Teoria dei Segnali

(Appello del 16 luglio 2009)

Prova scritta

Parte prima

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo invariante, tempo discreto, è caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-\frac{1}{2}} u[2n-1]$$

Calcolare la sua risposta in frequenza e la risposta al segnale $x[n] = u[n-1]$

Soluzione

La risposta impulsiva può essere messa nella forma $h[n] = \sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u[n-1]$, che ha come trasformata di Fourier la funzione $H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$. La risposta al segnale $x[n]$ è calcolabile con la somma di convoluzione:

$$y[n] = \sqrt{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} u[k-1]u[n-k-1] = \begin{cases} 0 & per\, n < 2 \\ \sqrt{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) & per\, n \geq 2 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

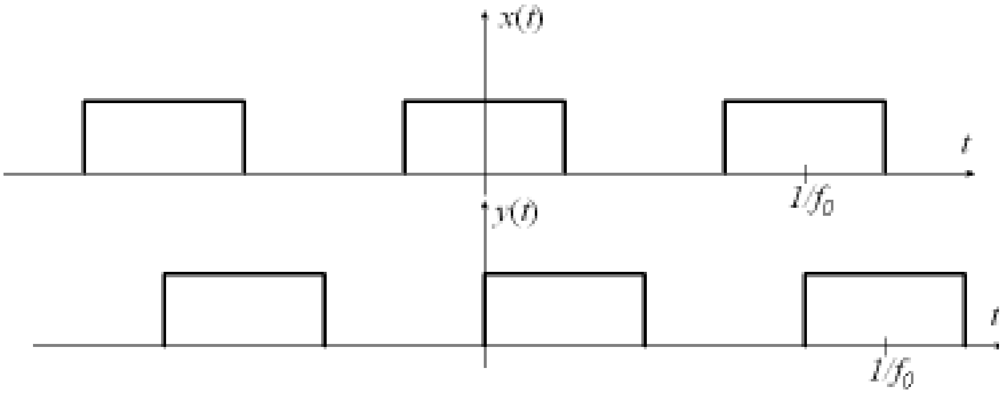
Un sistema lineare tempo invariante risponde al segnale $x(t) = u[\cos(2\pi f_0 t)]$ con il segnale $y(t) = u[\sin(2\pi f_0 t)]$. Dire quanto vale la risposta in frequenza in corrispondenza a $f = 3f_0$.

Soluzione

Se si prova disegnare il $x(t)$ e la corrispondente risposta $y(t)$ si nota che:

a) $x(t)$ è un segnale periodico di periodo $T = \frac{1}{f_0}$, e quindi avente frequenza fondamentale f_0

b) $y(t) = x\left(t - \frac{T}{4}\right)$



Pertanto, per una ben nota proprietà della trasformata di Fourier,

$$H(f_0) = e^{-j2\pi 3 f_0 \frac{T}{4}} = j$$

Esercizio N. 3

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con il segnale $u[n-|k|]$. Si tratta di un sistema tempo invariante?

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante (perché?).
La risposta cercata è data dalla sommatoria seguente:

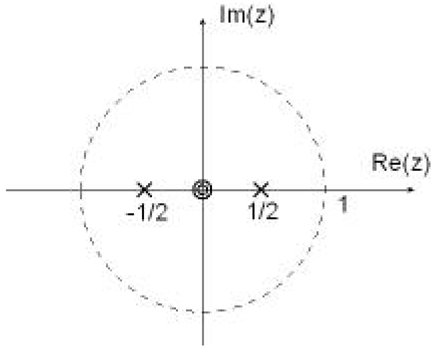
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} u[n-|k|] = \begin{cases} 0 & per\, n < 0 \\ \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & per\, n \geq 0 \end{cases}$$

La sommatoria relativa al caso $n \geq 0$ vale $4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 1$

Parte seconda

Esercizio N. 4

La funzione di trasferimento di un sistema LTI tempo discreto, stabile, ha il seguente diagramma zeri-poli:



Inoltre si sa che $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|^2 d\Omega = 1$.

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La funzione di trasferimento avrà la seguente forma: $H(z) = \frac{Az^2}{z^2 - \frac{1}{4}}$, che può essere messa nella forma: $H(z) = z\left(\frac{\frac{A}{2}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{A}{2}}{z+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\frac{A}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{A}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$. La corrispondente risposta impulsiva è data da:

$$h[n] = \frac{A}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] = A\left(1,0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{16},0,\frac{1}{64},0,\ldots\right)$$

In base al teorema di Parseval dovrà essere $A^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n = 1 \rightarrow A = \frac{4}{\sqrt{15}}$

Esercizio N. 5

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = \alpha\cos(2\pi f_0(t-\alpha))$$

in cui f_0 è una costante e α è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-\frac{1}{2f_0}$ e $\frac{1}{2f_0}$. Valutare il valor medio di insieme del processo e il valor medio temporale (quest'ultimo dipende dalla realizzazione?).

Soluzione

La densità di probabilità della variabile α vale f_0 nell'intervallo tra $-\frac{1}{2f_0}$ e $\frac{1}{2f_0}$.

a) calcolo del valor medio di insieme:

$$E\{\alpha\cos(2\pi f_0(t-\alpha))\} = f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\alpha\cos(2\pi f_0(t-\alpha))d\alpha =$$

$$= -\left.\frac{f_0\alpha\sin(2\pi f_0(t-\alpha))}{2\pi f_0}\right|_{-1/2f_0}^{1/2f_0} + f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\frac{\sin(2\pi f_0(t-\alpha))}{2\pi f_0}d\alpha =$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0}$$

b) calcolo del valor medio temporale

$$\langle\alpha\cos(2\pi f_0(t-\alpha))\rangle = f_0\int_{-1/2f_0}^{1/2f_0}\alpha\cos(2\pi f_0(t-\alpha))dt = 0 \quad \forall\alpha$$

Esso non dipende dalla realizzazione.

Esercizio N. 6

Calcolare la densità spettrale di potenza del processo aleatorio così definito:

$$x(t) = \cos^2(2\pi f\, t + \varphi)$$

con f e φ variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite rispettivamente tra 1 MHz e 2 MHz e tra 0 e 2π radianti.

Si tratta di un processo aleatorio stazionario? (almeno in senso debole).

Soluzione

Il segnale può essere posto nella forma $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2f\, t + 2\varphi)$. Per quanto riguarda la stazionarietà, il fatto che la fase sia una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π fa sì che la funzione di auto correlazione $R_x(t, t+\tau)$ sia dipendente solo da τ e che il valor medio sia indipendente da t. Pertanto il processo è stazionario in senso debole. Ogni realizzazione è caratterizzata da una potenza media in watt pari a $\frac{1}{4}$ (concentrata a frequenza zero), più $\frac{1}{8}$, distribuito tra 2 e 4 MHz. La densità spettrale di potenza (unilatera) pertanto è: $S_x(f)=\frac{1}{4}\delta(f)+\frac{10^{-6}}{16}\mathrm{rect}\left(\frac{t-3\times10^{6}}{2\times10^{6}}\right)$