Teoria dei Segnali

(Appello del 03 luglio 2006)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La risposta di un sistema lineare all'impulso ideale centrato in t_0 è pari a $e^{-2t}\,u(t-t_0)$.

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t)=\sin(\omega_0 t)u(t)$.

Soluzione

Il sistema non risulta lempo invariante (perché?): Pertanto la risposta è data dal seguente integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\omega_0\tau)e^{-2t}u(t-\tau)u(\tau)d\tau=e^{-2t}\int_{0}^{+\infty}\sin(\omega_0\tau)u(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$y(t)=\begin{cases}0 & \text{per } t<0\\ e^{-2t}\displaystyle\int_0^t\sin(\omega_0\tau)d\tau=e^{-2t}\left\{\frac{1-\cos(\omega_0 t)}{\omega_0}\right\} & \text{per } t>0\end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la risposta impulsiva $h[n]$ indicata in figura1.

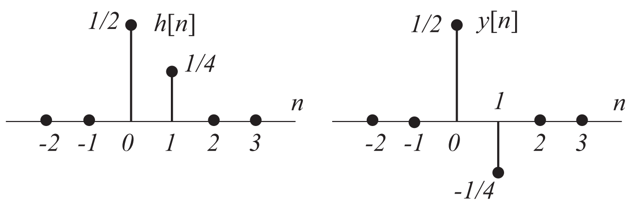


Fig. 1

Individuare il segnale $x[n]$ cui corrisponde la risposta $y[n]$ di figura 1. Qual è la risposta del sistema al segnale $x_1[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$?

Soluzione

Il sistema ha la risposta in frequenza: $H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j\Omega}$, mentre il segnale $y[n]$ ha come trasformata la funzione $Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}$. Il segnale di ingresso dovrà pertanto avere trasformata di Fourier pari a

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Ad essa corrisponde il segnale

$$x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n]+u[n-1]\}$$

La risposta al segnale $x_1[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$ è fornita dall'espressione:

$$y_1[n]=H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Esercizio N. 3

Un segnale tempo discreto $x[n]$ ha il seguente spettro:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{5}e^{-j5\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}.$$

Come è fatto il segnale $x[n]$? Determinare lo spettro del segnale $y[n]=x[1-2n]$.

Soluzione

L'espressione di $X\left(e^{j\Omega}\right)$ corrisponde alla somma dei primi 5 termini della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\Omega n}$, per cui il segnale $x[n]$ è quello mostrato in fig. I. In fig. II sono riportati in sequenza i segnali $x[-n]$, $x[1-n]$, $x[1-2n]$.

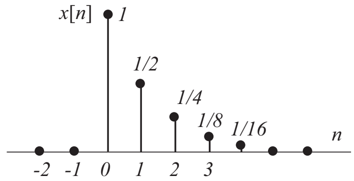


Fig. I

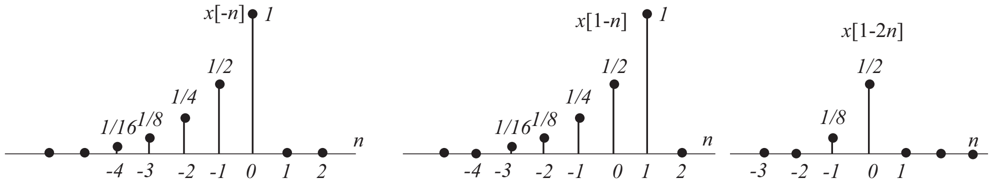


Fig. II

Lo spettro richiesto è dunque: $Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}e^{j\Omega}$.

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio passa banda è data da:

$$s(t)=\cos(2\pi f_0 t)+\cos(2\pi f_0 t+\phi)$$

ove f_0 è una costante e ϕ è una variabile aleatoria distribuita uniformemente tra 0 e π. Determinare il suo inviluppo complesso e calcolare la probabilità che l'inviluppo naturale sia maggiore di $\sqrt{3}$.

Soluzione

Scrivendo $s(t)$ in forma canonica si vede immediatamente che l'inviluppo complesso ha la seguente espressione:

$$\tilde{s}(t)=1+e^{j\phi}$$

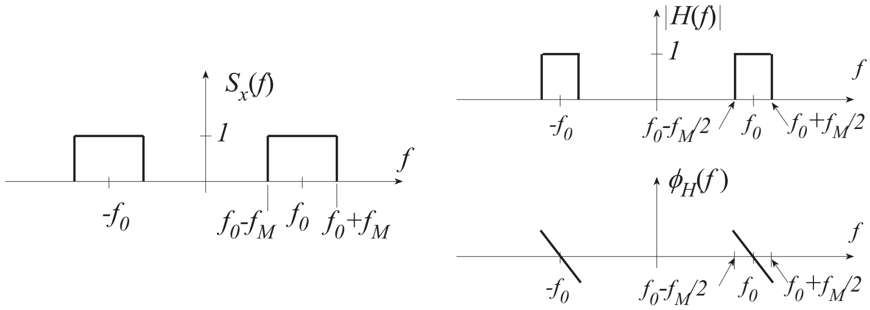
Il suo modulo, detto appunto "inviluppo naturale", è pari a:

$$a(t)=\sqrt{(1+\cos\phi)^2+\sin^2\phi}=\sqrt{2(1+\cos\phi)}=2\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|$$

Esso vale $\sqrt{3}$ in corrispondenza a $\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi per $\frac{\phi}{2}=\arccos\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30°\,\mathrm{e}\,150°$. L'inviluppo naturale supererà il valore $\sqrt{3}$ se $0°<\phi<60°$ oppure se $300°<\phi<360°$. Tale evento ha probabilità $1/3$.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario ha la densità spettrale di potenza rappresentata in figura 2a. Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI, la cui risposta in frequenza è raffigurata in figura 2b. Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio presente all'uscita del sistema.



Soluzione

La densità spettrale di potenza del processo di uscita non dipende dalla caratteristica di fase del sistema ed è data da:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = |H(f)|^2$$

La funzione di autocorrelazione può essere calcolata come antitrasformata di Fourier di $S_y(f)$ e pertanto:

$$R_x(\tau) = f_M \operatorname{sinc}(f_M \tau)\left[e^{j2\pi f_0 \tau} + e^{-j2\pi f_0 \tau}\right] = 2 f_M \operatorname{sinc}(f_M \tau)\cos(2\pi f_0 \tau).$$

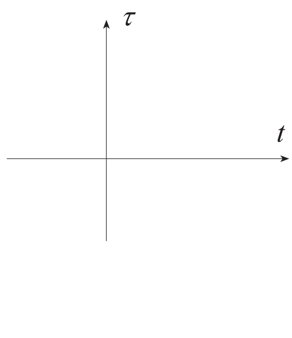
Esercizio N. 6

Si consideri il processo aleatorio associato all'esperimento "lancio di una moneta", in cui alle uscite "testa" e "croce" corrispondono rispettivamente le funzioni:

$$x_1(t) = e^{-t+1}u(t-1)$$

$$x_2(t) = e^{t+1}u(-t-1)$$

Si indichi, sul piano (t,τ), il dominio ove la funzione di auto correlazione $R_x(t,t+\tau)$ è nulla.

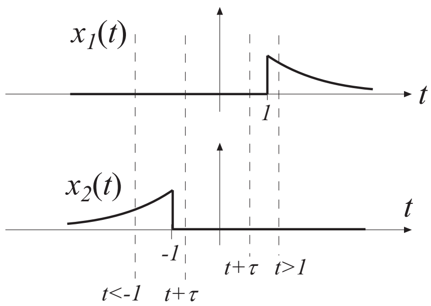


Soluzione

La funzione di autocorrelazione risulta essere:

$$R(t,t+\tau)=\frac{1}{2}x_1(t)x_1(t+\tau)+\frac{1}{2}x_2(t)x_2(t+\tau)$$

In figura sono riportate le due realizzazioni distinte. Poiché i due addendi non sono mai negativi, la funzione di autocorrelazione sarà nulla solo se essi saranno entrambi nulli.



Se $|t|<1$, ciò si verifica per qualsiasi valore di τ. Se $t>1$, si ha che $\frac{1}{2}x_2(t)x_2(t+\tau)=0$ per qualsiasi valore di τ, mentre $\frac{1}{2}x_1(t)x_1(t+\tau)=0$ soltanto se $\tau<-t+1$. Analogamente, se $t<-1$ il primo addendo sarà sempre nullo mentre il secondo lo sarà solo per $\tau>-t-1$. In conclusione, la funzione di autocorrelazione è nulla nella zona del piano (t,τ) tratteggiata nella seguente figura: