Teoria dei Segnali

(Appello del 15 febbraio 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta in frequenza:

$$H(\omega) = \frac{j2\omega}{1 + j2\omega}$$

Calcolare la sua risposta quando all'ingresso c'è il segnale $x(t) = u(t-1)$

Soluzione

Ponendo $H(\omega)$ nella forma $H(\omega) = j\omega \dfrac{1}{\frac{1}{2} + j\omega}$, si vede che la risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{2}t} u(t) \right) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} u(t) + \delta(t)$$

Attraverso l'integrale di convoluzione si perviene al seguente risultato:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = u(t-1) - \begin{cases} 0 & \text{per } t < 1 \\ \displaystyle\int_0^{t-1} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau & \text{per } t \geq 1 \end{cases} = e^{-\frac{1}{2}(t-1)} u(t-1)$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha, come risposta in frequenza, la funzione:

$$h[n] = u[n-1] - u[n-50]$$

Ricavare la risposta del sistema al segnale

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Soluzione

Ricorrendo alle trasformate di Fourier, si ha:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{e^{-j\Omega} - e^{-j50\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} \qquad X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

Pertanto: $Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = \dfrac{e^{-j\Omega} - e^{-j50\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$, e quindi

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-50} u[n-50]$$

Esercizio N. 3 *(6CFU)*

Il segnale $s(t) = A\cos(2\pi f_1 t + km(t))$, con A e k costanti, rappresenta una portante modulata di fase con il segnale $m(t)$. La frequenza f_1 è pari a 100 MHz. Si esprima l'inviluppo complesso di $s(t)$ riferito alla frequenza f_0 = 95 MHz e si calcoli la sua parte in fase e la sua parte in quadratura.

Soluzione

Si scriva il segnale $s(t)$ nella seguente forma:

$$s(t) = A\cos(2\pi f_1 t + km(t)) = A\cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi 5\times 10^6 t + km(t)\right)$$

Poiché, come risulta evidente, $s(t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{j2\pi 5\times 10^6 t} e^{jkm(t)} e^{j2\pi f_0 t}\right\}$, il suo inviluppo complesso è $\tilde{s}(t) = Ae^{j2\pi 5\times 10^6 t} e^{jkm(t)}$ e le sue parti in fase e in quadratura sono rispettivamente:

$$s_c(t) = A\cos\left(2\pi 5\times 10^6 t + km(t)\right), \qquad s_s(t) = A\sin\left(2\pi 5\times 10^6 t + km(t)\right),$$

Esercizio N. 3 *(3CFU)*

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1]$$

Al suo ingresso è posto il segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Calcolare il segnale all'uscita del sistema e la sua trasformata di Fourier.

Soluzione

La trasformata di Fourier del segnale di ingresso è $X(e^{j\Omega}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$, mentre la risposta in frequenza del sistema risulta essere (nell'intervallo $-\pi < \Omega < \pi$)

$H\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}+\dfrac{\pi}{2}\delta(\Omega)$. Il segnale di uscita avrà (limitatamente all'intervallo $-\pi<\Omega<\pi$) la seguente trasformata di Fourier:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\left\{\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}+\frac{\pi}{2}\delta(\Omega)\right\}=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta(\Omega)$$

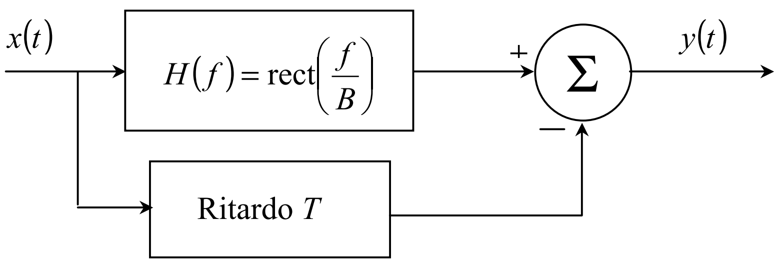
Essa corrisponde al segnale $y[n]=u[n]$

Esercizio N. 4

Il processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha la seguente funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau)=4B\,\mathrm{sinc}(B\tau)$$

Esso viene elaborato con il sistema indicato in figura, in cui $T=\frac{1}{B}$. Calcolare la potenza media del processo in uscita.



Soluzione

La densità spettrale di potenza del processo $x(t)$ è pari a $4\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$. La risposta in frequenza del sistema nella banda del processo di ingresso è data da $H(f)=1-e^{-j2\pi fT}$. Di conseguenza la densità spettrale di potenza del processo di uscita è:

$$S_y(f)=S_x(f)|H(f)|^2=4\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)(2-2\cos(2\pi fT))$$

La potenza di uscita è:

$$P_u=\int_{-B/2}^{+B/2}[8-8\cos(2\pi fT)]df=8B$$

Esercizio N. 5

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due processi aleatori gaussiani indipendenti, con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}$ e $R_y(\tau) = e^{-2|\tau|}$. Si consideri il processo aleatorio $z(t)$ così definito:

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

1) Calcolare il valor medio di $z(t)$
2) Determinare la densità di probabilità del primo ordine di $z(t)$
3) Determinare la funzione di auto correlazione di $z(t)$.

Soluzione

1) Il valor medio di $z(t)$ è la somma dei valori medi di $x(t)$ e $y(t)$. Ciascuno di questi processi ha valor medio nullo (perché?), e pertanto anche il valor medio di $z(t)$ sarà nullo.
2) Per ogni istante t, $z(t)$ è somma di due variabili aleatorie gaussiane e quindi è anch'essa gaussiana. Il suo valor medio è nullo e la sua varianza è data da $E\left[(x(t)+y(t))^2\right] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$. Dalle due funzioni di autocorrelazione assegnate si deduce che $\sigma_x^2 = 2$ e $\sigma_y^2 = 1$. La densità di probabilità è quindi

$$p_z(z(t)) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{z^2}{6}}$$

3) $R_z(\tau) = E[(x(t)+y(t))(x(t+\tau)+y(t+\tau))] = E[x(t)x(t+\tau)] + E[y(t)y(t+\tau)] + 0$
(per l'indipendenza tra $x(t)$ e $y(t)$)
Quindi $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) = 2e^{-|\tau|} + e^{-2|\tau|}$

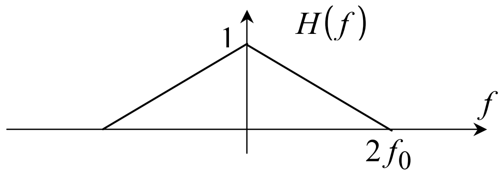
Esercizio N. 6

E' dato il processo aleatorio:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) - B\sin(2\pi f_0 t)$$

ove f_0 è una costante e A e B sono due variabili aleatorie gaussiane indipendenti a valor medio nullo e varianza $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 4$. Questo processo è posto all'ingresso di un sistema LTI, la cui risposta in frequenza è riportata in figura.

Esprimere la densità di probabilità del primo ordine $f_y(y,t)$ del processo $y(t)$ all'uscita del sistema.



Soluzione

Ogni realizzazione del processo è una sinusoide a frequenza f_0. Nel passaggio attraverso il sistema la sua ampiezza si dimezza. Pertanto la generica realizzazione del processo di uscita è data da:

$$y(t) = \frac{1}{2} A\cos(2\pi f_0 t) - \frac{1}{2} B\sin(2\pi f_0 t)$$

Per ogni valore di t il processo è una variabile aleatoria gaussiana. Il suo valor medio risulta:

$$m_y(t) = E\left[\frac{1}{2} A\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} B\sin(2\pi f_0 t)\right] = 0$$

e la sua varianza è:

$$\sigma_y^2(t) = E\left[\frac{1}{4} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) + \frac{1}{4} B^2 \sin^2(2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} AB\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)\right] =$$

$$= E\left[A^2\right]\frac{1}{4}\cos^2(2\pi f_0 t) + E\left[B^2\right]\frac{1}{4}\sin^2(2\pi f_0 t) + E[AB]\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) = 1$$

Quindi: $f_y(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$