Teoria dei Segnali

(Appello del 25 giugno 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso ideale centrato in $t = \tau$ con il segnale

$$h(t,\tau) = u(t - |\tau|)$$

Il sistema è tempo invariante? (giustificare la risposta)

Calcolare la sua risposta quando all'ingresso c'è il segnale $x(t) = \cos(\pi t)$.

Soluzione

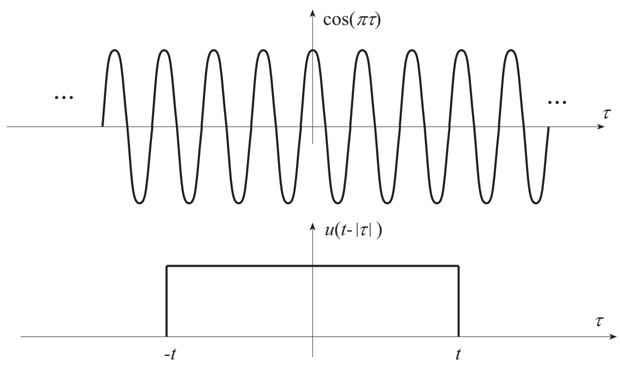
IL sistema non è tempo invariante. Poiché la risposta all'impulso centrato in $t = 0$ è data da $h(t,0) = u(t)$, per essere tempo invariante quella a $\delta(t-\tau)$ dovrebbe essere $h(t,\tau) = u(t-\tau) \neq u(t - |\tau|)$.

La risposta a $x(t)$ è calcolabile con l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\pi\tau) u(t - |\tau|) d\tau$$

Quando t è negativo, $u(t - |\tau|)$ è nulla per tutti i valori di τ e pertanto $y(t)$ risulterà nulla.

Quando t è positivo, le funzioni che appaiono nell'integrale avranno l'andamento indicato nella figura sottostante.



In questo caso si avrà:

$$y(t) = \int_{-t}^{t} \cos(\pi\tau) d\tau = \frac{2}{\pi}\sin(\pi t)$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{u[n]-\frac{1}{2}u[n+1]\right\}$$

Trovare quale segnale si deve porre al suo ingresso affinché quello di uscita sia

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Soluzione

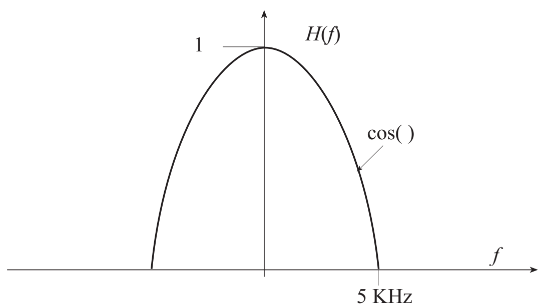
Ricorrendo alle trasformate di Fourier, si ha:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1-e^{j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} \qquad Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Pertanto: $X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{H\left(e^{j\Omega}\right)}=\frac{1}{1-e^{j\Omega}}$, cui corrisponde il segnale $x[n]=u[-n]-\frac{1}{2}$

Esercizio N. 3

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro avente la risposta in frequenza riportata in figura. A tale scopo, esso viene convertito in un segnale tempo discreto attraverso un campionamento alla frequenza di 30 KHz. Si calcoli la risposta impulsiva del filtro tempo discreto da usare per eseguire per via numerica il filtraggio desiderato.



Soluzione

Nella variabile ω la risposta in frequenza del filtro è espressa dalla formula:

$$H(\omega)=\cos\left(\frac{1}{20\times10^3}\omega\right)\text{rect}\left(\frac{\omega}{20\pi\times10^3}\right)$$

Il corrispondente filtro tempo discreto avrà quindi una risposta in frequenza nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ data da :

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\Omega\right)\mathrm{rect}\left(\frac{3\Omega}{2\pi}\right)$$

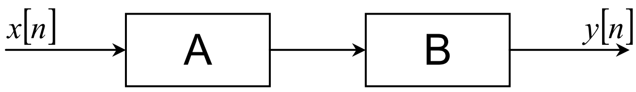
Antitrasformando, si ottiene:

$$h[n] = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos\left(\frac{3}{2}\Omega\right)\cos(\Omega n)d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\cos\left(\left(\frac{3}{2}+n\right)\Omega\right)d\Omega + \int_0^{\pi/3}\cos\left(\left(\frac{3}{2}-n\right)\Omega\right)d\Omega\right]$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{\sin\left(\left(\frac{3}{2}+n\right)\Omega\right)}{\frac{3}{2}+n}\right|_0^{\pi/3} + \left.\frac{\sin\left(\left(\frac{3}{2}-n\right)\Omega\right)}{\frac{3}{2}-n}\right|_0^{\pi/3}\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{3\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\frac{9}{4}-n^2}$$

<u>Esercizio N. 4</u>

Nel seguente sistema il blocco A risponde a $x[n]$ con $x[n]-\frac{1}{2}x[n-2]$, mentre il blocco B esegue la somma corrente del segnale di ingresso. Scrivere l'equazione alle differenze che descrive l'intero sistema, calcolare la sua funzione di trasferimento e la sua risposta impulsiva e dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile.



Soluzione

Indicando con $w[n]$ il segnale all'uscita del blocco A, si ha:

$$w[n] = x[n]-\frac{1}{2}x[n-2]$$
$$y[n] = w[n]+y[n-1]$$

Eliminando il segnale $w[n]$ si ottiene la seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-y[n-1] = x[n]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

Per mezzo della trasformata Z si ricava che la funzione di trasferimento del sistema è:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

cui corrisponde la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = u[n] - \left(\frac{1}{2}\right) u[n-2]$$

La regione di convergenza di $H(z)$ non contiene la circonferenza di raggio unitario. Il sistema è pertanto instabile.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente densità di probabilità del primo ordine:

$$p_1(x(t)) = \begin{cases} C(1-|x|) & |x| \leq 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

La sua densità spettrale di potenza unilatera è costante su una banda B, ove vale 1 [mW/Hz]. Qual è la larghezza di banda del processo aleatorio?

Soluzione

Innanzitutto si deve determinare la costante *C*, imponendo che $\int_{-1/2}^{1/2} p_1(x)dx = 1$.

Si ricava $C = \frac{4}{3}$. Si calcoli ora il valore quadratico medio (cioè la potenza) del processo:

$$E\left[x^2(t)\right] = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{4}{3} x^2 (1-|x|) dx = \frac{5}{72} \text{ [W]}$$

Poiché sulla banda B la densità spettrale è costante, dovrà essere:

$$B \times 10^{-3} = \frac{5}{72} \Rightarrow B = 69.4 \; Hz$$

Esercizio N. 6

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2} - k\right)$$

ove le varie a_k sono variabili aleatorie tra loro indipendenti, che assumono in modo equiprobabile i valori –1, *0* e *1*.

Si calcoli e si disegni la funzione di autocorrelazione $R_x(t,t+\tau)$, per $\tau = 0.5$. Si dica, giustificando la risposta, se il processo è stazionario in senso lato e si valuti la potenza media del processo.

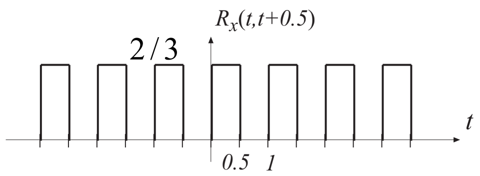
Soluzione

Quando *t* varia da *0* a *0.5*, la variabile aleatoria $x(t)x(t+\tau)$ può assumere i valori *+1* (con probabilità *2/3*) e *0* (con probabilità *1/3*). Pertanto in questa situazione $R_x(t,t+0.5) = 2/3$.

Se *t* varia da *0.5* a *1* (escluso) allora sono 9 le possibili combinazioni dei valori delle due variabili $x(t)$ e $x(t+\tau)$, e precisamente:

$1{,}1 \quad 1{,}0 \quad 1{,}-1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}0 \quad 0{,}-1 \quad -1{,}1 \quad -1{,}0 \quad -1{,}1$

Ognuna di esse ha probabilità di manifestarsi pari a $1/9$, per cui il valor medio della variabile aleatoria $x(t)x(t+\tau)$ è nullo. Tutto ciò si ripete in *t* con periodo $T = 1$. La funzione di autocorrelazione si presenta quindi come in figura .



Per un generico valore τ con $|\tau| < 1$, la $R_x(t,t+\tau)$ è una funzione periodica di periodo 1 come quella in figura, con ampiezza e durata dell'impulso rettangolare rispettivamente pari a $2/3$ e a $1-|\tau|$. Quando invece $|\tau|>1$ essa è identicamente nulla. Il processo non è pertanto stazionario. Il suo valor medio in *t* è dato da $\frac{2}{3}(1-|\tau|)$ e la potenza media del processo, corrispondente a $\overline{R}_x(0)$, è quindi pari a $2/3$ W.