PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (1)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al gradino unitario $u(t)$ con il segnale:

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$$

Calcolare la sua risposta all'impulso $\delta(t-2)$.

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(t)$, la risposta all' impulso $\delta(t)$ sarà pari a $\frac{dy(t)}{dt}$.

Pertanto:

$$\delta(t) \rightarrow -\frac{1}{2} e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} \delta(t)$$

$$\delta(t-2) \rightarrow -\frac{1}{2} e^{-t+2} u(t-2) + \frac{1}{2} \delta(t-2)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k] = k\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n] = 3^n \{u[n] - u[n-5]\}$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0] = 0$ mentre $h[n,1] = \delta[1-n]$

Il segnale di ingresso è somma di 5 impulsi:

$x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 9\delta[n-2] + 27\delta[n-3] + 81\delta[n-4]$

La risposta è la somma delle risposte a ciascun impulso:

$y[n] = 0 + 3\delta[n-1] + 18\delta[n-2] + 81\delta[n-3] + 324\delta[n-4]$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)$ $\sin\omega + j\sin(2\omega)$

$b)$ $\cos\omega + je^{-2\omega}u(\omega)$

$c)$ $\dfrac{1}{\omega^2 + j3}$

$d)$ $\dfrac{j + \sin\omega}{\omega}$

Soluzione esercizio 3

La funzione d), poiché è l'unica che verifica la proprietà di simmetria della trasformata di Fourier.

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \cos(\pi n)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$.

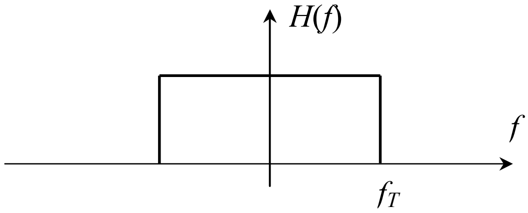
Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n = 0$.

Soluzione esercizio 4

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n] = \cos(\pi n)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\frac{1}{4}\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega = \pi$ vale $-\frac{1}{5}$. La risposta è $-\frac{1}{5}\cos(\pi n)$, che per $n = 0$ vale $-\frac{1}{5}$

Esercizio N. 5

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T = 5$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \frac{\pi}{3}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



Soluzione esercizio 5

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \dfrac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \dfrac{5}{\frac{\pi}{3}} = 30\ KHz$. L'operazione risulta possibile, poiché la necessaria frequenza di campionamento è maggiore di $2f_M$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (2)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al gradino unitario $u(t)$ con il segnale:

$$y(t) = \mathrm{rect}(t-2)$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(t)$, la risposta all' impulso $\delta(t)$ sarà pari a $\frac{dy(t)}{dt}$.

Pertanto:

$$\delta(t) \to \delta\left(t - \frac{3}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{5}{2}\right)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k] = k\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0] = 0$ mentre $h[n,1] = \delta[1-n]$.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u[-k]k\delta[k-n]$$

Per ogni valore di n tutti i termini della sommatoria sono nulli tranne quello per $k = n$. Pertanto $y[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)\quad j\sin(2\omega)$

$b)\quad \cos\omega + e^{-j2\omega}u(\omega)$

$c)\quad \dfrac{1}{\omega^2+3}u(\omega-2)$

$d)\quad \dfrac{1+j\sin\omega}{\omega}$

<u>Soluzione esercizio 3</u>

La funzione *a*), poiché è l'unica che verifica la proprietà di simmetria della trasformata di Fourier.

<u>Esercizio N. 4</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva: $h[n] = \cos(\pi n)$.

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$.

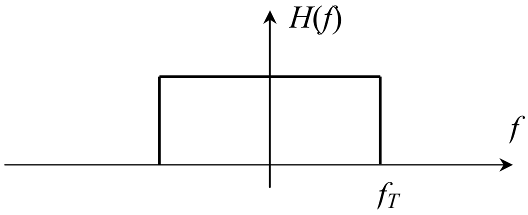
Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n = 0$.

<u>Soluzione esercizio 4</u>

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n] = \cos(\pi n)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\frac{1}{2}\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega = \pi$ vale $-\frac{1}{3}$. La risposta è $-\frac{1}{3}\cos(\pi n)$, che per $n = 0$ vale $-\frac{1}{3}$

<u>Esercizio N. 5</u>

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T = 5$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \frac{\pi}{2}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



<u>Soluzione esercizio 5</u>

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \frac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \frac{5}{\frac{\pi}{2}} = 20\ KHz$.

L'operazione è possibile, poiché $f \ \geq 2 f_M$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (3)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al gradino unitario $u(1+t)$ con il segnale:

$$y(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-t})u(t-1)$$

Calcolare la sua risposta impulsiva

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(1+t)$, la risposta a $u(t)$ sarà data da $y(t-1)=\frac{1}{2}(1-e^{-t+1})u(t-2)$ e la risposta impulsiva sarà pari a $\frac{dy(t-1)}{dt}$. Pertanto:

$$\delta(t)\to\frac{1}{2}e^{-t+1}u(t-2)+\frac{1}{2}(1-e^{-1})\delta(t-2)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k]=k\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0]=0$ mentre $h[n,1]=\delta[1-n]$.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k u[k]k\delta[k-n]$$

Per ogni valore di n tutti i termini della sommatoria sono nulli tranne quello per $k=n$. Pertanto $y[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale e pari. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)\quad e^{j|\omega|}$

$b)\quad \dfrac{\cos\omega}{\omega^2}$

$c)\quad \dfrac{\omega}{\omega^2+3}$

$d)\quad \dfrac{j+\sin\omega}{\omega}$

Soluzione esercizio 3

La trasformata deve essere reale e pari: quindi la risposta corretta è la *b*).

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n]$.

Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n=0$.

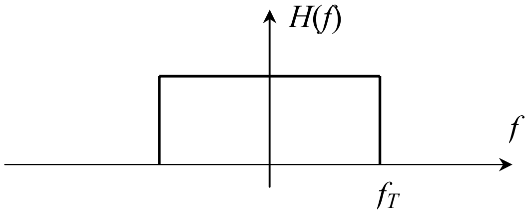
Soluzione esercizio 4

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\dfrac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega=\frac{\pi}{2}$ vale $\dfrac{4}{1+j\frac{1}{4}}=\dfrac{16}{\sqrt{17}}e^{j\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)}$.

La risposta è $\dfrac{16}{\sqrt{17}}\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, che per $n=0$ vale $\dfrac{16}{\sqrt{17}}\cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Esercizio N. 5

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 5 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T = 2$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \frac{\pi}{3}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



Soluzione esercizio 5

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \frac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \frac{2}{\frac{\pi}{3}} = 12\ KHz$. L'operazione è possibile poiché risulta $f_s \geq f_M$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (4)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al gradino unitario $u(1-t)$ con il segnale:

$$y(t)=\frac{1}{2}(1-e^{t})u(-t)$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

.

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(1-t)$, la risposta a $u(-t)$ sarà data da $y(t+1)=\frac{1}{2}(1-e^{t+1})u(-t-1)$ e la risposta impulsiva sarà pari a $-\frac{dy(t+1)}{dt}$. Pertanto:

$$\delta(t)\rightarrow\frac{1}{2}e^{t+1}u(-t-1)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k]=n\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n]=\begin{cases}1 & \text{per} \quad n=0,1,2\ e\ 3\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0]=\delta[n]$ mentre $h[n,2]=2\delta[n-2]\neq\delta[n-2]$.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=\sum_{k=0}^{3}n\delta[k-n]=\delta[n-1]+2\delta[n-2]+3\delta[n-3]$$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale e dispari. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)\quad \dfrac{1}{j\omega^3 + j3}$

$b)\quad je^{-2\omega}u(\omega)$

$c)\quad j\sin(2\omega)$

$d)\quad \dfrac{j+\sin\omega}{\omega}$

<u>Soluzione esercizio 3</u>

La trasformata deve essere immaginaria e dispari: quindi la risposta corretta è la *c*).

<u>Esercizio N. 4</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$.

Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n = 0$.

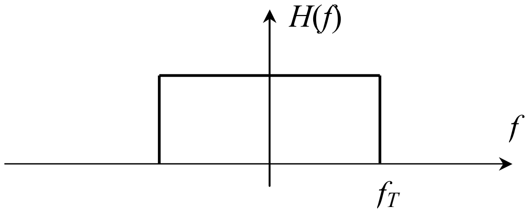
<u>Soluzione esercizio 4</u>

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\frac{1}{4}\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega = \frac{3\pi}{2}$ vale $\frac{1}{4}\frac{j}{1-j\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{17}}e^{j\arctan(-4)}$.

La risposta è $\frac{1}{\sqrt{17}}\sin\left(\frac{3\pi}{2}n + \arctan(-4)\right)$, che per $n = 0$ vale $\frac{1}{\sqrt{17}}\sin(\arctan(-4)) = -0.2353$.

<u>Esercizio N. 5</u>

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 20 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T = 15$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \frac{\pi}{2}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



<u>Soluzione esercizio 5</u>

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \frac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \frac{15}{\frac{\pi}{2}} = 60\ KHz$. L'operazione è possibile poiché risulta $f_s \geq f_M$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (5)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al gradino unitario $u(t+1)$ con il segnale:

$$y(t) = e^{-t}u(t)$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(t+1)$, la risposta a $u(t)$ sarà data da $y(t-1) = e^{-t+1}u(t-1)$ e la risposta impulsiva sarà pari a $\frac{dy(t-1)}{dt}$. Pertanto:

$$\delta(t) \to -e^{-t+1}u(t-1) + \delta(t-1)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k] = n\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n] = u[n]$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0] = \delta[n]$ mentre $h[n,2] = 2\delta[n-2] \neq \delta[n-2]$.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} n\delta[n-k] = n\sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] = nu[n]$$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)\quad \dfrac{1}{j\omega^3 + 3}$

$b)\quad e^{-j2\omega} u(\omega)$

$c)\quad j\cos(2\omega)$

$d)\quad \dfrac{j + \cos\omega}{\omega}$

<u>Soluzione esercizio 3</u>

La trasformata deve possedere la proprietà di simmetria: pertanto la risposta esatta è la *a*)

<u>Esercizio N. 4</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n] = u[n] - u[n-10]$.
Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n = 0$.

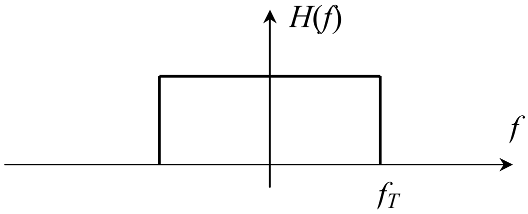
<u>Soluzione esercizio 4</u>

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n] = u[n] - u[n-10]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\dfrac{1 - e^{-j10\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega = \dfrac{2\pi}{3}$ vale1.

La risposta è $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$, che per $n = 0$ vale 1.

<u>Esercizio N. 5</u>

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T = 6$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \dfrac{2\pi}{3}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



Soluzione esercizio 5

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \frac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \frac{6}{\frac{2\pi}{3}} = 18\ KHz$. L'operazione è possibile: pur essendo la necessaria frequenza di campionamento minore di $2f_M$, la sovrapposizione degli spettri non interessa la parte di spettro che verrà filtrata.

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (6)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al gradino unitario $u(t-1)$ con il segnale:

$$y(t)=\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-t}$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(t-1)$, la risposta a $u(t)$ sarà data da $y(t+1)=\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t-1}$ e la risposta impulsiva sarà pari a $\frac{dy(t+1)}{dt}$. Pertanto:

$$\delta(t)\rightarrow -\mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t-1}+\delta(t+1)-\frac{1}{e}\delta(t)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k]=n\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n-1]$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0]=\delta[n]$ mentre $h[n,2]=2\delta[n-2]\neq\delta[n-2]$.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right)u[k-1]n\delta[k-n]=n\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right)\delta[k-n]$$

Per $n<1$ tutti i termini della somma sono nulli. Per $n\geq 1$ essi sono tutti nulli tranne quello per $k=n$. Pertanto

$$y[n]=n\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)u[n-1]$$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)\quad \dfrac{1}{\omega^3+\omega^2+j3}$

$b)\quad j\dfrac{1}{\omega^3+j3}$

$c)\quad \dfrac{1}{\omega^2+j3}$

$d)\quad \dfrac{1+\sin\omega}{\omega}$

Soluzione esercizio 3

La trasformata deve possedere la proprietà di simmetria: pertanto la risposta esatta è la *b*)

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n]=u[n]-u[n-9]$.

Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n=0$.

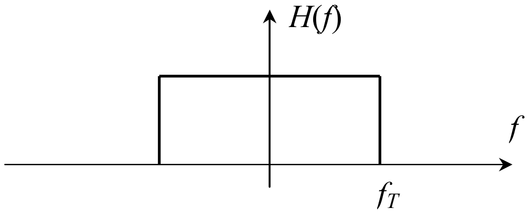
Soluzione esercizio 4

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n]=u[n]-u[n-9]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\dfrac{1-e^{-j9\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega=\dfrac{3\pi}{4}$ vale1.

La risposta è $x[n]=\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$, che per $n=0$ vale 0.

Esercizio N. 5

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T = 5$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \frac{4\pi}{5}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



Soluzione esercizio 5

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \frac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \frac{5}{\frac{4\pi}{5}} = 12.5\ KHz$. L'operazione non risulta possibile: la necessaria frequenza di campionamento è minore di $2 f_M$ e la sovrapposizione degli spettri va ad interessare anche la parte di spettro che verrà filtrata.

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (7)

13 novembre 2008

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante risponde al segnale $u(1-t)$ con il segnale:

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione esercizio 1

Se $y(t)$ è la risposta a $u(1-t)$, la risposta a $u(-t)$ sarà data da $y(t+1) = \frac{1}{2} e^{-t-1} u(t+1)$ e la risposta impulsiva sarà pari a $-\frac{dy(t+1)}{dt}$. Pertanto:

$$\delta(t) \to \frac{1}{2} e^{-t-1} u(t+1) - \frac{1}{2} \delta(t+1)$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale

$$h[n,k] = n\delta[k-n]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante e calcolare la sua risposta al segnale

$$x[n] = u[n+2]$$

Soluzione esercizio 2

Il sistema non è tempo invariante: infatti $h[n,0] = \delta[n]$ mentre $h[n,2] = 2\delta[n-2] \neq \delta[n-2]$.

La risposta a $x[n]$ è:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k+2] n\delta[k-n] = n \sum_{k=-2}^{+\infty} \delta[k-n] = nu[n+2]$$

Esercizio N. 3

Di un segnale $x(t)$ si sa che è reale dispari. La sua trasformata di Fourier è una delle seguenti funzioni. Quale? Giustificare la risposta.

$a)\quad \dfrac{1+\omega}{j\sin\omega}$

$b)\quad e^{-j2\omega}u(\omega)$

$c)\quad \dfrac{1+\cos\omega}{j\sin\omega}$

$d)\quad \dfrac{j+\cos\omega}{\omega^2}$

Soluzione esercizio 3

La trasformata deve essere immaginaria dispari: pertanto la risposta corretta è la $c)$

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

Al suo ingresso viene posto il segnale $x[n]=u[n]-u[n-6]$.

Calcolare il valore che il segnale all'uscita del sistema assume all'istante $n=0$.

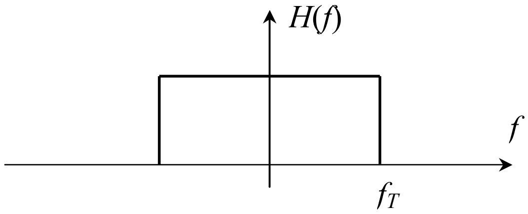
Soluzione esercizio 4

La risposta è la stessa che si avrebbe con un segnale $x[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$ posto all'ingresso di un sistema con risposta impulsiva $h[n]=u[n]-u[n-6]$. Il segnale di ingresso è un'autofunzione; il nuovo sistema ha risposta in frequenza pari a $\dfrac{1-e^{-j6\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$, che in $\Omega=\dfrac{2\pi}{5}$ vale1.

La risposta è $y[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$, che per $n=0$ vale 1.

Esercizio N. 5

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 8 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro ideale avente la risposta in frequenza riportata in figura, in cui $f_T=4$ KHz. Si vuole eseguire tale operazione con un filtro passa basso ideale tempo-discreto, con frequenza di taglio $\Omega_T = \frac{3\pi}{5}$. Quale dovrebbe essere la frequenza di campionamento da usare nella conversione da tempo-continuo a tempo discreto? Si ritiene possibile eseguire il filtraggio con tale sistema tempo discreto? (Giustificare la risposta).



Soluzione esercizio 5

La frequenza di campionamento deve soddisfare la seguente proporzione:

$$2\pi f_s : 2\pi = 2\pi f_T : \Omega_T$$

Ne consegue che $f_s = 2\pi \frac{f_T}{\Omega_T} = 2\pi \frac{4}{\frac{3\pi}{5}} = 13.33\ KHz$. L'operazione risulta possibile: la necessaria frequenza di campionamento è minore di $2 f_M$, ma la sovrapposizione degli spettri non va ad interessare la parte di spettro che verrà filtrata.