Teoria dei Segnali

Prova scritta – appello del 15 settembre 2005

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = u(t)$$

Calcolare la sua risposta al segnale di ingresso $x(t) = \delta(2t)$.

Soluzione

Dalla proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(2t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}$$

si deduce che $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$. Pertanto la risposta del sistema è pari a $\frac{1}{2}u(t)$.

Esercizio N. 2

La trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ è pari a $\frac{3}{5 + j\omega - 6\omega^2}$. Dire, giustificando la risposta, se il segnale $x(t)$ è reale o complesso. Scrivere inoltre l'espressione della trasformata di Fourier del segnale $x_1(t) = x\left(3 - \frac{t}{2}\right)$.

Soluzione

La funzione $X(\omega) = \frac{3}{5 + j\omega - 6\omega^2}$ soddisfa alla condizione $X(-\omega) = X^*(\omega)$. Quindi la funzione $x(t)$ è sicuramente reale. La trasformata di $x_1(t) = x\left(3 - \frac{t}{2}\right)$ può essere determinata attraverso i seguenti cambiamenti di variabile e corrispondenti proprietà della trasformata di Fourier.

a) $t \to -t$ $\qquad X_a(\omega) = X^*(\omega) = \dfrac{3}{5 - j\omega - 6\omega^2}$

b) $t \to t - 3$ $\qquad X_b(\omega) = X_a(\omega)e^{-j3\omega} = \dfrac{3e^{-j3\omega}}{5 - j\omega - 6\omega^2}$

c) $t \to \frac{t}{2}$ $\qquad X_c(\omega) = 2X_b(2\omega) = \dfrac{6e^{-j6\omega}}{5 - j2\omega - 24\omega^2}$

Esercizio N. 3

La risposta all'impulso $\delta[n-k]$ (centrato cioè in $n=k$) di un sistema lineare è pari a $\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+2k)}u[n]$. Calcolare la sua risposta al segnale $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$.

Soluzione

La risposta è data dalla seguente sommatoria:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+2k)}u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$$

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

Esercizio N. 4

Calcolare la trasformata Z del segnale $x[n]=\delta[n-4]+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n-4]$.

Soluzione

Il segnale $x[n]$ può essere posto nella forma $x[n]=\delta[n-4]+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}u[n-4]$, che corrisponde al segnale $y[n-4]$, avendo indicato con $y[n]$ il segnale $\delta[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$. Poiché la trasformata Z di $y[n]$ è:

$$Y(z)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},$$

quella di $x[n]$ sarà $X(z)=z^{-4}+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\frac{z^{-4}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$.

Esercizio N. 5

Si consideri il processo aleatorio $s(t)=m(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi)$, in cui $m(t)$ è un processo aleatorio stazionario a valor medio nullo, f_0 è una costante e ϕ è una variabile aleatoria che assume solamente i valori $+\pi/2$ e $-\pi/2$ in modo equiprobabile. Si dica, giustificando la risposta, se il processo è stazionario in senso debole.

Si esprima la densità spettrale bilatera di potenza di $s(t)$ in funzione di $M(f)$, densità spettrale bilatera di potenza di $m(t)$.

Soluzione

Calcolo del valor medio:

$E[m(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi)] = E[m(t)]E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)] = 0$, indipendente da *t*.

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

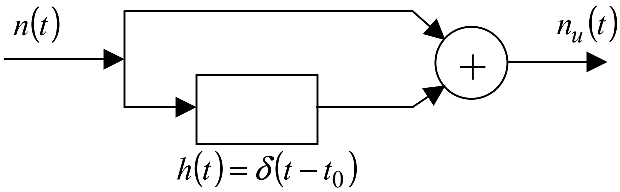
$$\begin{aligned} R_s(t,t+\tau) &= E[\{m(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi)\}\{m(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\}] \\ &= E[m(t)m(t+\tau)]E[\{\cos(2\pi f_0 t+\phi)\}\{\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\}] \\ &= R_m(\tau)\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau) - \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau))\right] \end{aligned}$$

Il processo non è stazionario.

La densità spettrale di potenza risulta quella che si ottiene traslando $M(f)$ attorno a $\pm f_0$, con coefficiente moltiplicativo pari a $1/4$.

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ ha una densità spettrale di potenza bilatera pari a $1/2$ W/Hz.. Esso viene elaborato dal sistema LTI indicato in figura. Si calcoli la densità spettrale di potenza e la funzione di autocorrelazione del processo $n_u(t)$ presente all'uscita del sistema.



Soluzione

Il sistema ha una risposta in frequenza $H(f) = 1 + e^{-j2\pi f t_0}$. Pertanto:

$$\begin{aligned} S_u(f) &= \frac{1}{2}|H(f)|^2 = \frac{1}{2}\left[1+\cos^2(2\pi f t_0) + 2\cos(2\pi f t_0) + \sin^2(2\pi f t_0)\right] \\ &= 1 + \cos(2\pi f t_0) = 2\cos^2(\pi f t_0) \end{aligned}$$

Antitrasformando secondo Fourier, si ottiene:

$$R_u(\tau) = \delta(\tau) + \frac{1}{2}[\delta(\tau - t_0) + \delta(\tau + t_0)]$$