Teoria dei Segnali

(Appello del 15 settembre 2008)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La risposta di un sistema lineare all'impulso ideale centrato in t_0 è pari a $e^{-2t+t_0}\, u(t-t_0)$.

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t)=e^{-t}u(t)$.

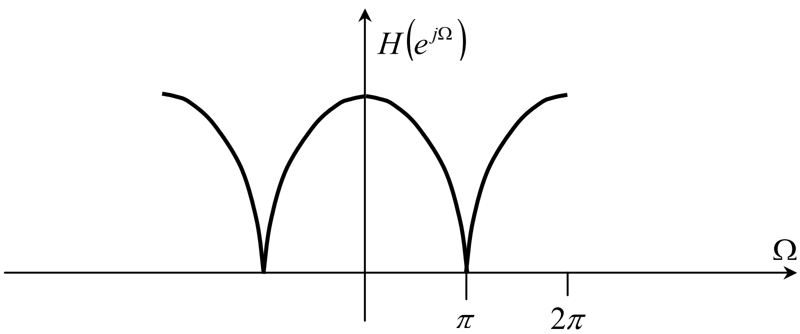
Soluzione

Il sistema non risulta lempo invariante (perché?): Pertanto la risposta è data dal seguente integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}e^{-2t+\tau}u(t-\tau)u(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 \text{ per } t<0 \\ e^{-2t}\int_0^t u(t-\tau)u(\tau)d\tau = te^{-2t} \text{ per } t>0 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la risposta in frequenza $H\left(e^{j\Omega}\right)=\left|\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|$ (vedi figura 1).



Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$?

Soluzione

Il segnale $x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$ è costituito dalla somma di due autofunzioni e quindi la risposta del sistema è fornita dall'espressione:

$$y_1[n]=H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

<u>Esercizio N. 3</u>

Un segnale tempo discreto $x[n]$ ha il seguente spettro:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{-j\Omega}-\left(\frac{1}{3}\right)^4 e^{-j5\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}.$$

Come è fatto il segnale $x[n]$? Determinare lo spettro del segnale $y[n]=x[-2n]$.

Soluzione

L'espressione di $X\left(e^{j\Omega}\right)$ può essere posta nella forma:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4 e^{-j4\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}e^{-j\Omega}$$

per cui il segnale $x[n]$ è quello mostrato in fig. I. In fig. II sono riportati in sequenza i segnali $x[-n]$, $x[-2n]$.

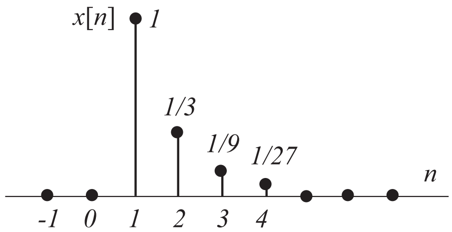


Fig. I

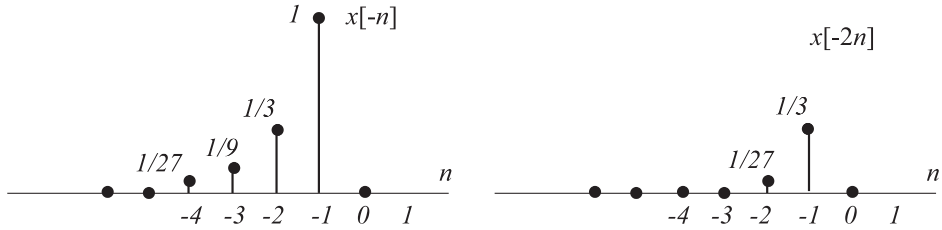


Fig. II

Pertanto lo spettro del segnale $x[-2n]$ è pari a $\frac{1}{27}e^{j2\Omega}+\frac{1}{3}e^{j\Omega}$.

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio passa banda è data da:

$$s(t)=\cos(2\pi f_0 t)+m(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi)$$

ove f_0 è una costante e ϕ è una variabile aleatoria distribuita uniformemente tra 0 e π e *m(t)* è un processo aleatorio stazionario, a valor medio nullo,e indipendente da ϕ. Determinare il suo inviluppo complesso e dire, giustificando la risposta, se esso è a sua volta un processo aleatorio stazionario (almeno in senso debole).

Soluzione

Scrivendo $s(t)$ in forma canonica si vede immediatamente che l'inviluppo complesso ha la seguente espressione:

$$\tilde{s}(t)=1+m(t)e^{j\phi}$$

Il valor medio di $\tilde{s}(t)$ è evidentemente pari a 1 e quindi indipendente dal tempo. Per quanto riguarda la sua funzione di auto correlazione, si ha:

$$R_s(t,t+\tau)=E\{[1+m(t)e^{j\phi}][1+m(t+\tau)e^{j\phi}]\}$$
$$=1+E[m(t)e^{j\phi}m(t+\tau)e^{j\phi}]=1+R_m(\tau)E[e^{j2\phi}]$$

IL processo $\tilde{s}(t)$ è stazionario.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario gaussiano ha la seguente densità spettrale di potenza:

$$S_x(f)=\begin{cases}\cos\left(\frac{f}{f_m}\frac{\pi}{2}\right) & \text{per}\ |f|<f_M\\ 0 & \text{per}\ |f|>f_M\end{cases}$$

Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI, la cui risposta in frequenza è:

$$H(f)=\begin{cases}\left|\sin\left(\frac{f}{f_m}\frac{\pi}{2}\right)\right| & \text{per}\ |f|<f_M\\ 0 & \text{per}\ |f|>f_M\end{cases}$$

Esprimere la densità di probabilità del primo ordine del processo aleatorio presente all'uscita del sistema.

Soluzione

Il processo aleatorio all'ingresso del sistema (e quindi anche quello all'uscita) ha valor medio nullo (perché?). Pertanto la varianza del processo (che interviene nella formula della densità di probabilità del primo ordine) è pari al valore quadratico medio. Quest'ultimo rappresenta anche la potenza media, che può essere calcolata a partire dalla densità spettrale di potenza del processo di uscita. In conclusione:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \sin^2\left(\frac{f}{f_M}\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{f}{f_M}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{per } |f| < f_M$$

$$\sigma^2 = P_m = \int_{-f_M}^{f_M} \sin^2\left(\frac{f}{f_M}\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{f}{f_M}\frac{\pi}{2}\right) df = \frac{4 f_M}{3\pi}$$

Anche il processo di uscita sarà gaussiano e quindi la sua densità di probabilità del primo ordine è:

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{8 f_M}{3}}} e^{-\frac{3\pi y^2}{4 f_M}}.$$

<u>Esercizio N. 6</u>

Si consideri il processo aleatorio associato all'esperimento "lancio di una moneta", in cui alle uscite "testa" e "croce" corrispondono rispettivamente le funzioni:

$$x_1(t) = e^{-t+1}u(t-1)$$

$$x_2(t) = e^{t+1}u(-t-1)$$

Quanto vale la funzione di correlazione $R_x(t_1, t_2)$ in corrispondenza alle seguenti coppie (t_1, t_2)?

a) $t_1 = 0 \quad t_2 = 1$

b) $t_1 = -1 \quad t_2 = 1$

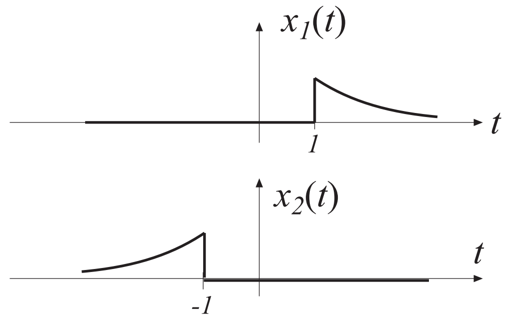
c) $t_1 = 1 \quad t_2 = 2$

Soluzione

La funzione di autocorrelazione risulta essere:

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2}x_1(t_1)x_1(t_2) + \frac{1}{2}x_2(t_1)x_2(t_2)$$

In figura sono riportate le due realizzazioni distinte



Per le coppie di istanti a) e b) la $R(t_1,t_2)=\frac{1}{2}x_1(t_1)x_1(t_2)+\frac{1}{2}x_2(t_1)x_2(t_2)$ sarà certamente nulla, mentre per la coppia c) essa sarà pari a $\frac{1}{2}e^{-1}$.