Teoria dei Segnali

(Appello del 11 febbraio 2005)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo-continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile e causale. Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = \sin(2t)$

Soluzione

La risposta impulsiva è nulla per $t < 0$ e quindi il sistema è causale. Inoltre:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = 1$$

Ciò significa che il sistema è anche stabile.

Scrivendo il segnale di ingresso nella forma $x(t) = \frac{e^{j2t}}{j2} - \frac{e^{-j2t}}{j2}$, si vede facilmente che la risposta sarà pari a $H(2)\frac{e^{j2t}}{2j} - H(-2)\frac{e^{-j2t}}{2j} = \mathrm{Re}\left\{H(2)\frac{e^{j2t}}{j}\right\}$. La risposta in frequenza è data da $\frac{1}{1+j\omega}$. Si ricava pertanto:

$$y(t) = -\frac{1}{5}\left[2\cos(2t) - \sin(2t)\right]$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo-discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = (-1)^n u[n]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n] = u[n-1]$.

Soluzione

Eseguendo la somma di convoluzione, si vede che la risposta è nulla per $n < 1$, uguale a 1 per n dispari e uguale a zero per n pari. Può essere indicata convenzionalmente come $y[n] = u\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

<u>Esercizio N. 3</u>

Un sistema LTI tempo-discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$.

Soluzione

Il segnale $x[n]$ è combinazione lineare di due autofunzioni: infatti $x[n] = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}}{2j} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2j}$. La risposta sarà pari a:

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}}{2j} - H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{2j} = \mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{e^{j\frac{\pi}{2}n}}{j}\right\}.$$

La risposta in frequenza è data da $\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$ e dunque $H\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{1+j\frac{1}{2}} = \frac{4}{5} - j\frac{2}{5}$.

Il segnale all'uscita del sistema sarà $y[n] = -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \frac{4}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

<u>Esercizio N. 4</u>

Si consideri il segnale $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\{\cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_1 t)\}$, con $\omega_1 > \omega_0$. Sotto le seguenti ipotesi:

$$T >> \frac{2\pi}{\omega_0}$$
$$T >> \frac{2\pi}{\omega_1}$$

esso può essere considerato un segnale passa banda. Scrivere le espressioni della parte in fase e della parte in quadratura del segnale $x(t)$ rispetto alla frequenza angolare ω_1.

Soluzione

Si calcoli innanzitutto il segnale analitico associato a $x(t)$. Per una nota proprietà della trasformata di Hilbert, e potendo considerare con ottima approssimazione che lo spettro di $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ non è sovrapposto a quelli di $\cos(\omega_0 t)$ e di $sin(\omega_1 t)$, si avrà:

$$\hat{x}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\{\sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)\}$$

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\{e^{j\omega_0 t} + je^{j\omega_1 t}\}$$

Poiché $\tilde{x}(t) = x_+(t)e^{-j\omega_1 t}$, risulta $\tilde{x}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\{e^{-j(\omega_1-\omega_0)t} + j\}$. Pertanto:

$$x_c(t) = \mathrm{Re}[\tilde{x}(t)] = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(\omega_1 - \omega_0)t$$

$$x_s(t) = \mathrm{Im}[\tilde{x}(t)] = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\{1 - \sin(\omega_1 - \omega_0)t\}$$

<u>Esercizio N. 5</u>

Un processo aleatorio è associato all'esperimento del lancio di due monete. La corrispondenza tra uscite elementari dell'esperimento e realizzazioni del processo aleatorio è la seguente:

$$TT \rightarrow x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$TC \rightarrow x(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$CT \rightarrow x(t) = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$CC \rightarrow x(t) = \cos(\omega_0 t + \pi)$$

ove ω_0 è una costante.

Dire, giustificando le risposte, se il processo è (in senso debole) stazionario e/o regolare

.

Soluzione

Calcolo del valor medio:
Si noti che:

$$\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_0 t)$$
$$\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\omega_0 t)$$
$$\cos(\omega_0 t + \pi) = -\cos(\omega_0 t)$$
$$E[x(t)] = \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t) = 0$$

Funzione di auto correlazione

$$R_x(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) + \frac{1}{4}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) +$$
$$+ \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau)) + \frac{1}{4}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau))$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Il processo è stazionario.

Per tutte le realizzazioni il valor medio temporale è nullo. La funzione di autocorrelazione temporale per la prima e per la seconda realizzazione risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Per la terza e quarta realizzazione si ha:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Il processo aleatorio è regolare.

<u>Esercizio N. 6</u>

All'ingresso del sistema di figura 1 è applicato un processo aleatorio $\{x(t)\}$ stazionario gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza bilatera pari a 1 W/Hz. Calcolare la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di potenza del processo di uscita.

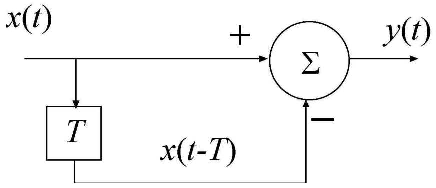

Fig. 1

Soluzione

La risposta impulsiva del sistema è pari a $\delta(t)-\delta(t-T)$ e la sua risposta in frequenza è pari a $1-e^{-j\omega T}$. Risulta quindi:

$$S_y(\omega)=S_x(\omega)|H(\omega)|^2=\left|1-e^{-j\omega T}\right|^2$$

$$=1+\cos^2(\omega T)+\sin^2(\omega T)-2\cos(\omega T)=4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$R_y(\tau)=2\delta(\tau)-\delta(\tau-T)-\delta(\tau+T)$$