PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

21 dicembre 2006

Esercizio N. 1

Si consideri il segnale passa banda $s(t) = (1 + x(t))\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$, ove $x(t)$ è un segnale a banda limitata ad una frequenza $f_{\max} << f_0$.

Valutare l'inviluppo complesso della trasformata di Hilbert di $s(t)$.

Soluzione esercizio 1

La trasformata di Hilbert di $s(t)$ è $\hat{s}(t) = (1 + x(t))\sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$, che può essere messo nella forma:

$$\hat{s}(t) = \mathrm{Re}\left\{ -j(1 + x(t))e^{j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{3}} \right\}$$

da cui risulta che l'inviluppo complesso della trasformata di Hilbert di $s(t)$ è

$$\tilde{\hat{s}}(t) = -j(1 + x(t))e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

Esercizio N. 2

Un processo aleatorio ha solamente tre realizzazioni distinte; $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \cos(t)$, $x_3(t) = \sin(t)$, ognuna caratterizzata da una probabilità pari a $1/3$. Si calcoli il valor medio del processo e la sua funzione di auto correlazione $R_x(t, t+\tau)$. Si dica se la funzione di auto correlazione dipende da t e τ, ovvero solamente da τ.

Soluzione esercizio 2

Valor medio al generico istante *t*: $m(t) = \frac{1}{3}\{1 + \cos(t) + \sin(t)\}$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{3}(1 + \cos(t)\cos(t+\tau) + \sin(t)\sin(t+\tau)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos(\tau)$$

Come si vede, la funzione di auto correlazione dipende solamente da τ.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$

in cui A è una variabile aleatoria gaussiana con valor medio nullo e varianza pari a 1. Calcolare il valor medio e la funzione di autocorrelazione di tale processo
Dire, giustificando la risposta, se il processo è (o non è) stazionario in senso debole.

Soluzione esercizio 3

La densità di probabilità della variabile aleatoria A è $p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}}$. Il valor medio del processo risulta essere:

$$m_x(t) = E[A\sin(2\pi f_0 t)] = \sin(2\pi f_0 t) E[A] = 0$$

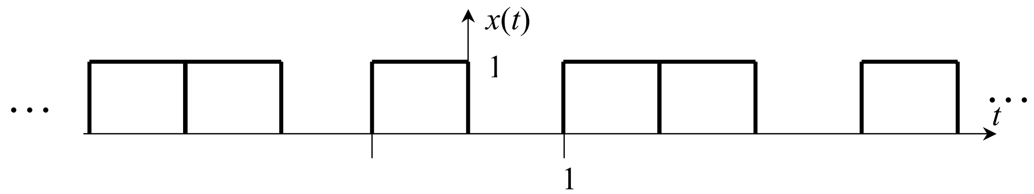
mentre la funzione di autocorrelazione è:

$$\begin{aligned} R_x(t, t+\tau) &= E\left[A^2 \sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau))\right] = E\left[A^2\right]\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau)) \\ &= \sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau)) \end{aligned}$$

Il processo non è stazionario.

Esercizio N. 4

In figura è riportata la generica realizzazione di un processo aleatorio, costituita da una sequenza di impulsi rettangolari di durata pari a 1, che assumono ampiezza 0 o 1 in maniera equiprobabile e indipendente gli uni dagli altri. Il periodo della successione di impulsi è unitario.



Calcolare il valor medio del processo.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario. Calcolare la funzione di auto correlazione per $t_1 = 0.5, t_2 = 0.6$ e per $t_1 = 0.5, t_2 = 1.6$.

Soluzione esercizio 4

Per il generico istante t il valor medio è $\frac{1}{2}$. In entrambi gli istanti $t_1 = 0.5, t_2 = 0.6$ una realizzazione assume o il valore zero oppure il valore 1. Pertanto $R_x(0.5,0.6) = \frac{1}{2}$. Gli istanti $t_1 = 0.5, t_2 = 1.6$ cadono in due distinti intervalli, per cui si possono verificare (con probabilità $\frac{1}{4}$) i seguenti casi:

a) $x(0.5) = 1, x(1.6) = 0 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$
b) $x(0.5) = 0, x(1.6) = 0 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$
c) $x(0.5) = 1, x(1.6) = 1 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 1$
d) $x(0.5) = 0, x(1.6) = 1 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$

Quindi $R_x(0.5,1.6) = \frac{1}{4}$.
Il processo non è stazionario, poiché preso un valore di $\tau = (t_2 - t_1) < 1$, la funzione di autocorrelazione è diversa a seconda se sia t_2 sia t_1 cadono nello stesso intervallo o in intervalli adiacenti. Quindi essa, oltre che da τ, dipende anche da *t*.

<u>Esercizio N. 5</u>

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + k\frac{\pi}{2}\right),$$

in cui *A* e ω_0 sono delle costanti, mentre *k* è una variabile aleatoria che può assumere i valori 0, 1, 2 e 3 con probabilità rispettivamente pari a $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione esercizio N. 5

E' evidente che tutte le realizzazioni hanno valor medio nullo. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, va osservato innanzitutto che la probabilità associata ai valori della variabile k non influenza l'eventuale proprietà di regolarità.

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} A^2\cos\left(\omega_0 t + k\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega_0(t+\tau) + k\frac{\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + k\pi)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\omega_0\tau)dt = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Essa è indipendente dalla realizzazione, quindi il processo è regolare

Esercizio N. 6

In figura 1a è riportata la densità spettrale di potenza di un processo aleatorio stazionario gaussiano. Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI la cui risposta in frequenza è mostrata in fig 1b. Dare l'espressione delle densità di probabilità del primo ordine del processo all'ingresso e di quello all'uscita del sistema LTI.

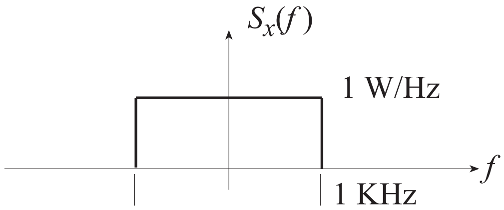


Fig. 1a

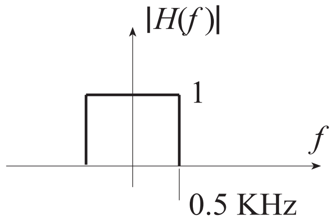


Fig. 1b

Soluzione esercizio N. 6

I processi di ingresso e di uscita sono entrambi gaussiani a valor medio nullo (perché?), e per essi dunque è semplice valutare la varianza, che coincide con il valore quadratico medio, cioè con la potenza media. Dalla densità spettrale di potenza risulta:

$$\sigma_x^2 = 2000\,W \qquad \sigma_y^2 = 1000\ W$$

Le densità di probabilità cercate sono quindi: $p_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 2000}} e^{-\frac{x^2}{4000}}$ e

$$p_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 1000}} e^{-\frac{y^2}{2000}}$$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

21 dicembre 2005

Esercizio N. 1

Si consideri la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto che possono avere tale funzione di trasferimento?
Di essi, uno è stabile: qual è la sua risposta impulsiva?

Soluzione esercizio 1

La funzione $H(z)$ può essere posta nella forma:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{2}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right\}$$

I sistemi che possono avere tale funzione di trasferimento sono 2, uno (sinistro) con regione di convergenza $|z| < \frac{1}{2}$ e l'altro (destro) con regione di convergenza $|z| > \frac{1}{2}$. Quest'ultimo, che contiene la circonferenza di raggio unitario, è stabile ed ha risposta impulsiva:

$$h[n] = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}u[n-1]$$

Esercizio N. 2

Un processo aleatorio ha solamente tre realizzazioni distinte; $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = \cos(t-1)$, $x_3(t) = \sin(t-1)$, ognuna caratterizzata da una probabilità pari a $1/3$. Si calcoli il valor medio del processo e la sua funzione di auto correlazione $R_x(t, t+\tau)$. Si dica se la funzione di auto correlazione dipende da t e τ, ovvero solamente da τ.

Soluzione esercizio 2

Valor medio al generico istante *t*: $m(t) = \frac{1}{3}\{1 + \cos(t-1) + \sin(t-1)\}$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{3}\left(1 + \cos(t-1)\cos(t-1+\tau) + \sin(t-1)\sin(t-1+\tau)\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos(\tau)$$

Come si vede, la funzione di auto correlazione dipende solamente da τ.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$$

in cui A è una variabile aleatoria gaussiana con valor medio $m = 1$ e varianza pari a 2. Calcolare il valor medio e la funzione di autocorrelazione.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è (o non è) stazionario in senso debole.

Soluzione esercizio 3

La densità di probabilità della variabile aleatoria A è $p(A) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(A-1)^2}{4}}$.

Il valor medio del processo risulta essere:

$$m_x(t) = E[A\sin(2\pi f_0 t)] = E[A]\sin(2\pi f_0 t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

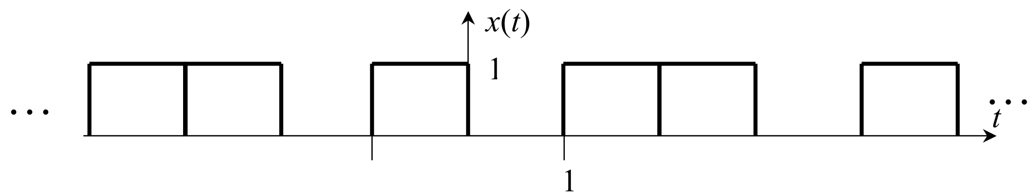
mentre la funzione di autocorrelazione è:

$$R_x(t, t+\tau) = E\left[A^2 \sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau))\right] = E\left[A^2\right]\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau))$$
$$= \left(\sigma_A^2 + m_A^2\right)\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau)) = 3\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau))$$

Il processo non è stazionario.

Esercizio N. 4

In figura è riportata la generica realizzazione di un processo aleatorio, costituita da una sequenza di impulsi rettangolari di durata pari a 1, che assumono ampiezza 0 o 1 in maniera equiprobabile e indipendente gli uni dagli altri. Il periodo della successione di impulsi è unitario.



Calcolare il valor medio del processo.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario. Calcolare la funzione di auto correlazione per $t_1 = 0.8, t_2 = 1.2$ e per $t_1 = 1.5, t_2 = 1.6$

Soluzione esercizio 4

Per il generico istante t il valor medio è $\frac{1}{2}$. In entrambi gli istanti $t_1 = 1.5, t_2 = 1.6$ una realizzazione assume o il valore zero oppure il valore 1. Pertanto

$R_x(1.5,1.6)=\frac{1}{2}$. Gli istanti $t_1=0.8, t_2=1.2$ cadono in due distinti intervalli, per cui si possono verificare (con probabilità $\frac{1}{4}$) i seguenti casi:

a) $x(0.8)=1,\ x(1.2)=0 \to x(t_1)x(t_2)=0$
b) $x(0.8)=0,\ x(1.2)=0 \to x(t_1)x(t_2)=0$
c) $x(0.8)=1,\ x(1.2)=1 \to x(t_1)x(t_2)=1$
d) $x(0.8)=0,\ x(1.2)=1 \to x(t_1)x(t_2)=0$

Quindi $R_x(0.8,1.2)=\frac{1}{4}$.

Il processo non è stazionario, poiché preso un valore di $\tau=(t_2-t_1)<1$, la funzione di autocorrelazione è diversa a seconda se sia t_2 sia t_1 cadono nello stesso intervallo o in intervalli adiacenti. Quindi essa, oltre che da τ, dipende anche da *t*.

Esercizio N. 5

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t)=A\cos\left(k\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right),$$

in cui *A* e ω_0 sono delle costanti, mentre *k* è una variabile aleatoria che può assumere i valori *1*, *2* e *3* con probabilità rispettivamente pari a $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione esercizio 5

E' evidente che tutte le realizzazioni hanno valor medio nullo. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, va osservato innanzitutto che la probabilità associata ai valori della variabile k non influenza l'eventuale proprietà di regolarità.

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}A^2\cos\left(k\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(k\omega_0(t+\tau)+\frac{\pi}{4}\right)dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos\left(2k\omega_0 t+k\omega_0\tau+\frac{\pi}{2}\right)dt+\lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(k\omega_0\tau)dt=\frac{A^2}{2}\cos(k\omega_0\tau)$$

Essa dipende, tramite la variabile *k*, dalla realizzazione e quindi il processo non è regolare.

Esercizio N. 6

In figura 1a è riportata la densità spettrale di potenza di un processo aleatorio stazionario gaussiano. Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI la cui risposta in frequenza è mostrata in fig 1b. Dare l'espressione delle densità di probabilità del primo ordine del processo all'ingresso e di quello all'uscita del sistema LTI.

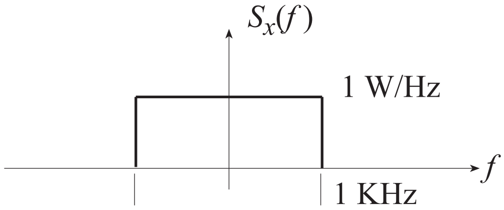


Fig. 1a

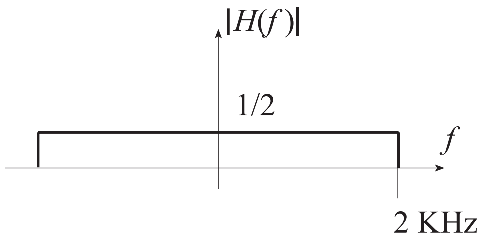


Fig. 1b

Soluzione esercizio 6

I processi di ingresso e di uscita sono entrambi gaussiani a valor medio nullo (perché?), e per essi dunque è semplice valutare la varianza, che coincide con il valore quadratico medio, cioè con la potenza media. Dalla densità spettrale di potenza risulta:

$$\sigma_x^2 = 2000 \quad W \qquad \sigma_y^2 = 500 \quad W$$

Le densità di probabilità cercate sono quindi date da:

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2000}} e^{-\frac{x^2}{4000}} \qquad p_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 500}} e^{-\frac{y^2}{1000}}$$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

21 dicembre 2006

Esercizio N. 1

Si consideri il segnale passa banda $s(t) = (1 + x(t))\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$, ove $x(t)$ è un segnale a banda limitata ad una frequenza $f_{\max} << f_0$.

Scrivere l'espressione della parti in fase e in quadratura di $s(t)$. Dire a quale condizione deve sottostare $x(t)$ affinché l'inviluppo naturale di $s(t)$ sia uguale a $1 + x(t)$

Soluzione esercizio 1

Il segnale $s(t)$ può essere messo nella forma:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{(1 + x(t))e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

da cui risulta che il suo inviluppo complesso è

$$\tilde{s}(t) = (1 + x(t))e^{j\frac{\pi}{3}} = \underbrace{\frac{1}{2}(1 + x(t))}_{s_c(t)} + j\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + x(t))}_{s_s(t)}.$$

L'inviluppo naturale è dato da $|1 + x(t)|$ e coinciderà con $1 + x(t)$ se $|x_{\min}(t)| \leq 1$

Esercizio N. 2

Un processo aleatorio ha solamente tre realizzazioni distinte; $x_1(t) = \cos(t)$, $x_2(t) = -\sin(t)$, $x_3(t) = \sin(t)$, caratterizzate da una probabilità rispettivamente pari a $1/2,\ \ 1/4,\ \ 1/4$. Si calcoli il valor medio del processo e la sua funzione di auto correlazione $R_x(t, t + \tau)$. Si dica se la funzione di auto correlazione dipende da t e τ, ovvero solamente da τ.

Soluzione esercizio 2

Valor medio al generico istante *t*: $m(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{4}\{-\sin(t) + \sin(t)\} = \frac{1}{2}\cos(t)$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t + \tau) = \frac{1}{2}\cos(t)\cos(t + \tau) + \frac{1}{4}\sin(t)\sin(t + \tau) + \frac{1}{4}\sin(t)\sin(t + \tau) = \frac{1}{2}\cos(\tau)$$

Come si vede, la funzione di auto correlazione dipende solamente da τ.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = At$$

in cui A è una variabile aleatoria gaussiana con valor medio nullo e varianza pari a 1. Calcolare il valor medio e la funzione di autocorrelazione.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è (o non è) stazionario in senso debole.

Soluzione esercizio 3

La densità di probabilità della variabile aleatoria A è $p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A^2}{2}}$.

Il valor medio del processo risulta essere:

$$m_x(t) = E[At] = E[A]t = 0$$

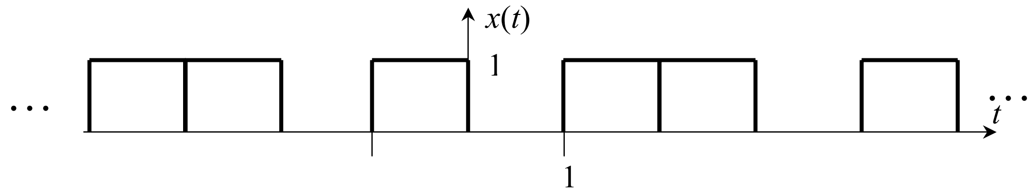
mentre la funzione di autocorrelazione è:

$$R_x(t, t+\tau) = E\left[A^2 t(t+\tau)\right] = E\left[A^2\right] t(t+\tau) = t(t+\tau)$$

Il processo non è stazionario.

Esercizio N. 4

In figura è riportata la generica realizzazione di un processo aleatorio, costituita da una sequenza di impulsi rettangolari di durata pari a 1, che assumono ampiezza 0 o 1 in maniera equiprobabile e indipendente gli uni dagli altri. Il periodo della successione di impulsi è unitario.



Calcolare il valor medio del processo.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario. Calcolare la funzione di auto correlazione per $t_1 = 0.5, t_2 = 15$ e per $t_1 = 0.4, t_2 = 0.44$

Soluzione esercizio 4

Per il generico istante t il valor medio è $\frac{1}{2}$. In entrambi gli istanti $t_1 = 0.4, t_2 = 0.44$ una realizzazione assume o il valore zero oppure il valore 1. Pertanto $R_x(0.4, 0.44) = \frac{1}{2}$. Gli istanti $t_1 = 0.5, t_2 = 15$ cadono in due distinti intervalli, per cui si possono verificare (con probabilità $\frac{1}{4}$) i seguenti casi:

a) $x(0.5) = 1, x(15) = 0 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$
b) $x(0.5) = 0, x(15) = 0 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$
c) $x(0.5) = 1, x(15) = 1 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 1$
d) $x(0.5) = 0, x(15) = 1 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$

Quindi $R_x(0.5, 15) = \frac{1}{4}$.
Il processo non è stazionario, poiché preso un valore di $\tau = (t_2 - t_1) < 1$, la funzione di autocorrelazione è diversa a seconda se sia t_2 sia t_1 cadono nello stesso intervallo o in intervalli adiacenti. Quindi essa, oltre che da τ, dipende anche da *t*.

Esercizio N. 5

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right),$$

in cui ω_0 è una costante, mentre *A* è una variabile aleatoria che può assumere i valori $+1$, -1 con probabilità rispettivamente pari a $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione esercizio N. 5

E' evidente che tutte le realizzazioni hanno valor medio temporale nullo. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, va osservato innanzitutto che la probabilità associata ai valori della variabile *A* non influenza l'eventuale proprietà di regolarità. La funzione di autocorrelazione presenta la stessa espressione per entrambe le due realizzazioni distinte:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\omega_0 (t+\tau) + \frac{\pi}{6}\right)dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos\left(2\omega_0 t + \omega_0\tau + \frac{\pi}{3}\right)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\omega_0\tau)dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Essa non dipende dalla realizzazione e quindi il processo è regolare.

Esercizio N. 6

In figura 1a è riportata la densità spettrale di potenza di un processo aleatorio stazionario gaussiano. Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI che ha la risposta in frequenza indicata in figura 1b. Dare l'espressione delle densità di probabilità del primo ordine del processo all'ingresso e di quello all'uscita del sistema LTI.

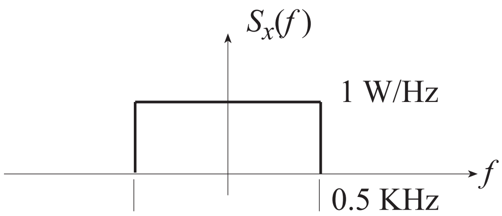


Fig. 1a

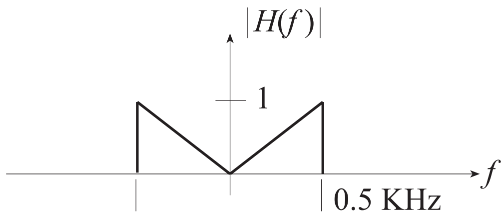


Fig. 1b

Soluzione esercizio 6

I processi di ingresso e di uscita sono entrambi gaussiani a valor medio nullo (perché?), e per essi dunque è semplice valutare la varianza, che coincide con il valore quadratico medio, cioè con la potenza media. Dalla densità spettrale di potenza risulta:

$$\sigma_x^2 = 1000 \qquad \sigma_y^2 = 2\int_0^{500} \left(\frac{1}{500} f\right)^2 df = \frac{1000}{3}$$

Le densità di probabilità cercate sono quindi date da:

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 1000}} e^{-\frac{x^2}{2000}} \qquad p_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \frac{1000}{3}}} e^{-\frac{3y^2}{2000}}$$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

21 dicembre 2006

Esercizio N. 1

Si consideri la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)}$$

Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto che possono avere tale funzione di trasferimento? C'è qualcuno di essi che risulta causale? Se sì, qual è la sua risposta impulsiva?

Soluzione esercizio 1

La funzione $H(z)$ può essere posta nella forma:

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{7}\left\{\frac{4}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}\right\}$$

I sistemi che possono avere tale funzione di trasferimento sono 3, uno (sinistro) con regione di convergenza $|z| < 1/4$, uno (destro) con regione di convergenza $|z| > 1/3$ e uno bilaterale con regione di convergenza $1/3 > |z| > 1/4$. Il segnale destro è causale, poiché il denominatore di $H(z)$ è un polinomio di grado superiore di quello al numeratore. La sua risposta impulsiva è:

$$h[n] = \frac{1}{7}\left\{4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right\}u[n-2]$$

Esercizio N. 2

Un processo aleatorio ha solamente tre realizzazioni distinte; $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = -\sin(t)$, $x_3(t) = \cos(t)$, caratterizzate da una probabilità rispettivamente pari a $1/2$, $1/4$, $1/4$. Si calcoli il valor medio del processo e la sua funzione di auto correlazione $R_x(t, t+\tau)$. Si dica se la funzione di auto correlazione dipende da t e τ, ovvero solamente da τ.

Soluzione esercizio 2

Valor medio al generico istante *t*: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(t)$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\{\cos(t)\cos(t+\tau) + \sin(t)\sin(t+\tau)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(\tau)$$

Come si vede, la funzione di auto correlazione dipende solamente da τ.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = At$$

in cui A è una variabile aleatoria gaussiana con valor medio $m = 1$ e varianza pari a 1. Calcolare il valor medio e la funzione di autocorrelazione.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è (o non è) stazionario in senso debole.

Soluzione esercizio 3

La densità di probabilità della variabile aleatoria A è $p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(A-1)^2}{2}}$.

Il valor medio del processo risulta essere:

$$m_x(t) = E[At] = E[A]t = t$$

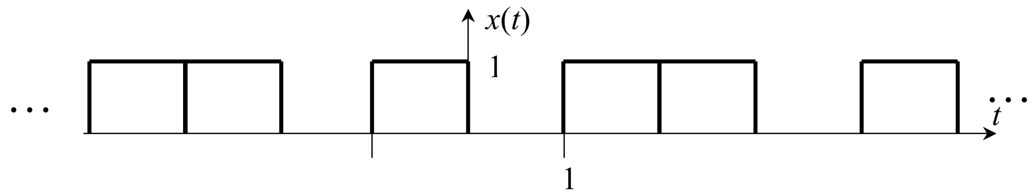
mentre la funzione di autocorrelazione è:

$$R_x(t, t+\tau) = E\left[A^2 t(t+\tau)\right] = E\left[A^2\right] t(t+\tau) = \left(\sigma_A^2 + m_A^2\right) t(t+\tau) = 2t(t+\tau)$$

Il processo non è stazionario.

Esercizio N. 4

In figura è riportata la generica realizzazione di un processo aleatorio, costituita da una sequenza di impulsi rettangolari di durata pari a 1, che assumono ampiezza 0 o 1 in maniera equiprobabile e indipendente gli uni dagli altri. Il periodo della successione di impulsi è unitario.



Calcolare il valor medio del processo.
Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario. Calcolare la funzione di auto correlazione per $t_1 = 0.1, t_2 = 1.1$ e per $t_1 = 0.1, t_2 = 0.2$

Soluzione esercizio 4

Per il generico istante t il valor medio è $\frac{1}{2}$. In entrambi gli istanti $t_1 = 0.1, t_2 = 0.2$ una realizzazione assume o il valore zero oppure il valore 1. Pertanto $R_x(0.1, 0.2) = \frac{1}{2}$. Gli istanti $t_1 = 0.1, t_2 = 1.1$ cadono in due distinti intervalli, per cui si possono verificare (con probabilità $\frac{1}{4}$) i seguenti casi:

a) $x(0.1) = 1, x(1.1) = 0 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$
b) $x(0.1) = 0, x(1.1) = 0 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$
c) $x(0.1) = 1, x(1.1) = 1 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 1$
d) $x(0.1) = 0, x(1.1) = 1 \rightarrow x(t_1)x(t_2) = 0$

Quindi $R_x(0.1, 1.1) = \frac{1}{4}$.
Il processo non è stazionario, poiché preso un valore di $\tau = (t_2 - t_1) < 1$, la funzione di autocorrelazione è diversa a seconda se sia t_2 sia t_1 cadono nello stesso intervallo o in intervalli adiacenti. Quindi essa, oltre che da τ, dipende anche da *t*.

Esercizio N. 5

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right),$$

in cui ω_0 è una costante, mentre *A* è una variabile aleatoria che può assumere i valori $+\frac{1}{2}$, $+1$, -1, $-\frac{1}{2}$, ciascuno con probabilità pari a $\frac{1}{4}$. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione esercizio 5

E' evidente che tutte le realizzazioni hanno valor medio temporale nullo. Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione temporale, va osservato innanzitutto che la probabilità associata ai valori della variabile *A* non influenza l'eventuale proprietà di regolarità. La funzione di autocorrelazione presenta la stessa espressione per tutte le quqttro realizzazioni distinte:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\omega_0 (t+\tau) + \frac{\pi}{6}\right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos\left(2\omega_0 t + \omega_0\tau + \frac{\pi}{3}\right) dt + \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(\omega_0\tau) dt = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Essa dipende dalla realizzazione tramite la costante *A* e quindi il processo non è regolare.

Esercizio N. 6

In figura 1a è riportata la densità spettrale di potenza di un processo aleatorio stazionario gaussiano. Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI la cui risposta in frequenza è mostrata in fig 1b. Dare l'espressione delle densità di probabilità del primo ordine del processo all'ingresso e di quello all'uscita del sistema LTI.

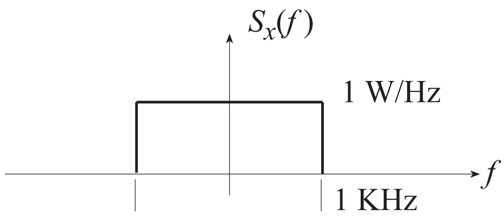


Fig. 1a

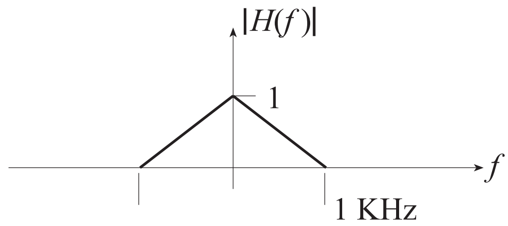


Fig. 1b

Soluzione esercizio 6

I processi di ingresso e di uscita sono entrambi gaussiani a valor medio nullo (perché?), e per essi dunque è semplice valutare la varianza, che coincide con il valore quadratico medio, cioè con la potenza media. Dalla densità spettrale di potenza risulta:

$$\sigma_x^2 = 2000 \qquad \sigma_y^2 = 2\int_0^{1000}\left(-\frac{1}{1000}f+1\right)^2 df = \frac{2000}{3}$$

Le densità di probabilità cercate sono quindi date da:

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\times 2000}}e^{-\frac{x^2}{4000}} \qquad p_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\times\frac{2000}{3}}}e^{-\frac{3y^2}{4000}}$$