2\pi f(2t+\tau)+\phi]dt + \int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi f\tau)dt\right\} = \frac{1}{2}\cos(2\pi f\tau)$$

Essa dipende dalla variabile f e pertanto dipende dalla realizzazione. Il processo quindi non è regolare.

<u>Esercizio N. 5</u>

Il processo aleatorio $\{x(t)\}$ è così definito: $x(t) = A\cos(2\pi f t+\phi)$, con:

A variabile aleatoria distribuita tra 0 e 1 con densità di probabilità $p_A(A) = 2A$;

ϕ variabile aleatoria uniformemente distribuita distribuita tra 0 e 2π;

f variabile aleatoria uniformamente distribuita tra 0 e 10 KHz

Le variabili aleatorie A, f e ϕ sono tra loro indipendenti.

Dire (giustificando la risposta) se il processo è stazionario in senso lato. Quanto vale la densità spettrale di potenza unilatera del processo aleatorio?

Soluzione esercizio 5

Per decidere sulla stazionarietà del processo bisogna analizzare le proprietà della sua funzione di autocorrelazione e del suo valor medio.

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_X(t,t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$= \int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{10^4} df\left\{A\cos(2\pi f t+\phi)A\cos[2\pi f(t+\tau)+\phi]p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$

$$= \int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{10^4} df\left\{\frac{A^2}{2}\cos[2\pi f(2t+\tau)+2\phi]p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}+$$

$$+\int_0^1 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{10^4} df\left\{\frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau)p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$

con $p_A(A)=\begin{cases} 2A & 0 \le A \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$, $p_\phi(\phi)=\begin{cases} 1/2\pi & 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 & altrove \end{cases}$,

$p_f(f)=\begin{cases} 10^{-4} & 0 \le f \le 10^4 \\ 0 & altrove \end{cases}$

Eseguendo per prima cosa l'integrale in ϕ, la prima parte si annulla, mentre la seconda parte è pari a

$$R_x(t,t+\tau)=\int_0^1 dA \int_0^{10^4} df \left\{ \frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau) p_A(A) p_f(f) \right\}$$

Per decidere sulla stazionarietà del processo, non occorre calcolare questo integrale doppio: basta semplicemente osservare che esso dipende soltanto da τ .

Valor medio:

$$E[x(t)]=\int_0^1 dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{10^4} df \{A\cos(2\pi f t+\phi) p_A(A) p_\phi(\phi) p_f(f)\}$$

Ancora una volta eseguendo dapprima l'integrazione nella variabile ϕ, si vede che $E[x(t)]=0$, indipendente da t. In conclusione il processo è stazionario, almeno in senso debole.

Per il calcolo della densità spettrale di potenza si osservi che ogni realizzazione è una sinusoide, cui compete una potenza pari a $\frac{A^2}{2}$. Siccome A è distribuita tra 0 e 1, la potenza media del processo è pari a $\int_0^1 \frac{A^2}{2} p_A(A) dA = \int_0^1 \frac{A^2}{2} 2A dA = \frac{1}{4}$.

Questa potenza è distribuita nella banda tra 0 e 10 KHz, con legge proporzionale alla $p_f(f)$. Pertanto:

$$S_x(f)=\begin{cases} C\times 10^{-4} & 0 \le f \le 10^4 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La costante C va calcolata imponendo che $\int_0^{10^4} S_x(f) df = \frac{1}{4}$. Risulta $C = \frac{1}{4}$.

caso c)

Esercizio N. 1

Il segnale $m(t)$ che appare in figura 1 ha uno spettro limitato alla frequenza $f_c = 10\ \ KHz$, mentre la frequenza f_0 è pari a $10\ \ MHz$. Con riferimento alla frequenza $f_1 = 9.998\ \ MHz$, esprimere l'inviluppo complesso e l'inviluppo naturale di $s(t)$.

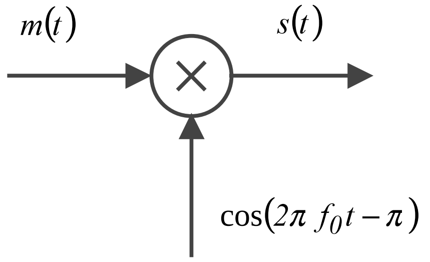

Fig. 1

Soluzione esercizio 1

Posto $\Delta f = 0.002 \times 10^6 = 2 \times 10^3\ \ Hz$, risulta $f_0 = f_1 + \Delta f$.

Poiché $\cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$, la forma canonica di $s(t)$ rispetto alla frequenza f_1 è:

$$s(t) = -m(t)\cos[2\pi(f_1 + \Delta f)t] = -m(t)\cos(2\pi f_1 t + 2\pi \Delta f t) =$$
$$= -m(t)\cos(2\pi \Delta f t)\cos(2\pi f_1 t) + m(t)\sin(2\pi \Delta f t)\sin(2\pi f_1 t)$$

Pertanto $\tilde{s}(t) = -m(t)e^{j(2\pi \Delta f t)}$, $a(t) = |m(t)|$

Esercizio N. 2

Dire quanti sono i sistemi LTI che possono avere come funzione di trasferimento la funzione:

$$H(z) = \frac{3}{z-3}$$

Calcolare le loro risposte impulsive e dire (giustificando le risposte) se sono stabili e se sono causali.

Soluzione esercizio 2

Ricordando che la funzione:

$$\frac{1}{1 - az^{-1}}$$

ha due possibili antitrasformate, e precisamente:

$$(a)^n u[n] \quad per \quad |z| > a$$
$$-a^n u[-n-1] \quad per \quad |z| < a$$

si deduce che:

$$H(z) = \frac{3}{z-3} = \frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_1[n] = 3^n u[n-1] \\ h_2[n] = -(3)^n u[-n] \end{cases}$$

Il sistema relativo a $h_1[n]$ non è stabile (la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza) ed è causale.
Il sistema relativo a $h_2[n]$ è stabile (la circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza) e non è causale (segnale sinistro).

Esercizio N. 3

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = 1 + e^{-\frac{1}{4}|\tau|}$$

Il processo aleatorio è posto all'ingresso di un sistema LTI che esegue la trasformata di Hilbert. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

Soluzione esercizio 3

Un sistema che esegue la trasformata di Hilbert ha una risposta in frequenza $H(f)$ pari a $-j\,\mathrm{sgn}(f)$. Di conseguenza, poiché $|H(f)|^2 = 1$, il processo di uscita avrà la stessa densità spettrale di potenza di quello di ingresso. Essendo il processo stazionario, anche la funzione di autocorrelazione sarà identica a quella del processo di ingresso.

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = \cos(2\pi\, f\, t + \phi)$$

ove f è una costante di valore pari a 1 MHz, mentre la fase ϕ è una variabile aleatoria discreta che assume i valori $k\frac{2\pi}{7}$, ($k = 1,2,\ldots,7$), con probabilità $P = \frac{1}{7}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

<u>Soluzione esercizio 4</u>

La soluzione dell'esercizio comporta il calcolo del valor medio temporale e della funzione di autocorrelazione temporale per ciascuna realizzazione del processo. Poiché ogni realizzazione è una sinusoide, per ciascuna di esse il valor medio temporale è sicuramente nullo.

La funzione di autocorrelazione temporale risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi f t+\phi)\cos[2\pi f(t+\tau)+\phi]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{2}\left\{\int_{-T/2}^{+T/2}\cos[2\pi f(2t+\tau)+\phi]dt+\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(2\pi f\tau)dt\right\}=\frac{1}{2}\cos(2\pi f\tau)$$

Essa non dipende dalla variabile ϕ e quindi non dipende dalla realizzazione. Il processo quindi è regolare.

<u>Esercizio N. 5</u>

Il processo aleatorio $\{x(t)\}$ è così definito: $x(t)=A\cos(2\pi f t+\phi)$, con:

A variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2;

ϕ variabile aleatoria uniformemente distribuita distribuita tra 0 e 2π ;

f variabile aleatoria distribuita tra *0* e *5* Hz con densità di probabilità:

$$p_f(f)=kf \quad (k \text{ costante da determinare})$$

Le variabili aleatorie A, f e ϕ sono tra loro indipendenti.

Dire (giustificando la risposta) se il processo è stazionario in senso lato. Quanto vale la densità spettrale di potenza unilatera del processo aleatorio?

<u>Soluzione esercizio 5</u>

Per decidere sulla stazionarietà del processo bisogna analizzare le proprietà della sua funzione di autocorrelazione e del suo valor medio.

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t,t+\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$=\int_0^2 dA\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^5 df\left\{A\cos(2\pi f t+\phi)A\cos[2\pi f(t+\tau)+\phi]p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$

$$=\int_0^2 dA\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^5 df\left\{\frac{A^2}{2}\cos[2\pi f(2t+\tau)+2\phi]p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}+$$

$$+\int_0^2 dA\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^5 df\left\{\frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau)p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\right\}$$

con $p_A(A)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0 \le A \le 2 \\ 0 & altrove\end{cases}$, $p_\phi(\phi)=\begin{cases}1/2\pi & 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 & altrove\end{cases}$,

$$p_f(f)=\begin{cases}\frac{2}{5}f & 0 \le f \le 5 \\ 0 & altrove\end{cases}$$

Eseguendo per prima cosa l'integrale in ϕ, la prima parte si annulla, mentre la seconda parte è pari a

$$R_x(t,t+\tau)=\int_0^2 dA\int_0^5 df\left\{\frac{A^2}{2}(\cos 2\pi f\tau)p_A(A)p_f(f)\right\}$$

Per decidere sulla stazionarietà del processo, non occorre calcolare questo integrale doppio: basta semplicemente osservare che esso dipende soltanto da τ.

Valor medio:

$$E[x(t)]=\int_0^2 dA\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^5 df\{A\cos(2\pi f t+\phi)p_A(A)p_\phi(\phi)p_f(f)\}$$

Ancora una volta eseguendo dapprima l'integrazione nella variabile ϕ, si vede che $E[x(t)]=0$, indipendente da t. In conclusione il processo è stazionario, almeno in senso debole.

Per il calcolo della densità spettrale di potenza si osservi che ogni realizzazione è una sinusoide, cui compete una potenza pari a $\frac{A^2}{2}$. Siccome A è uniformemente distribuita tra 0 e 2, la potenza media del processo è pari a $\int_0^2 \frac{A^2}{2}p_A(A)dA=\frac{2}{3}$.

Questa potenza è distribuita nella banda tra 0 e 5 Hz, con legge proporzionale alla $p_f(f)$. Pertanto:

$$S_x(f)=\begin{cases}C\frac{2}{5}f & 0 \le f \le 5 \\ 0 & altrove\end{cases}$$

La costante C va calcolata imponendo che $\int_0^4 S_x(f)df=\frac{2}{3}$. Risulta $C=\frac{2}{3}$.

caso d)

Esercizio N. 1

Il segnale $m(t)$ che appare in figura 1 ha uno spettro limitato alla frequenza $f_c = 10\ \ KHz$, mentre la frequenza f_0 è pari a $10\ \ MHz$. Con riferimento alla frequenza $f_1 = 10.002\ \ MHz$, esprimere l'inviluppo complesso e l'inviluppo naturale di $s(t)$.

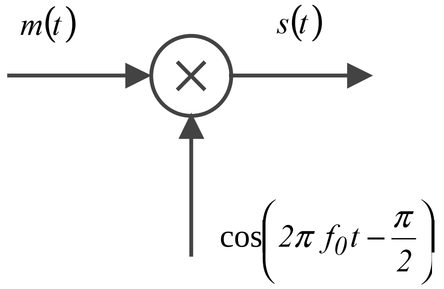

Fig. 1

Soluzione esercizio 1

Posto $\Delta f = 0.002\ \ MHz$, risulta $f_0 = f_1 - \Delta f$.

Poiché $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$, la forma canonica di $s(t)$ rispetto alla frequenza f_1 è:

$$s(t) = -m(t)\sin 2\pi\left(f_1 - \Delta f\right)t$$
$$= -m(t)\sin(2\pi f_1 t)\cos 2\pi\Delta f t + m(t)\cos(2\pi f_1 t)\sin 2\pi\Delta f t$$

Pertanto $\tilde{s}(t) = jm(t)e^{-j2\pi\Delta f t}$, $a(t) = |m(t)|$

Esercizio N. 2

Dire quanti sono i sistemi LTI che possono avere come funzione di trasferimento la funzione:

$$H(z) = \frac{3z}{z^{-1} - 2}$$

Calcolare le loro risposte impulsive e dire (giustificando le risposte) se sono stabili e se sono causali.

Soluzione esercizio 2

Ricordando che la funzione:

$$\frac{1}{1 - az^{-1}}$$

ha due possibili antitrasformate, e precisamente:

$$(a)^n u[n] \quad per \ |z| > a$$
$$-a^n u[-n-1] \quad per \ |z| < a$$

si deduce che:

$$H(z) = \frac{3z}{z^{-1} - 2} = \frac{-3z}{2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_1[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+1] \\ h_2[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[-n-2] \end{cases}$$

Il sistema relativo a $h_1[n]$ è stabile (la circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza) e non è causale.
Il sistema relativo a $h_2[n]$ è non stabile (la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza) e non è causale (segnale sinistro).

Esercizio N. 3

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente espressione:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \cos(\pi \tau) & per \ |\tau| \le \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il processo aleatorio è posto all'ingresso di un sistema LTI che esegue la trasformata di Hilbert. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

Soluzione esercizio 3

Un sistema che esegue la trasformata di Hilbert ha una risposta in frequenza $H(f)$ pari a $-j\,\mathrm{sgn}(f)$. Di conseguenza, poiché $|H(f)|^2 = 1$, il processo di uscita avrà la stessa densità spettrale di potenza di quello di ingresso. Essendo il processo stazionario, anche la funzione di autocorrelazione sarà identica a quella del processo di ingresso.

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = \cos(2\pi\, f\, t + \phi)$$

ove f è una variabile aleatoria che assume i valori 1 MHz e 2 MHz, con probabilità pari rispettivamente a $\frac{1}{3}$, e $\frac{3}{3}$. La fase ϕ è una variabile aleatoria indipendente da f ed è uniformemente distribuita tra 0 e $\frac{\pi}{3}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

<u>Soluzione esercizio 4</u>

La soluzione dell'esercizio comporta il calcolo del valor medio temporale e della funzione di autocorrelazione temporale per ciascuna realizzazione del processo. Poiché ogni realizzazione è una sinusoide, per ciascuna di esse il valor medio temporale è sicuramente nullo.

La funzione di autocorrelazione temporale risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi f t + \phi)\cos[2\pi f (t+\tau) + \phi]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{1}{2} \left\{ \int_{-T/2}^{+T/2} \cos[2\pi f (2t+\tau) + \phi]dt + \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi f \tau)dt \right\} = \frac{1}{2}\cos(2\pi f \tau)$$

Essa dipende dalla variabile f e pertanto dipende dalla realizzazione. Il processo quindi non è regolare.

<u>Esercizio N. 5</u>

Il processo aleatorio $\{x(t)\}$ è così definito: $x(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$, con:

A variabile distribuita tra 0 e 1 con densità di probabilità $p_A(A) = kA^2$ (k costante da determinare);

ϕ variabile aleatoria uniformemente distribuita distribuita tra 0 e 2π ;

f variabile aleatoria distribuita tra 0 e 10 Hz con densità di probabilità:

$$p_f(f) = \frac{1}{50}(10 - f)$$

Le variabili aleatorie A, f e ϕ sono tra loro indipendenti.

Dire (giustificando la risposta) se il processo è stazionario in senso lato. Quanto vale la densità spettrale di potenza unilatera del processo aleatorio?

<u>Soluzione esercizio 5</u>

Per decidere sulla stazionarietà del processo bisogna analizzare le proprietà della sua funzione di autocorrelazione e del suo valor medio.

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$= \int_0^1 dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{10} df \left\{A\cos(2\pi f t + \phi) A\cos[2\pi f (t+\tau) + \phi] p_A(A) p_\phi(\phi) p_f(f)\right\}$$

$$= \int_0^1 dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{10} df \left\{ \frac{A^2}{2} \cos[2\pi f(2t+\tau)+2\phi] p_A(A) p_\phi(\phi) p_f(f) \right\} +$$

$$+ \int_0^1 dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{10} df \left\{ \frac{A^2}{2} (\cos 2\pi f\tau) p_A(A) p_\phi(\phi) p_f(f) \right\}$$

con $p_A(A) = \begin{cases} 3A^2 & 0 \le A \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$, $p_\phi(\phi) = \begin{cases} 1/2\pi & 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 & altrove \end{cases}$,

$$p_f(f) = \begin{cases} \frac{1}{50}(10-f) & 0 \le f \le 10 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Eseguendo per prima cosa l'integrale in ϕ, la prima parte si annulla, mentre la seconda parte è pari a

$$R_x(t,t+\tau) = \int_0^1 dA \int_0^{10} df \left\{ \frac{A^2}{2} (\cos 2\pi f\tau) p_A(A) p_f(f) \right\}$$

Per decidere sulla stazionarietà del processo, non occorre calcolare questo integrale doppio: basta semplicemente osservare che esso dipende soltanto da τ.

Valor medio:

$$E[x(t)] = \int_0^1 dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{10} df \{ A\cos(2\pi f t+\phi) p_A(A) p_\phi(\phi) p_f(f) \}$$

Ancora una volta eseguendo dapprima l'integrazione nella variabile ϕ, si vede che $E[x(t)] = 0$, indipendente da t. In conclusione il processo è stazionario, almeno in senso debole.

Per il calcolo della densità spettrale di potenza si osservi che ogni realizzazione è una sinusoide, cui compete una potenza pari a $\frac{A^2}{2}$. Siccome A è distribuita tra 0 e 1, la potenza media del processo è pari a $\int_0^1 \frac{A^2}{2} p_A(A) dA = \int_0^1 3\frac{A^4}{2} dA = \frac{3}{10}$.

Questa potenza è distribuita nella banda tra 0 e 10 Hz, con legge proporzionale alla $p_f(f)$. Pertanto:

$$S_x(f) = \begin{cases} C\frac{1}{50}(10-f) & 0 \le f \le 10 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La costante C va calcolata imponendo che $\int_0^{10} S_x(f) df = \frac{3}{10}$. Risulta $C = \frac{3}{10}$.