Teoria dei Segnali

(Appello del 30 gennaio 2008)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso ideale $\delta(t-\tau)$ ($-\infty < \tau < +\infty$) con la funzione $h(t,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} u(\tau)$. Il sistema è tempo invariante? Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = e^{-t} u(t)$.

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante: basti pensare che se τ è negativo, la risposta impulsiva identicamente nulla, mentre se τ è positivo essa vale $e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}$.

La risposta è fornita da $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{\frac{1}{2}\tau} u(\tau) d\tau = 2e^{-\frac{1}{2}t}$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso unitario centrato in $n = k$ con la funzione:

$$h[n,k] = \{u[n] - u[n-999]\} u[k]$$

Il sistema è tempo invariante? Calcolare la sua risposta al segnale $x[n] = e^{-n} u[n]$.

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante: ad esempio per $k = 0$ e per $k = 1$ la risposta impulsiva è la stessa.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k} u[k] \{u[n] - u[n-999]\} u[k] = \{u[n] - u[n-999]\} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} =$$

$$= \frac{e}{e-1} \{u[n] - u[n-999]\}$$

Esercizio N. 3

Il segnale tempo discreto $x[n]$ ha la seguente trasformata di Fourier :

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-e^{j\Omega}}$$

Come è fatto questo segnale?
Se esso viene messo all'ingresso di un sistema LTI, caratterizzato dalla risposta in frequenza

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1-e^{-j\Omega}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}} \qquad (-\pi<\Omega<\pi)$$

quale sarà il segnale all'uscita del sistema?

Soluzione

La trasformata di Fourier del segnale $x[n]$ può essere messa nella seguente forma $(per\ \ -\pi<\Omega<\pi)$:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-e^{j\Omega}}=-\frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}-\pi\delta(\Omega)+\pi\delta(\Omega)$$

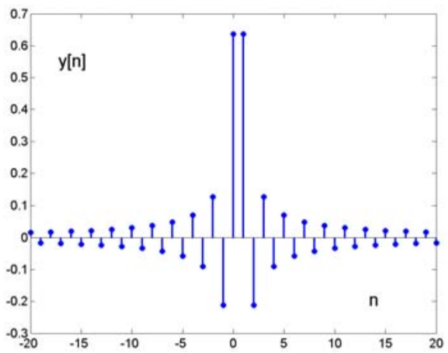
che corrisponde al segnale $x[n]=\frac{1}{2}-u[n-1]$

La trasformata del segnale di uscita è pari a

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-e^{j\Omega}}\frac{1-e^{-j\Omega}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}=\frac{1}{1-e^{j\Omega}}\frac{-e^{-j\Omega}\left(1-e^{j\Omega}\right)}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}=-e^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

Antitrasformando:

$$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-e^{j\Omega\left(n-\frac{1}{2}\right)}d\Omega=\frac{-1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\Omega\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{j\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{\sin\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$



Esercizio N. 4

Un processo aleatorio $x(t)$ è così definito: ogni sua realizzazione è una funzione periodica, con sviluppo in serie di Fourier espresso da:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t)+\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t).$$

I coefficienti A_k e B_k sono variabili aleatorie tutte indipendenti una dall'altra, a valor medio nullo e varianza $\sigma^2=1$. La pulsazione ω_0 è una costante.

Dire, giustificando l'affermazione, se il processo è stazionario in senso debole.

Soluzione

Calcolo del valor medio:

$$E[x(t)]=E\left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t)+\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} E[A_k]\cos(k\omega_0 t)+\sum_{k=1}^{\infty} E[B_k]\sin(k\omega_0 t)=0$$

Calcolo della funzione di auto correlazione:

$E[x(t)x(t+\tau)]=$

$$=E\left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\omega_0 t)+\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\omega_0 t)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 (t+\tau))+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_0 (t+\tau))\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} E\left[A_n^2\right]\cos(n\omega_0 t)\cos(n\omega_0 (t+\tau))+\sum_{n=1}^{\infty} E\left[B_n^2\right]\sin(n\omega_0 t)\sin(n\omega_0 (t+\tau))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega_0\tau)$$

Il processo è dunque stazionario

Esercizio N. 5

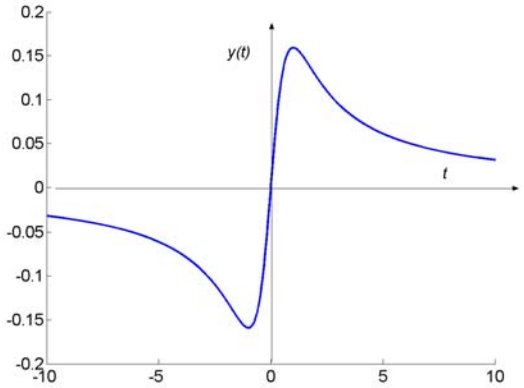
Lo spettro di un segnale è $X(\omega)=e^{-|\omega|}$. Calcolare la sua trasformata di Hilbert

Soluzione

Il relativo segnale analitico ha spettro pari a $X_+(\omega) = 2e^{-\omega}u(\omega)$. La sua antitrasformata è

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} + j\frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}$$

Pertanto $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}$ (vedi figura)



Esercizio N. 6

Un rumore bianco di densità spettrale di potenza bilatera pari a $\frac{1}{2}$ mW/Hz viene filtrato con un filtro LTI la cui risposta impulsiva è $h(t) = e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$. Calcolare la potenza media del processo di uscita.

Soluzione

La funzione di autocorrelazione del processo è $R_x(\tau) = \frac{10^{-3}}{2}\delta(\tau)$. La potenza media all'uscita corrisponde a $R_y(0)$ e quindi è calcolabile attraverso il seguente integrale:

$$R_y(0) = \frac{1}{2}10^{-3}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2}\alpha} d\alpha = \frac{1}{2}10^{-3}\left(-e^{-\alpha}\right)\Big|_0^{+\infty} = 0.5 \quad mW$$