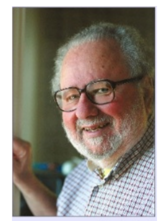
Che cos'è *una* logica?

Eugenio G. Omodeo

a.a. 2020/2021

"A *logic* **L** is determined by a nonempty set E of elements together with a relation $\vdash$. For a subset A of E and an element α of E "$A \vdash \alpha$" is a statement which may be true or false. (We may think of "$A \vdash \alpha$" as asserting that α is a "logical consequence" of the *premises* A.)"
[Davis, 1993, p. 1]



1 Logiche, booleane e non

La definizione che segue, ripresa qui da [Davis, 1993], mette in luce il tipo di relazione che sussiste fra un insieme A di PREMESSE e una CONCLUSIONE α in una logica $\mathbb{L}$ che ci permetta di *ricavare* (o '*derivare*', o '*inferire*') α da A; in simboli: $A \vdash \alpha$.

Definizione 1 *Una* LOGICA *è una struttura*

$$\mathbb{L} \;=\; (\mathcal{E}, \vdash)$$

costituita da

- *un insieme* $\mathcal{E} \neq \emptyset$ *e da*
- *una relazione diadica* $\vdash$ *tale che* $\mathscr{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \;\supseteq\; \vdash$

soddisfacenti le condizioni:

L1. $\{\alpha\} \vdash \alpha$;

L2. ***(Monotonicità)*** *quando* $A \vdash \alpha$*, si ha* $B \vdash \alpha$ *per* ogni *insieme di enunciati* $B \supseteq A$*;*

L3. ***(Compattezza)*** *quando* $A \vdash \alpha$*, si ha* $F \vdash \alpha$ *per* qualche *insieme* $\boxed{\text{finito}}$ F *tale che* $A \supseteq F$*;*

L4. ***(Taglio)*** *quando* $A \vdash \alpha$ *e* $B \cup \{\alpha\} \vdash \beta$*, allora* $A \cup B \vdash \beta$*.* (V. Fig. 1)

Gli elementi di $\mathcal{E}$ *e la relazione* $\vdash$ *vengono chiamati, rispettivamente,* ENUNCIATI *di* $\mathbb{L}$ *e* DERIVABILITÀ *in* $\mathbb{L}$*.* $\dashv$

Si usa scrivere:

$$\begin{array}{rll} A \nvdash \beta & \text{per indicare che} & A \vdash \beta \textit{ non } \text{è vera;} \\ A, \alpha \vdash \beta & \text{per indicare che} & A \cup \{\alpha\} \vdash \beta; \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta & \text{per indicare che} & \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta. \end{array}$$

In quest'ultima, n è un qualsiasi numero naturale; dunque $\vdash \beta$ sta per $\emptyset \vdash \beta$.

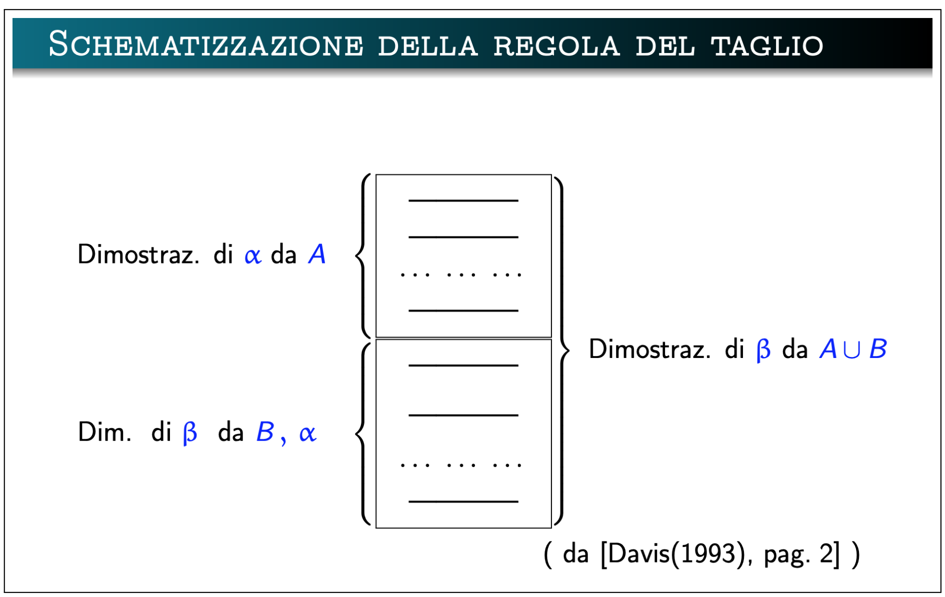


Figura 1: Illustrazione della regola del taglio.

La prossima definizione vuol catturare la nozione di 'teoria contraddittoria' (si pensi ad A come a un insieme di postulati):

Definizione 2 *In una logica $\mathbb{L}$:*

un insieme A di enunciati si dice INCONSISTENTE *se $A \vdash \alpha$ è vera per ogni enunciato α; si dice* CONSISTENTE*, se ciò non avviene.*

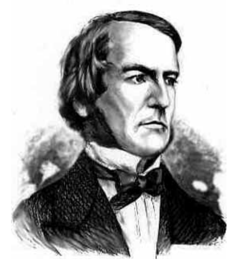
$\mathbb{L}$ stessa si dice INCONSISTENTE *quando in $\mathbb{L}$ è inconsistente lo $\emptyset$ (cioè, se in $\mathbb{L}$ ogni enunciato è derivabile da $\emptyset$);* CONSISTENTE*, nel caso opposto.* $\dashv$

Definizione 3 *Una* LOGICA BOOLEANA *è una struttura*

$$\mathbb{L} \;=\; (\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow\,)$$

costituita da

- *una logica $(\mathcal{E}, \vdash)$,*
- *un elemento f di $\mathcal{E}$,*
- *un'operazione diadica*[1] *$\Rightarrow$ su $\mathcal{E}$*



George Boole
(Lincoln 1815 –
Ballintemple 1864)

soddisfacenti le condizioni:

B1. ***(Principio di deduzione)*** $\quad A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ *se e solo se* $A, \alpha \vdash \beta$*;*

B2. ***(Principio di doppia negazione)*** $\quad (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

L'operazione $\Rightarrow$ e i suoi primo e secondo operando, si chiamano: IMPLICAZIONE MATERIALE*,* ANTECEDENTE *e* CONSEGUENTE. $\dashv$

Esercizio 1 Mostrare l'inconsistenza della logica booleana che ha $\mathcal{E} = \{f\}$. $\dashv$

Esercizio 2 Si dimostri che c'è una logica booleana *consistente* il cui $\mathcal{E}$ è formato di due soli elementi: **f** (l'f designato) e **t**; che in tale logica la tabella dell'operazione $\Rightarrow$ non può essere che questa:

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
f	**f**	**t**
f	**t**	**t**
t	**f**	**f**
t	**t**	**t**

e che in essa $A \vdash \alpha$ varrà se e solo se α appartiene ad $A \cup \{\mathbf{t}\}$. $\dashv$

[1] Vale a dire che $\alpha \Rightarrow \beta$ è un enunciato per ogni coppia α, β di enunciati.

La logica individuata nell'Esercizio 2 verrà indicata, di qui in poi, come $\mathbb{P}_0$. Intuitivamente parlando, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{t}$ rappresentano il *falso* e il *vero* e l'operazione $\Rightarrow$ il connettivo "se ... allora ...".

Notare che l'operazione $\alpha \Rightarrow \mathbf{f}$ 'nega', in un certo senso, α.

Esercizio 3 Dimostrare che per l'inconsistenza di A, in una logica booleana, è sufficiente che $A \vdash f$. $\dashv$

Esercizio 4 (*Modus ponens*) Dimostrare che in qualsiasi logica booleana:

- $\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$;
- se $A \vdash \alpha$ e $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$, allora $A \vdash \beta$. $\dashv$

Esercizio 5 Dimostrare che quando, in una logica booleana, vale $A \not\vdash \beta$ allora l'insieme $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$ è consistente. $\dashv$

2 Consistenza massimale

In una logica booleana un insieme consistente di enunciati è *massimale* se, ingrandendolo, lo si rende inconsistente:

Definizione 4 *Sia $\mathbb{L}$ una logica booleana ed M un insieme di enunciati di $\mathbb{L}$. Diremo che M è* CONSISTENTE MASSIMALE *se:*

- *M è consistente;*
- *$M \cup \{\alpha\}$ è inconsistente per ogni enunciato α che non stia in M.* $\dashv$

Sempre in tema di logiche booleane, abbiamo che:

Teorema 1 (di Lindenbaum) *Ogni insieme consistente di enunciati è incluso in uno massimale.*

Dim. (traccia): Ci viene dato un A consistente e vogliamo trovare un $M \supseteq A$ che sia consistente massimale. Per semplicità (altrimenti converrebbe ricorrere al lemma di Zorn), supponiamo che l'intero insieme degli enunciati possa essere disposto in una successione—ove le ripetizioni sono ammesse:

$$\mathcal{E} \quad = \quad \{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots\} \ .$$

Poniamo

$$
\begin{aligned}
A_0 \quad &=_{\text{Def}} \quad A\,; \\
A_{n+1} \quad &=_{\text{Def}} \quad \begin{cases} A_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se quest'insieme è consistente,} \\ A_n & \text{nel caso contrario .} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Cosí, induttivamente, tutti gli A_i risultano consistenti. Da ultimo poniamo

$$M \quad =_{\text{Def}} \quad A_0 \,\cup\, A_1 \,\cup\, A_2 \,\cup\, A_3 \,\cup \cdots\,;$$

i.e., un enunciato α appartenga ad M se e solo se α sta in qualche A_i.

Se M *fosse inconsistente*, avremmo $M \vdash f$ in base alla Def. 2; dunque, per il requisito di compattezza $L3$, vi sarebbero $\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k}$ in numero finito, ciascuno appartenente ad M e tali che

$$\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_k} \quad \vdash \quad f\,;$$

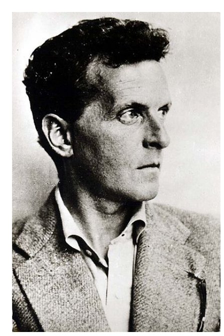
ma allora ciascun α_{n_j} apparterrebbe ad A_{m_j} per qualche m_j e tutti apparterrebbero ad A_m, ove $m = \max\{m_1, \ldots, m_k\}$; con ciò risulterebbe che A_m è inconsistente e otterremmo una contraddizione. Dunque M è consistente.

Per verificare la *massimalità* di M, proviamo a supporre che $M \cup \{\alpha\}$ sia consistente per qualche α non appartenente ad M. Allora, individuato il primo n per cui valga $\alpha = \alpha_n$, avremmo anche la consistenza di $A_n \cup \{\alpha_n\}$. Ma allora dovrebbe valere $M \supseteq A_{n+1} = A_n \cup \{\alpha\}$ per come abbiamo costruito A_{n+1} ed M, donde la contraddizione cercata. $\dashv$

3 Cosa s'intende per tautologia?

"Proof in logic is only a mechanical expedient to facilitate the recognition of tautology, where it is complicated." [2]

[Wittgenstein, 1922, 6.1262]



Ludwig J.J. Wittgenstein (Vienna 1889 – Cambridge 1951)

Assieme alla logica booleana

$$\mathbb{P}_0 \quad = \quad (\{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}, \vdash, \mathbf{f}, \Rightarrow\,)$$

dell'Esercizio 2, consideriamo adesso una qualsiasi logica booleana

$$\mathbb{L} \quad = \quad (\mathcal{E}, \vdash_{\mathbb{L}}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}\,)$$

e stabiliamo:

[2] Fuorviante?!

Definizione 5 *Un* ASSEGNAMENTO *per* $\mathbb{L}$ *è una funzione*

$$\boldsymbol{q} : \quad \mathcal{E} \quad \longrightarrow \quad \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$$

tale che $\boldsymbol{q}(f) = \mathbf{f}$ *e* $\boldsymbol{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) = (\boldsymbol{q}(\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{q}(\beta))$ *per ogni coppia* α, β *di enunciati di* $\mathbb{L}$ (cosicché

$\boldsymbol{q}(\alpha)$	$\boldsymbol{q}(\beta)$	$\boldsymbol{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta)$
f	f	t
f	t	t
t	f	f
t	t	t

dovrà sempre valere). $\dashv$

Definizione 6 *Si dice che un assegnamento*

$\boldsymbol{q}$ RENDE VERO α*: quando* $\boldsymbol{q}(\alpha) = \mathbf{t}$*;* *e che*

$\boldsymbol{q}$ INVERA A*: quando* $\boldsymbol{q}$ *rende veri tutti gli enunciati in* A*.* $\dashv$

Definizione 7 *Si chiama* TAUTOLOGIA *ogni enunciato* α *che risulti* sempre vero*: cioè a dire, che sia reso vero da tutti gli assegnamenti.* $\dashv$

Le tre proposizioni che seguono evidenziano che consistenza e inveramento sono, in qualsiasi logica booleana, nozioni intimamente correlate:

Teorema 2 *Se* $A \nvdash_{\mathbb{L}} f$*, allora c'è un assegnamento che invera* A*.*

Dim. (traccia): L'ipotesi ci dà la consistenza di A (v. Def. 2); per il teorema di Lindenbaum c'è dunque un $M \supseteq A$ che è consistente massimale. Posto

$$\boldsymbol{q}(\alpha) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} \mathbf{t} & \text{se } \alpha \text{ appartiene ad } M, \\ \mathbf{f} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

basta accertarsi che $\boldsymbol{q}$ sia un assegnamento. Di certo $\boldsymbol{q}(f) = \mathbf{f}$, visto che f non può appartenere ad M non essendone derivabile. Per accertare che $\boldsymbol{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} \beta) = (\boldsymbol{q}(\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{q}(\beta))$, si esaminino separatamente i tre casi:
(1) $\beta \in M$, (2) $\alpha \notin M$, (3) $\alpha \in M$ e $\beta \notin M$. (Esercizio!) $\dashv$

Teorema 3 (Teorema-chiave sulle logiche booleane) *Se qualsiasi assegnamento inveri* A *rende del pari vero l'enunciato* α*, allora* $A \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$*.*

Dim. (traccia): Supponendo il contrario, da $A \nvdash_{\mathbb{L}} \alpha$ otteniamo che $A \cup \{\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f\}$ è consistente; perciò, in base al precedente Teor. 2, c'è un assegnamento $\boldsymbol{q}$ che invera A e che soddisfa anche l'uguaglianza $\boldsymbol{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = \mathbf{t}$. Al contempo dovrebbe valere $\boldsymbol{q}(\alpha \Rightarrow_{\mathcal{E}} f) = (\boldsymbol{q}(\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{q}(f)) = (\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{f}) = \mathbf{f}$. $\dashv$

Corollario 4 (di Post) *Se α è una tautologia, allora $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.* $\dashv$

Emil Leon Post (Augustów 1897 – New York 1954)

Esercizio 6 Dimostrare il corollario di Post. $\dashv$

4 Logiche booleane minimali

Notare che la definizione di assegnamento ha senso anche in assenza di $\vdash_{\mathbb{L}}$: basta che f ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ siano un elemento di $\mathcal{E}$ e un'operazione diadica su $\mathcal{E}$. Per atteggiare una simile terna $\mathcal{E}, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}}$ a logica booleana, possiamo limitarci a definire la relazione $\vdash_m$ fra $\mathscr{P}(\mathcal{E})$ ed $\mathcal{E}$ ponendo:

Definizione 8 *$A \vdash_m \alpha$ se c'è un sottoinsieme finito F di A tale che α risulti vero in qualsiasi assegnamento inveri F.* $\dashv$

Esercizio 7 Mostrare che ogniqualvolta f appartiene a $\mathcal{E}$ ed $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$ è un'operazione diadica su $\mathcal{E}$, la $\mathbb{L} = (\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ che risulta da detta $\vdash_m$ è una logica booleana. $\dashv$

Abbiamo cosí che

Teorema 5 *$A \vdash_m \alpha$ se e solo se α risulta vero in ogni assegnamento che inveri A. (In particolare, $\vdash_m \alpha$ se e solo se α è una tautologia).*

Dim. (traccia): Il "se" ci è dato dal teorema-chiave, visto che $(\mathcal{E}, \vdash_m, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$ è una logica booleana (v. Esercizio 7).

Di converso, se A ha un sottoinsieme finito F tale che ogni assegnamento inverante F renda vero α allora, a maggior ragione, gli assegnamenti che inverano l'intero A dovranno render vero α. $\dashv$

Banalmente, in considerazione del teorema-chiave, per ogni logica booleana $(\mathcal{E}, \vdash, f, \Rightarrow_{\mathcal{E}})$, otteniamo:

Teorema 6 (Minimalità di $\vdash_m$) *A parità d'insieme $\mathcal{E}$ degli enunciati, di elemento designato f e di operazione $\Rightarrow_{\mathcal{E}}$,*

$$A \vdash_m \alpha \quad \text{implica} \quad A \vdash \alpha \ .$$

(Per questo motivo, chiamiamo $\vdash_m$ una LOGICA MINIMALE). $\dashv$

Esercizio 8 Mostrare che una logica booleana minimale $\mathbb{L}$ è consistente se e solo se c'è almeno un assegnamento per $\mathbb{L}$. $\dashv$

5 Logica proposizionale standard (o quasi)

Consideriamo una successione infinita

$$(\ , \quad) \ , \quad \rightarrow , \quad \mathsf{p}_0 \ , \quad \mathsf{p}_1 \ , \quad \mathsf{p}_2 \ , \quad \mathsf{p}_3 \ , \quad \mathsf{p}_4 \ , \quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi SIMBOLI. Con la notazione

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”} \ ;$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_h \rangle \ ,$$

ovvero un'*h-upla*, con un numero qualsiasi h di componenti, *formata di simboli* σ_i; inoltre definiamo l'operazione $\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\varrho}$ per ogni coppia $\boldsymbol{\sigma} =$ “$\sigma_1 \cdots \sigma_h$”, $\boldsymbol{\varrho} =$ “$\varrho_1 \cdots \varrho_k$” di sequenze finite di simboli ponendo

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”} \quad \Rightarrow \quad \text{“}\varrho_1 \cdots \varrho_k\text{”} \qquad =_{\text{Def}} \qquad \text{“}(\sigma_1 \cdots \sigma_h \rightarrow \varrho_1 \cdots \varrho_k)\text{”} \ .$$

Indichiamo, infine, con

$$f \ , \quad \underbrace{p \ , \quad q \ , \quad r \ , \quad s \ , \quad p' \ , \quad q' \ , \quad r' \ , \quad s' \ , \quad p'' \ , \quad \ldots}_{\text{lettere proposizionali}}$$

la successione

$$\text{“}\mathsf{p}_0\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_1\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_2\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_3\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_4\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_5\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_6\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_7\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_8\text{”}\,,\quad \text{“}\mathsf{p}_9\text{”}\,,\quad \ldots$$

di 1-uple e con $\boxed{\mathcal{P}}$ il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\{\, f\,,\quad p\,,\quad q\,,\quad r\,,\quad s\,,\quad p'\,,\quad q'\,,\quad r'\,,\quad s'\,,\quad p''\,,\quad \ldots\quad \}$$

tale che per ogni coppia α, β di sequenze $\underline{\text{in } \mathcal{P}}$ anche $\alpha \Rightarrow \beta$ appartenga a $\mathcal{P}$.

La LOGICA PROPOSIZIONALE STANDARD è, per definizione, la logica booleana minimale[3]

$$\mathbb{P} \;=\; (\,\mathcal{P}\,,\models,\,f\,,\Rightarrow)$$

istruita su detta collezione $\mathcal{P}$, che qui funge da insieme di enunciati.

5.1 Sintesi di enunciati a partire da funzioni booleane

Sia γ un enunciato di $\mathbb{P}$. Indichiamo con $\mathsf{p}_{j_1}, \ldots, \mathsf{p}_{j_\ell}$ i simboli diversi da $(\,,\,)\,, \rightarrow$ e da p_0 che figurano come componenti in γ, per definitezza ordinati in modo che $j_1 < j_2 < \cdots < j_\ell$ e poniamo per brevità

$$\mathbf{2} =_{\text{Def}} \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}\,.$$

Per ogni funzione

$$\Im\,:\;\; \{\mathsf{p}_{j_1}, \ldots, \mathsf{p}_{j_\ell}\} \;\longrightarrow\; \mathbf{2}\;,$$

è facile individuare assegnamenti $\boldsymbol{q}$ tali che

$$\boldsymbol{q}(\mathsf{p}_{j_1}) \;=\; \Im(\mathsf{p}_{j_1})\,, \qquad \cdots\,, \qquad \boldsymbol{q}(\mathsf{p}_{j_\ell}) \;=\; \Im(\mathsf{p}_{j_\ell})$$

e determinare—sulla scorta della Def. 5—il valore $\gamma^{\Im}$ assunto da γ in qualsiasi tale assegnamento (che è sempre lo stesso). In quest'ottica, γ è dunque la *specifica* di una funzione da $\mathbf{2}^\ell$ in $\mathbf{2}$ e possiamo dire che ne rappresenta il decorso di valori.

Chiamiamo FUNZIONI BOOLEANE gli elementi di $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbf{2}^{\mathbf{2}^\ell}$. Che insieme costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati di $\mathbb{P}$? La risposta—vedremo subito—è semplice: si tratta dell'insieme delle funzioni booleane

[3] Alla luce del Teor. 5, qui passiamo a scrivere $A \models \alpha$ (leggere: 'α è conseguenza tautologica di A') invece di $A \vdash_m \alpha$, per accordare la notazione a [Enderton, 2001, p. 23].

tutto intero. Stiamo infatti per vedere come 'sintetizzare' (cioè come individuare in modo automatico), data una qualsiasi funzione booleana $\flat$, un enunciato γ che specifichi $\flat$.

Introduciamo, preliminarmente, in $\mathbb{P}$ le abbreviazioni

$$\begin{aligned} \neg\alpha \quad &=_{\text{Def}} \quad \alpha \Rightarrow f \ , \\ \alpha \vee \beta \quad &=_{\text{Def}} \quad (\neg\alpha) \Rightarrow \beta \ , \\ \alpha \,\&\, \beta \quad &=_{\text{Def}} \quad \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \ . \end{aligned}$$

Tecnica di sintesi. Descriviamo in forma tabellare la data $\flat$:

p_1	$\cdots$	p_ℓ	$\flat(\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_\ell)$
$\mathbf{f}$	$\ldots$	$\mathbf{f}$	v_1
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{t}$	$\ldots$	$\mathbf{t}$	v_{2^ℓ}

(Dunque ciascun valore v_i appartiene a $\mathbf{2}$). Per ottenere da $\flat$ un enunciato γ che ne rappresenti il decorso di valori, si ponga

$$\gamma \quad =_{\text{Def}} \quad (\beta_{i_1,1} \,\&\cdots\&\, \beta_{i_1,\ell}) \vee \cdots \vee (\beta_{i_g,1} \,\&\cdots\&\, \beta_{i_g,\ell})$$

dove $i_1, \ldots, i_g$ sono gli indici i delle righe sulle quali $v_i = \mathbf{t}$ e dove ciascun enunciato $\beta_{i,j}$ è definito come

$$\beta_{i,j} \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} \ \ \mathsf{p}_i & \text{se in riga } i \text{ colonna } j \text{ compare } \mathbf{t}, \\ \neg\mathsf{p}_i & \text{se in riga } i \text{ colonna } j \text{ compare } \mathbf{f}. \end{cases}$$

Esercizio 9 Che accade quando la sintesi di γ viene applicata al caso $\ell = 0$? Perfezionare la tecnica di sintesi per far sí che in γ figurino $\mathsf{p}_1, \ldots, \mathsf{p}_\ell$, ciascuno asserito o negato, anche nel caso che $\ell \neq 0$ ma che $v_i = \mathbf{f}$ su ogni riga. $\dashv$

Esercizio 10 Modificare la tecnica di sintesi in modo tale che l'enunciato γ associato alla data $\flat$ venga ad avere la forma

$$(\alpha_{i_1,1} \vee \cdots \vee \alpha_{i_1,\ell}) \,\&\cdots\&\, (\alpha_{i_g,1} \vee \cdots \vee \alpha_{i_g,\ell}) \ .$$

(N.B.: per indici $i_1, \ldots, i_g$ diversi da prima). $\dashv$

5.2 Mappe K

Una tecnica particolarmente efficace per rappresentare in forma tabulare una funzione booleana $\flat$ fu ideato nel 1953 da Maurice Karnaugh. La Fig. 2 riporta MAPPE DI KARNAUGH, in breve MAPPE K, per una $\flat$ che sia funzione ℓ-adica,[4] con $\ell = 2, 3, 4$: gli 0 e 1 utilizzati per indicizzare righe e colonne sono *alias* di **f** e **t** e ai fini dell'efficacia della rappresentazione è cruciale il criterio d'indicizzazione, che è descritto nella didascalia di Fig. 2.

$p \setminus q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \setminus q\,r$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$s\,p \setminus q\,r$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Figura 2: Mappe K (provvisoramente vuote) per funzioni booleane a 2,3,4 operandi. Le sequenze di bit che indicizzano due righe adiacenti differiscono solo per un bit; lo stesso avviene per coppie di colonne adiacenti. La prima e l'ultima riga vengono considerate adiacenti e cosí pure la prima e l'ultima colonna.

Nel riempire la mappa K di una funzione booleana, utilizzeremo:

✓ per indicare il risultato **t**,

? per indicare risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato **f**.

Fatto ciò, sarà molto facile leggere sulla mappa—raggruppando opportunamente insieme le caselle contrassegnate—un enunciato che specifichi $\flat$. La Fig. 3 esemplifica quest'impiego di una mappa K.

5.3 Inferenze formali

Cosa significa INFERIRE ϑ da A? Attenendoci a una *particolare versione del calcolo proposizionale* [Church, 1956], possiamo rispondere come segue.

[4] In altre parole, ℓ è il numero di argomenti su cui opera $\flat$.

$p\,q \setminus r\,s$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

Figura 3: Mappa K descrivente una funzione $\flat$ tale che $\flat(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{t}) = \flat(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{t}) = \flat(\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{f},\mathbf{t}) = \flat(\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{t}) = \flat(\mathbf{t},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ e che $\flat(\mathbf{t},\mathbf{f},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{t},\mathbf{f},\mathbf{t},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{f},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{f}) = \flat(\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{t},\mathbf{t}) = \mathbf{f}$. Da questa mappa balza all'occhio un enunciato che descrive la $\flat$: $\neg p \vee (s \,\&\, \neg r) \vee (q \,\&\, \neg q)$ (in alternativa, appena meno evidente, $\neg p \vee (s \,\&\, \neg q) \vee (r \,\&\, \neg r)$).

Diremo che la sequenza

$$\boldsymbol{\delta} \quad = \quad \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una DIMOSTRAZIONE di ϑ da A quando:

1) $\delta_h = \vartheta$;

2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un enunciato di $\mathbb{P}$ che

   ⋆ appartiene ad A, oppure

   ⋆ ricade in uno dei tre schemi della Fig. 4, oppure

   ⋆ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

`i.`	$\big(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\big) \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$
`ii.`	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
`iii.`	$\big((\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow (\beta \Rightarrow f)\big) \Rightarrow \big(\beta \Rightarrow \alpha\big)$

Figura 4: Tre schemi di tautologia (Alonzo Church, 1956). Nello schema `iii` è ravvisabile la ben nota *legge di contrapposizione.*

Esempio 1 Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \Rightarrow p$ da $\emptyset$, come segue:

		Ass.			Prem.
1.	$f \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[ii]			
2.	$(f \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow ((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[i]	3.	$(f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[1, 2]
4.	$((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[iii]	5.	$f \Rightarrow f$	[3, 4]
6.	$(f \Rightarrow f) \Rightarrow ((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[ii]	7.	$(p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[5, 6]
8.	$((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow p)$	[iii]	9.	$f \Rightarrow p$	[7, 8]

Definiamo ora (per il CALCOLO PROPOSIZIONALE):

$$A \vdash \vartheta \quad \textit{se e solo se} \quad \text{esiste una dimostrazione di } \vartheta \text{ da } A\,.$$

Com'è intuibile, l'adozione di particolari schemi—in questa nostra proposta gli `i`, `ii`, `iii`—quali ASSIOMI LOGICI non è univoca ma neppure arbitraria; criterio-guida è, comunque, far sí che viga la seguente proposizione:

Teorema 7 (Correttezza e completezza) *Per $A \subseteq \mathcal{P}$ e ϑ in $\mathcal{P}$,*

$$A \models \vartheta \ \textit{se e solo se} \ A \vdash \vartheta\,.$$

Proprio in base a tale criterio Church avanzò la proposta mostrata in Fig. 4; vedremo altre due proposte ad essa equipollenti nell'Appendice A.

6 Logica delle relazioni diadiche

Consideriamo una successione $\mathcal{R} = \langle \mathsf{r}_1, \mathsf{r}_2, \mathsf{r}_3, \ldots \rangle$, finita o infinita, di simboli distinti che chiameremo LETTERE RELAZIONALI. A partire da queste lettere (almeno una) e da altri sette simboli,

$$\emptyset\,,\ \ \mathbb{1}\,,\ \ \iota\,,\ \ \cap\,,\ \ \triangle\,,\ \ \circ\,,\ \ \smile\,,$$

costruiamo i PREDICATI, che sono:

1. le costanti $\emptyset$, $\mathbb{1}$, ι;
2. le lettere relazionali r_i;
3. le espressioni di una delle quattro forme

   $$(P \cap Q)\,,\ \ (P \triangle Q)\,,\ \ (P \circ Q)\,,\ \ P^{\smile}\,,$$

   con P e Q predicati.

Indicando con $\mathcal{Q}$ la collezione di tutte le uguaglianze $P = Q$ con P e Q predicati, ora ci avviamo a definire una logica

$$\mathcal{L}^{\times} \;=\; \Big(\mathcal{Q} \,, \vdash^{\times} \Big) .$$

Prima di far questo, vogliamo però fornire una *semantica* al linguaggio $\mathcal{Q}$; cioè, dotare di *significato* i predicati e le uguaglianze fra predicati.

6.1 Semantica dei predicati

Ci occorre una STRUTTURA interpretativa

$$\Im \;=\; \Big(\mathfrak{D}, \, \Re \Big) ,$$

con

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{D} & \text{DOMINIO DEL DISCORSO, non vuoto} \,, \\ \Re & \text{appartenente a } \;\prod_{r \in \mathcal{R}} \mathscr{P}\Big(\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \Big) . \end{array}$$

Vale a dire: $\Re$ associa a ogni lettera mappale una relazione *diadica* su $\mathfrak{D}$, cioè, un insieme di coppie ordinate di elementi di $\mathfrak{D}$. Estendiamo poi la funzione

$$\Re : \quad \mathsf{r_i} \;\mapsto\; \mathsf{r_i}^{\Im}$$

a $\boxed{\text{tutti}}$ i predicati ponendo, ricorsivamente,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{0}^{\Im} \;=_{\text{Def}}\; \emptyset \,, \quad \mathbb{1}^{\Im} & =_{\text{Def}} & \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \,, \quad \boldsymbol{\iota}^{\Im} \;=_{\text{Def}}\; \{ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \,:\, \boldsymbol{a} \text{ in } \mathfrak{D} \} \,; \\
(\, P \cap Q \,)^{\Im} & =_{\text{Def}} & \{ \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\Im} \,:\, \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\Im} \} \,; \\
(\, P \,\triangle\, Q \,)^{\Im} & =_{\text{Def}} & \{ \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \,:\, \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\Im} \;\underline{\text{s}}\text{se}\; \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \notin Q^{\Im} \} \,; \\
(P^{\smile})^{\Im} & =_{\text{Def}} & \{ \langle \boldsymbol{b} \,,\, \boldsymbol{a} \rangle \,:\, \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in P^{\Im} \} \,; \\
(\, P \circ Q \,)^{\Im} & =_{\text{Def}} & \{ \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \,:\, \text{vi sono } \boldsymbol{c} \text{ in } \mathfrak{D} \text{ per i quali} \\
 & & \qquad\qquad \langle \boldsymbol{a} \,,\, \boldsymbol{c} \rangle \in P^{\Im} \;\text{ e }\; \langle \boldsymbol{c} \,,\, \boldsymbol{b} \rangle \in Q^{\Im} \} .
\end{array}$$

A questo punto, qualsiasi enunciato $P = Q$ risulta vero oppure falso in ogni struttura interpretativa $\Im$. Scrivendo che

$$\boxed{\mathcal{A} \;\models^{\times}\; P{=}Q}$$

intenderemo che $P^{\Im} = Q^{\Im}$ vale quando $\Im$ è tale che $R^{\Im} = S^{\Im}$ valga per tutte le uguaglianze $R{=}S$ in $\mathcal{A}$.

Spesso vorremo specificare la collezione $\mathfrak{K}$ delle strutture *che hanno interesse per un'applicazione* tramite un insieme $\mathcal{A}$ di uguaglianze che devono risultare vere in ogni $\Im$ di $\mathfrak{K}$.

Ad es., con $\mathcal{A} = \{ \boldsymbol{\iota} = \mathbb{1} \}$, imporremo che $\mathfrak{D}$ sia singoletto. Cosí, $\emptyset$ ed $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ diverranno i soli valori possibili per qualsiasi predicato.

Ecco qui un esempio appena piú sofisticato:

Esercizio 11 Scegliamo per r_1 questa forma tipografica: $\leqslant$.

Spiegare quali sono le strutture interpretative $\Im$ in cui risultano vere le uguaglianze

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\iota} \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) & = & \emptyset, \\ (\leqslant \circ \leqslant) \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) & = & \emptyset. \end{array}$$

È vero che

$$\{ \boldsymbol{\iota} \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) = \emptyset, \; (\leqslant \circ \leqslant) \cap (\leqslant \triangle \mathbb{1}) = \emptyset \} \overset{\times}{\models} \leqslant^{\smile} = \leqslant \; ?$$

$\dashv$

Esercizio 12 Mostrare che tutte le uguaglianze che ricadono sotto uno degli schemi elencati nella Fig. 5 (vedi piú sotto) sono VALIDE, nel senso che risultano vere in qualsiasi struttura interpretativa. $\dashv$

6.2 Derivabilità per le uguaglianze fra predicati

È un semplice esercizio verificare che le condizioni *L1*, *L2* e *L4* sono soddisfatte dalla coppia $(\Re, \overset{\times}{\models})$, ma che possiamo dire del requisito *L3* di compattezza? è soddisfatto o no? In attesa di una risposta, surrogheremo $\overset{\times}{\models}$ con un'altra relazione,

$$\boxed{\mathcal{A} \overset{\times}{\vdash} P{=}Q}$$

inclusa (strettamente) nella precedente. La specifica di $\overset{\times}{\vdash}$ è qui riadattata da una nozione di derivabilità proposta in [Tarski and Givant, 1987].

Diremo che la sequenza

$$\boldsymbol{\delta} = \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

è una DIMOSTRAZIONE di ϑ da $\mathcal{A}$, dove $\vartheta \in \mathcal{Q}$ ed $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$, quando:

1) $\delta_h = \vartheta$;

2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un elemento di $\mathcal{Q}$ che

- $\star$ appartiene ad $\mathcal{A}$, oppure
- $\star$ ricade in uno degli schemi proposti (in nero) nella Fig. 5, oppure ha la forma $P{=}P$, oppure
- $\star$ vi sono uguaglianze $\delta_{j_0} = (P{=}Q)$ e $\delta_{j_1} = (R{=}S)$ che lo *precedono* (nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$), tali che R figuri come parte di P e/o di Q e che δ_i risulti dall'uguaglianza $P{=}Q$ per rimpiazzamento di qualche R in essa presente con il predicato S.

$$\boxed{\begin{array}{lcc} P \cup Q & =_{\mathrm{Def}} & (P \triangle Q) \triangle (P \cap Q) \\ P \setminus Q & =_{\mathrm{Def}} & P \cap (Q \triangle P) \end{array}}$$

P1.	$P \cap Q = Q \cap P$	
P2.	$(P \cap (Q \triangle R)) \triangle (P \cap Q) = P \cap R$	
P3.	$\mathbb{1} \cap P = P$	
P4,5.	$(P \star Q) \star R = P \star (Q \star R)$	$\star \in \{\triangle, \cap\}$
P7.	$(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$	
P7.	$\iota \circ P = P$	
P8.	$(P \cup Q) \circ R = (Q \circ R) \cup (P \circ R)$	
P9.	$P^{\smile\smile} = P$	
P10,11.	$(P \star Q)^{\smile} = Q^{\smile} \star P^{\smile}$	$\star \in \{\cap, \circ\}$
P12.	$(P^{\smile} \circ (R \setminus (P \circ Q))) \cap Q = \emptyset$	

Figura 5: Dodici schemi d'identità relazionale, che in una logica delle relazioni diadiche possono venir adottati come *assiomi logici*, dopo aver introdotto—come indicato in grigio—due *costrutti derivati*. Delle dodici identità qui proposte, le prime cinque sono retaggio della logica proposta da George Boole, mentre le altre sette derivano da posteriori ricerche di Charles Sanders Peirce e di Ernst Schröder.

Definiamo ora (per il CALCOLO DELLE RELAZIONI DIADICHE):

$$\mathcal{A} \overset{\times}{\vdash} \vartheta \quad \textit{se e solo se} \quad \begin{array}{l}\text{esiste una dimostrazione di } \vartheta \text{ da } \mathcal{A}\,,\\ \text{intesa come specificato qui sopra.}\end{array}$$

Esercizio 13 Verificare che

$$\mathcal{L}^{\times} \;=\; \left(\,\mathcal{Q}\,,\, \overset{\times}{\vdash}\,\right)$$

è una *logica*, ai sensi della Def. 1. È anche booleana, ai sensi della Def. 3 ? ⊣

Esercizio 14 (Correttezza del calcolo delle relazioni diadiche) Mostrare che per $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$ e ϑ in $\mathcal{Q}$,

se vale $\mathcal{A} \overset{\times}{\vdash} \vartheta$*, allora vale anche* $\mathcal{A} \overset{\times}{\models} \vartheta$*.* ⊣

6.3 Come introdurre il falso e l'implicazione in $\mathcal{L}^{\times}$?

> "A deduction theorem has important consequences whenever it can be established." [Tarski and Givant, 1987, p. 52]

Nel contesto della logica delle relazioni diadiche, possiamo definire f e l'operazione $\Rightarrow$ come costrutti derivati, cosí:

$$\begin{aligned} f \quad &=_{\text{Def}} \quad \emptyset{=}\mathbb{1}\,,\\ \overline{P} \quad &=_{\text{Def}} \quad P \mathbin{\triangle} \mathbb{1}\,,\\ \diamond P \quad &=_{\text{Def}} \quad \mathbb{1} \circ P \circ \mathbb{1}\,,\\ (\,P{=}Q \Rightarrow R{=}S\,) \quad &=_{\text{Def}} \quad \emptyset = \overline{\diamond(\,P \mathbin{\triangle} Q\,)} \cap (\,R \mathbin{\triangle} S\,)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 15 (Pricipio di deduzione per $\mathcal{L}^{\times}$) Verificare che, una volta estesa con queste nuove componenti f ed $\Rightarrow$, la logica $\mathcal{L}^{\times}$ viene a soddisfare il principio *B1* di deduzione. Soddisfa anche il principio *B2* di doppia negazione? ⊣

Per concludere con uno spunto di riflessione futura, supponiamo che le lettere relazionali r_i costituiscano una successione infinita indicizzata sugli interi positivi e poniamo $\mathsf{p}_i \;=_{\text{Def}} \mathbb{1}{=}\diamond\mathsf{r}_i$ per ogni intero positivo i. Grazie a questa e alle precedenti definizioni abbreviative, il linguaggio $\mathcal{P}$ che supporta la logica proposizionale può essere visto come un sottolinguaggio (decidibile) di $\mathcal{Q}$. Riflettete: come si rapporta la $\overset{\times}{\vdash}$ introdotta poco fa e la derivabilità del calcolo proposizionale?

Riferimenti bibliografici

Alonzo Church. *Introduction to mathematical logic.* Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1956.

Martin Davis. *Lecture Notes in Logic.* Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1993.

Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Hartcourt/Academic Press, Burlington, MA, USA, 2^{nd} edition, 2001.

A. Tarski and S. Givant. *A formalization of Set Theory without variables*, volume 41 of *Colloquium Publications.* American Mathematical Society, 1987.

Ludwig J. J. Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus.* 1922. `http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf`.

A Esempi di tautologie

Gli schemi di tautologia presentati nelle Figg. 4, 6, 7 riflettono tre delle innumerevoli proposte avanzate nel secolo scorso su come dare veste assiomatica alla LOGICA PROPOSIZIONALE STANDARD,[5] intesa come logica booleana minimale che scaturisce da un'infinità numerabile di generatori liberi. Partendo dagli schemi d'assioma—tre nel caso della Fig. 4, quattro stando alla Fig. 6, uno solo in Fig. 7—e adoperando la regola d'inferenza nota come *modus ponens* (v. prima parte dell'Esercizio 4), si possono ricavare tutte e sole le tautologie di tale logica.

Esercizio 16 Verificare che ogni enunciato di una delle 8 forme che compaiono nelle Figg. 4, 6, 7 è davvero una tautologia. (Suggerimento: Procedere per *reductio ad absurdum).*

[5]Cfr. `http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_logic_systems`.

$$
\boxed{\begin{array}{c}
(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma \\
\alpha \Rightarrow \bullet \Rightarrow \alpha \\
\Big((\alpha \Rightarrow \bullet) \Rightarrow \alpha\Big) \Rightarrow \alpha \\
f \Rightarrow \bullet
\end{array}}
$$

Figura 6: Quattro schemi di tautologia (Willard Van Orman Quine, 1938). **N.B.:** Dove mancano parentesi, associare a destra.

$$
\boxed{((((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\gamma \Rightarrow f) \Rightarrow (\delta \Rightarrow f))) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \varepsilon) \Rightarrow ((\varepsilon \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\delta \Rightarrow \alpha))}
$$

Figura 7: Schema tautologico 'totipotente' (Carew Arthur Meredith, 1952).

B Esercizi svolti

Esercizio 17 Mostrare che in ogni logica booleana e per ogni enunciato α:

$$f \;\vdash\; \alpha \;.$$

Soluzione Es. 17. Abbiamo che:

'∴' sta a rappresentare il 'pertanto'.

$$
\begin{array}{rrl}
 & f \vdash f & (\mathit{L1}) \\
\therefore & f\,,\ \alpha \Rightarrow f \vdash f & (\text{monotonicità, i.e. } \mathit{L2}) \\
\therefore & f \vdash (\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f & (\text{deduzione, i.e. } B1) \\
\therefore & f \vdash \alpha & (\text{doppia negazione, i.e. } B2\text{; taglio, i.e. } L4)
\end{array}
$$

⊣

Soluzione Es. 1. Grazie a *L1* abbiamo $f \vdash f$; ma allora, tramite *B1*, otteniamo $\vdash f \Rightarrow f$. Nella logica in questione c'è un enunciato solo; perciò, derivando da $\emptyset$ un enunciato, li abbiamo in pratica derivati tutti e con ciò abbiamo stabilito l'inconsistenza. ⊣

Soluzione Es. 3. Sfruttando la soluzione dell'Esercizio 17, da $A \vdash f$ possiamo ricavare $A \vdash \alpha$ per qualsiasi α, grazie al taglio ($L4$). ⊣

Soluzione Es. 4. *L1* ci dà che $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$; inoltre il principio di deduzione *B1* ci dà che $\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ sse $\alpha\,,\ \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$. Ciò risolve la prima parte dell'esercizio.

Inoltre, per il principio di deduzione, se $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ allora $A, \alpha \vdash \beta$; cosí, grazie a *L4* (il taglio), abbiamo che se $A \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ ed $A \vdash \alpha$, allora $A \vdash \beta$. $\dashv$

Soluzione Es. 5. L'inconsistenza di $A \cup \{\beta \Rightarrow f\}$ dà che $A\,,\ \beta \Rightarrow f \vdash f$, onde (per *B1*) $A \vdash (\beta \Rightarrow f) \Rightarrow f$; ma allora, per *B2* e per taglio, $A \vdash \beta$. $\dashv$

Soluzione Es. 6. In base alla Def. 6, per ogni assegnamento $\boldsymbol{q}$ è (vacuamente) vero che $\boldsymbol{q}$ invera $\emptyset$. Perciò, in base alla Def. 7, dire che α è una tautologia equivale ad asserire che qualsiasi assegnamento inveri $\emptyset$ rende al contempo vero α. Dunque se α è una tautologia allora $\emptyset \vdash \alpha$, per il teorema chiave. $\dashv$

Soluzione Es. 9. Conveniamo d'intendere la definizione

$$\gamma \quad =_{\text{Def}} \ (\beta_{i_1,1} \,\&\, \cdots \,\&\, \beta_{i_1,\ell}) \vee \cdots \vee (\beta_{i_g,1} \,\&\, \cdots \,\&\, \beta_{i_g,\ell})$$

nel senso che $\gamma = f$ nel caso particolare in cui $g = 0$, mentre invece $\gamma = (\neg f)$ quando $g = 1$ ma $\ell = 0$.

Quando $v_i = \mathbf{f}$ su ogni riga, possiamo rettificare la definizione di γ ponendo $\gamma = (\mathsf{p}_1 \,\&\, \neg\mathsf{p}_1) \vee \cdots \vee (\mathsf{p}_\ell \,\&\, \neg\mathsf{p}_\ell)$. $\dashv$

Soluzione Es. 11. Le strutture $\Im$ che rendono vere le due uguaglianze in questione sono quelle in cui la relazione $\leqslant^{\Im}$ è riflessiva e transitiva; una tale relazione, chiamata un PREORDINE (del dominio del discorso) è una relazione di equivalenza se è anche simmetrica, ossia soddisfa la condizione $\leqslant^{\smile} = \leqslant$; se invece è antisimmetrica, nel senso che soddisfa $(\leqslant^{\smile} \cap \leqslant) \cap (\,\boldsymbol{\iota} \triangle \mathbb{1}\,) = \emptyset$, allora è un ordinamento parziale (non stretto). Il fatto che vi siano degli ordinamenti parziali che non sono relazioni di equivalenza ci dice che la simmetria non consegue da riflessività e transitività. $\dashv$

Esercizio 18 (su $\mathbb{P}$) È vero che

$$\{(\mathsf{p}_i \rightarrow \mathsf{p}_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\, \mathsf{p}_5\} \models \neg\mathsf{p}_1\ ?$$

Soluzione Es. 18. Si tratta d'individuare un F finito incluso nell'insieme delle premesse tale che $F \cup \{\mathsf{p}_1\} \models f$. Un F adatto è

$$\{\mathsf{p}_1\,,\ (\mathsf{p}_1 \rightarrow \mathsf{p}_2)\,,\ (\mathsf{p}_2 \rightarrow \mathsf{p}_3)\,,\ (\mathsf{p}_3 \rightarrow \mathsf{p}_4)\,,\ (\mathsf{p}_4 \rightarrow \mathsf{p}_5)\,,\ \neg\mathsf{p}_5\}\ .$$

$\dashv$