Teoria dei Segnali

(Appello del 12 febbraio 2008)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un segnale tempo continuo $x(t)$ e la sua trasformata $X(\omega)$ soddisfano le seguenti relazioni :

1) $x(t) \le 0$
2) $\boldsymbol{F}^{-1}\{(2+j\omega)X(\omega)\} = A\delta(t)$
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2\pi$

Determinare l'espressione analitica di $x(t)$.

Soluzione

Eseguendo la trasformata di Fourier della relazione 2) si ottiene la seguente equazione :

$$(2+j\omega)X(\omega) = A \quad \rightarrow \quad X(\omega) = \frac{A}{2+j\omega}$$

$x(t)$ avrà dunque la seguente forma :

$$x(t) = Ae^{-2t}u(t)$$

Dalla relazione di Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \, ,$$

tenendo conto della relazione 3), si ha :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 1$$

$$|x(t)|^2 = A^2 e^{-4t} u(t)$$

$$A^2 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{A^2}{4} \quad \rightarrow \quad A^2 = 4 \quad \rightarrow \quad A = \pm 2$$

Ovviamente, per la relazione 1), la scelta corretta è $A = -2$.

Esercizio N.2

Un sistema tempo discreto LTI è retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = bx[n] + x[n-1]$$

Trovare quanto deve valere b affinché il sistema abbia una risposta in frequenza $H(\Omega)$ che soddisfi il requisito :

$$|H(\Omega)| = 1 \qquad \forall \Omega$$

Si valuti la risposta del sistema al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Soluzione

Trasformando secondo Fourier entrambi i membri dell'equazione alle differenze si ricava :

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)\left[1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right] = X\left(e^{j\Omega}\right)\left[b+e^{-j\Omega}\right] \quad \Rightarrow \quad H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{b+e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Affinché $\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|$ sia pari a 1 per ogni valore di Ω deve essere verificata la relazione :

$$\left|b+e^{-j\Omega}\right| = \left|1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right|$$

$$1+b^2+2b\cos\Omega = 1+\frac{1}{4}+\cos\Omega$$

Di conseguenza la condizione $b=\frac{1}{2}$ garantisce $|H(\Omega)| = 1$ per qualsiasi valore di Ω.

Per $b=\frac{1}{2}$, $H(\Omega) = \dfrac{\frac{1}{2}+e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$. Il segnale $x[n]$ ha trasformata pari a $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$ e quindi la trasformata della risposta $y[n]$ sarà :

$$Y(\Omega) = \frac{\frac{1}{2}+e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{\frac{5}{4}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} - \frac{\frac{3}{4}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

Pertanto si avrà :

$$y[n] = \left\{\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$$

Esercizio 3

In un sistema tempo discreto esiste la seguente relazione tra le trasformate di Fourier del segnale di ingresso $x[n]$ e di quello di uscita $y[n]$:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = 2X\left(e^{j\Omega}\right) + e^{-j\Omega}X\left(e^{j\Omega}\right) - j\,\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}$$

Dire, giustificando correttamente la risposta, se il sistema è lineare e se è tempo invariante. Determinare la sua risposta allorquando $x[n] = \delta[n-n_0]$.

Soluzione

Linearità:

Supponendo di inserire all'ingresso del sistema il segnale $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, in uscita si avrà un segnale $y[n]$, con trasformata

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = 2\left\{aX_1\left(e^{j\Omega}\right) + bX_2\left(e^{j\Omega}\right)\right\} + e^{-j\Omega}\left\{aX_1\left(e^{j\Omega}\right) + bX_2\left(e^{j\Omega}\right)\right\} -$$
$$- j\frac{d\left\{aX_1\left(e^{j\Omega}\right) + bX_2\left(e^{j\Omega}\right)\right\}}{d\Omega} = aY_1\left(e^{j\Omega}\right) + bY_2\left(e^{j\Omega}\right)$$

A questa trasformata corrisponderà il segnale $y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$. Quindi il sistema è lineare.

Tempo invarianza:

Se il segnale di ingresso è $x_1[n] = x[n - n_0]$, con trasformata quindi $X_1\left(e^{j\Omega}\right) = X\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n_0}$, si avrà:

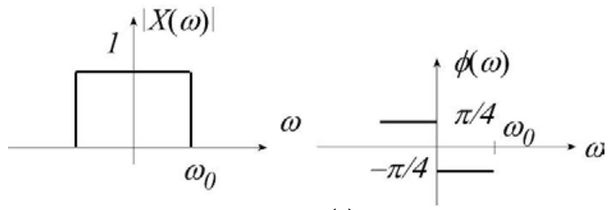
$$Y_1\left(e^{j\Omega}\right) = 2X\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n_0} + e^{-j\Omega(n_0+1)}X\left(e^{j\Omega}\right) - j\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}e^{-j\Omega n_0} - n_0 X\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n}$$
$$\neq Y\left(e^{j\Omega}\right)e^{-j\Omega n_0}$$

Pertanto il sistema non è tempo invariante.

La trasformata di $x[n] = \delta[n - n_0]$ è $X\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\Omega n_0}$. All'uscita si avrà un segnale con trasformata $Y\left(e^{j\Omega}\right) = 2e^{-j\Omega n_0} + e^{-j\Omega(n_0+1)} - n_0 e^{-j\Omega n_0}$, cui corrisponde il segnale $(2 - n_0)\delta[n - n_0] + \delta[n - n_0 - 1]$.

Esercizio N.4

Il segnale $x(t)$ ha lo spettro indicato in figura:



Determinare la trasformata di Hilbert di $x(t)$.

Soluzione

La trasformata di Hilbert di $x(t)$ corrisponde alla parte immaginaria del segnale analitico di $x_+(t)$. Esso ha uno spettro nullo per frequenze negative, mentre per frequenze positive il suo spettro è $X_+(\omega) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad 0 < \omega < \omega_0$.

La corrispondente antitrasformata è:

$$x_{+}(t)=\int_{0}^{\omega_0} 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega t}d\omega = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{e^{j\omega_0 t}-1}{jt}$$

La trasformata di Hilbert cercata è quindi $\dfrac{\sqrt{2}-2\cos\left(\omega_0 t-\dfrac{\pi}{4}\right)}{t}$

Esercizio N.5

Un processo aleatorio stazionario ha la seguente funzione di auto correlazione:

$$R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$$

Esso è applicato all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(t)=e^{-kt}u(t)$$

ove k è una costante ($k>0$).

Determinare il valore di k in modo che la potenza media del processo di uscita sia pari a $1/6$ di quella del processo di ingresso.

Soluzione

Val la pena ricordare che la potenza media di un processo aleatorio stazionario corrisponde a $R_x(0)$. Pertanto quella del processo di ingresso è pari a 1 W. La funzione di auto correlazione del processo all'uscita del sistema è data da:

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$$

Calcoliamo innanzitutto $h(\tau)\otimes h(-\tau)$. Se τ è positivo, avremo

$$h(\tau)\otimes h(-\tau)=\int_{\tau}^{+\infty} e^{-k\alpha}e^{-k(\alpha-\tau)}d\alpha = e^{k\tau}\int_{\tau}^{+\infty} e^{-2k\alpha}d\alpha = \frac{e^{-k\tau}}{2k}$$

L'operazione dà come risultato una funzione pari e quindi $h(\tau)\otimes h(-\tau)=\dfrac{e^{-k|\tau|}}{2k}$. Per il calcolo di $R_y(0)$ si tratta di valutare il seguente integrale:

$$R_y(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-k|\alpha|}}{2k}e^{-|\alpha|}d\alpha = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-(k+1)\alpha}}{2k}d\alpha = \frac{1}{k(k+1)}$$

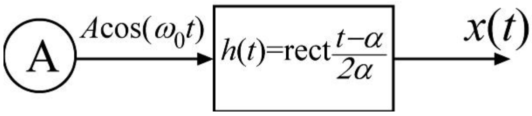
Imponendo che tale quantità sia pari a $\dfrac{1}{6}$, si trova $k=2$

Esercizio N. 6

Il processo aleatorio $x(t)$ viene generato nel seguente modo. Il generatore A in figura genera la sinusoide $A\cos(\omega_0 t)$ con A e ω_0 costanti. La sinusoide è posta all'ingresso di un sistema LTI, avente la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \text{rect}\left[\frac{t-\alpha}{2\alpha}\right]$$

ove α è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Il processo $x(t)$ è quello che si genera all'uscita del sistema. Dire, giustificando la risposta, se esso è stazionario in senso debole.



Soluzione

Ogni realizzazione di $x(t)$ è una sinusoide a frequenza angolare ω_0, modificata in ampiezza e fase, che dipenderanno dal valore della risposta in frequenza del sistema in corrispondenza a $\omega = \omega_0$. Poiché $H(\omega_0) = 2\alpha \dfrac{\sin(\omega_0\alpha)}{\omega_0\alpha} e^{-j\omega_0\alpha}$, la generica realizzazione del processo sarà:

$$x(t) = \frac{2}{\omega_0}\sin(\omega_0\alpha)\cos(\omega_0 t - \omega_0\alpha)$$

Calcolo del valor medio:

$$E[x(t)] = \frac{2}{\omega_0} E[\sin(\omega_0\alpha)\cos(\omega_0 t - \omega_0\alpha)] = \frac{1}{\omega_0} E[\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t - 2\omega_0\alpha)]$$

Poiché α è distribuita uniformemente tra 0 e $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, il valor medio del secondo termine è nullo. Pertanto

$$E[x(t)] = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Esso dipende dall'istante t e quindi il processo aleatorio non può essere stazionario.