Cenni sulla logica formale (03/03/2021)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

Scaletta

- delimitazione della materia: logica
  - ▷ formale
  - ▷ simbolica
  - ▷ matematica
- tappe storiche fondamentali
- distinzione fra calcolo e teorie
- aspettative computazionali

In che senso formale? - I

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)

Il nostro soggetto è la *logica* —o, come possiamo dire piú per esteso, per distinguerla da certi argomenti e dottrine che (disgraziatamente) sono stati chiamati con lo stesso nome, è la *logica formale*.

(Alonzo Church, 1956)

Perfino i corvi gracchiano sui tetti quali implicazioni siano corrette.

(Callimaco, III sec. a.C.)

Il nostro soggetto è la *logica* —o, come possiamo dire piú per esteso, per distinguerla da certi argomenti e dottrine che (disgraziatamente) sono stati chiamati con lo stesso nome, è la *logica formale*.
Tradizionalmente, la logica (formale) si occupa dell'analisi di enunciati o di proposizioni e di dimostrazione con attenzione alla *forma* in astrazione dalla *materia*.

(Alonzo Church, 1956)

In che senso formale? - II

La questione di cui si occupa la logica, potremmo dire, è quella dell'adeguatezza, o valore probativo, di varie specie di evidenza. Tradizionalmente, però, essa si è dedicata soprattutto allo studio di ciò che costituisce dimostrazione, ossia evidenza completa e conclusiva. [· · ·] l'inferenza deduttiva, e quindi l'implicazione che dovrebbe esserle di fondamento, entra in ogni determinazione del peso dell'evidenza.

(M. R. Cohen ed E. Nagel, 1934)

La questione di cui si occupa la logica, potremmo dire, è quella dell'adeguatezza, o valore probativo, di varie specie di evidenza. Tradizionalmente, però, essa si è dedicata soprattutto allo studio di ciò che costituisce dimostrazione, ossia evidenza completa e conclusiva. [· · ·] l'inferenza deduttiva, e quindi l'implicazione che dovrebbe esserle di fondamento, entra in ogni determinazione del peso dell'evidenza.

Si può considerare compito proprio della logica quello di scartare ciò che è assolutamente impossibile, determinando cosí il campo di tutto ciò che, in assenza di conoscenza empirica, è astrattamente possibile.

(M. R. Cohen ed E. Nagel, 1934)

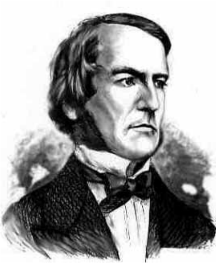
Una citazione tratta da Wikipedia

$\cdots$ no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise $\cdots$ those universal laws of thought which are the basis of all reasoning $\cdots$

(George Boole)

⋯ no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognise ⋯ those universal laws of thought which are the basis of all reasoning ⋯

(George Boole)



George Boole (Lincoln 1815 – Ballintemple 1864)

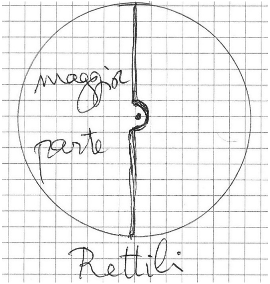

SE SEI UN ASINO, HAI ANCHE LA FORZA DI UN ASINO!

Completare in maniera formalm. ineccepibile:

1. Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
2. la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora...

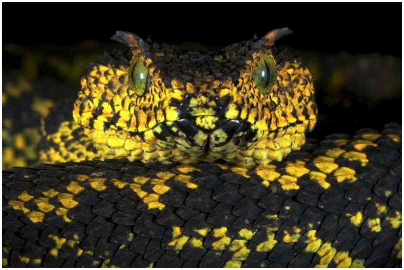
Completare in maniera formalm. ineccepibile:

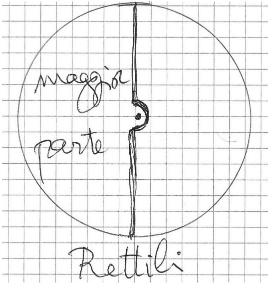
1. Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
2. la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora. . .



Completare in maniera formalm. ineccepibile:

1. Se la maggior parte dei rettili sono serpenti, e se inoltre
2. la maggior parte dei rettili sono velenosi, allora...
3. ...esistono serpenti velenosi.

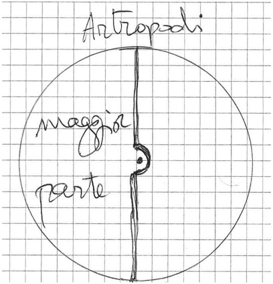




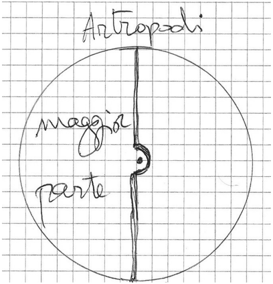
Completare in maniera formalm. ineccepibile:

1. Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
2. la maggior parte degli artropodi non sono velenosi, allora...

1. Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
2. la maggior parte degli artropodi non sono velenosi, allora. . .



1. Se la maggior parte degli artropodi sono insetti, e se inoltre
2. la maggior parte degli artropodi non sono velenosi, allora. . .
3. . . . esistono insetti che non sono velenosi.



Terminologia. Intendiamo con

$\boxed{\text{alfabeto}}$, un insieme

$$\Sigma = \{ s_1, \ldots, s_{N+1}, s_{N+2} \}$$

costituito da un numero finito—almeno due—di $\boxed{\textit{simboli}}$;

$\boxed{\text{stringa}}$ su Σ, una sequenza finita formata di simboli di Σ;

(Indichiamo: $\Sigma^* =_{\mathsf{Def}} \{ \text{stringhe} \}$)

$\boxed{\text{linguaggio}}$ simbolico su Σ, un insieme (di solito infinito) $\mathcal{L}$ di stringhe su Σ, dette $\boxed{\textit{frasi}}$ di $\mathcal{L}$.

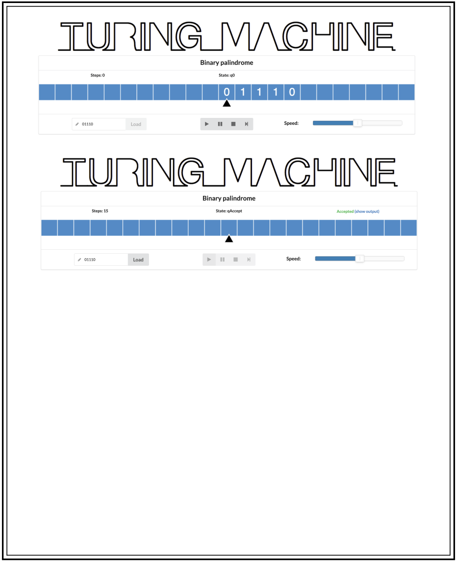
(Dunque $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$)

Linguaggi simbolici

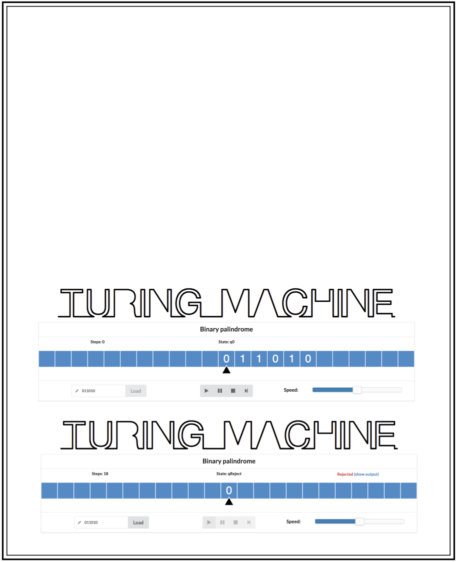
A informatici, matematici, logici, servono linguaggi delle cui frasi si possa effettuare un *riconoscimento automatico* ☞☞☞

(a costi non proibitivi)

Dal sito https://turingmachinesimulator.com/:



Dal sito https://turingmachinesimulator.com/:



FORMALMENTE, UNA $\mathcal{M}$ DI TURING È COMPOSTA DA:

1. Un *alfabeto* $s_1, \ldots, s_{N+2+I}$, oltre a s_0 (lo spazio vuoto);
2. un insieme q_0, $q_1, \ldots,$ q_M di *stati*. . .
3. . . . alcuni dei quali hanno il ruolo di stati *accettanti*;

Formalmente, una $\mathcal{M}$ di Turing è composta da:

1. Un *alfabeto* $s_1, \ldots, s_{N+2+I}$, oltre a s_0 (lo spazio vuoto);
2. un insieme q_0, $q_1, \ldots,$ q_M di *stati*. . .
3. . . . alcuni dei quali hanno il ruolo di stati *accettanti*;
4. un insieme di *cinquine di transizione* delle tre forme:

q_i	s_h	s_k	$=$	q_j
q_i	s_h	s_k	$>$	q_j
q_i	s_h	s_k	$<$	q_j

dove:

- q_i, q_j sono stati (*corrente* / *prossimo*);
- s_h, s_k simboli (*abilitante* la transiz. di stato / *obliterante*) e
- $=$, $>$, $<$ pilotano la *testina di scansione*.

Formalmente, una $\mathcal{M}$ di Turing è composta da:

1. Un *alfabeto* $s_1, \ldots, s_{N+2+l}$, oltre a s_0 (lo spazio vuoto);
2. un insieme q_0, $q_1, \ldots, q_M$ di *stati*...
3. ...alcuni dei quali hanno il ruolo di stati *accettanti*;
4. un insieme di *cinquine di transizione* delle tre forme:

q_i	s_h	s_k	$=$	q_j
q_i	s_h	s_k	$>$	q_j
q_i	s_h	s_k	$<$	q_j

dove:
- q_i, q_j sono stati (*corrente* / *prossimo*);
- s_h, s_k simboli (*abilitante* la transiz. di stato / *obliterante*) e
- $=$, $>$, $<$ pilotano la *testina di scansione*.

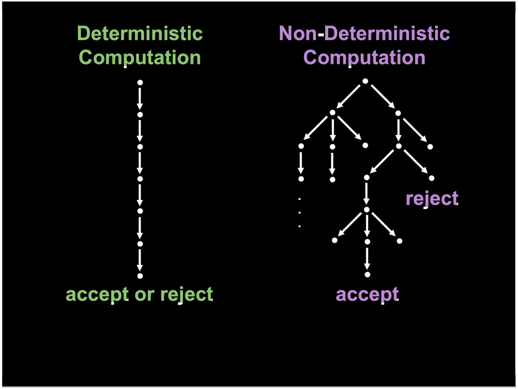
▷ Avvio: $\mathcal{M}$ viene messa in moto dallo stato q_0, con la testina sul primo simbolo della *stringa* da analizzare;

▷ il suo arresto (?) avviene quando nessuna cinquina inizia con lo stato corrente abbinato al simbolo sotto scansione.

▷ Il riconoscimento di una frase si ha allorché l'arresto avviene in uno degli stati *accettanti*.

Computazioni deterministiche e non

Secondo il concetto di non determinismo*, si ammette che un algoritmo possa reagire a una determinata situazione con piú azioni differenti, tutte ugualmente legali, dirigendo il calcolo contemporaneamente lungo vie diverse.* (Fabrizio Luccio, Linda Pagli 1992)



Si dice che una $\mathcal{M}$ di Turing è

DETERMINISTICA: se non presenta piú cinquine di transizione che inizino con una stessa coppia q_i , s_h

Caso deterministico:

Il linguaggio di $\mathcal{M}$ è formato da quelle stringhe che ***portano*** all'arresto di $\mathcal{M}$ in uno stato di ***accettazione***.

Si dice che una $\mathcal{M}$ di Turing è

DETERMINISTICA: se non presenta piú cinquine di transizione che inizino con una stessa coppia q_i , s_h;

NON-DETERMINISTICA: quando l'unicità della transizione non è assicurata (ma potrebbe ben valere).

Caso generale:
Il linguaggio di $\mathcal{M}$ è formato dalle stringhe che ***possono portare*** all'arresto di $\mathcal{M}$ in uno stato di ***accettazione***.

Si dice che una $\mathcal{M}$ di Turing è

DETERMINISTICA: se non presenta piú cinquine di transizione che inizino con una stessa coppia q_i , s_h;

NON-DETERMINISTICA: quando l'unicità della transizione non è assicurata (ma potrebbe ben valere).

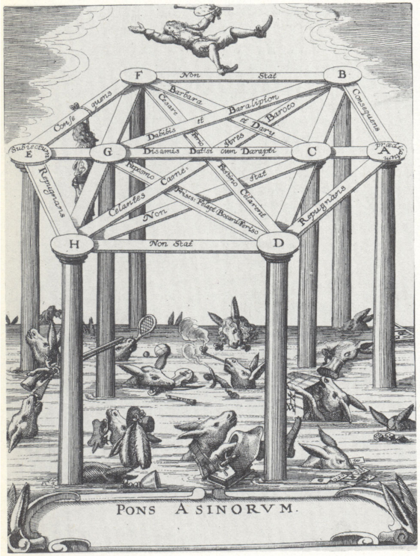
Caso generale:

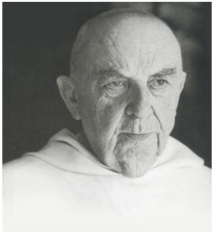
Il linguaggio di $\mathcal{M}$ è formato dalle stringhe che ***possono portare*** all'arresto di $\mathcal{M}$ in uno stato di ***accettazione***.

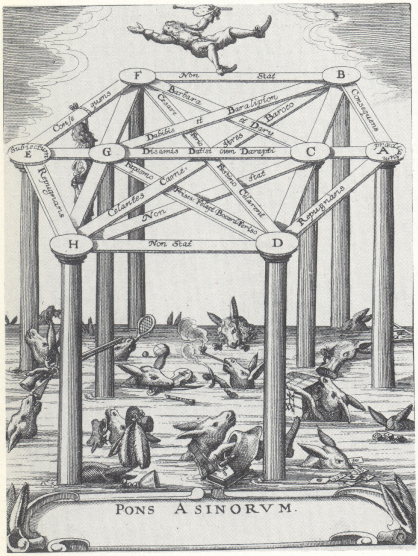
Un linguaggio $\mathcal{L}$ si dice:

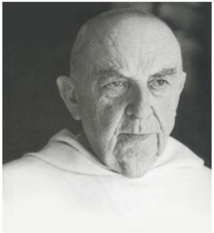
- semi-decidibile se una qualche $\mathcal{M}$ ne accetta tutte e sole le frasi.
- decidibile quando si può far sí che $\mathcal{M}$ giunga sempre all'arresto.

(V. [Dawson(2001)])


F
B
Non
Stat
Barbara
Baralipton
Cesare
Baroco
Dabitis
et
Dary
Conse
quens
Consequens
Subiectum
E
G
Disamis
Datisi
cum
Darapti
C
A
prædica
tum
Repugnans
Celantes
Non
Cœlarent
Repugnans
H
Non Stat
D
Pons Asinorvm.




F
B
Non
Stat
Barbara
Cesare
Baralipton
Baroco
Dary
Consequens
Conse quens
Subiectum
E
G
C
A
Dabitis
Disamis
Datisi
Darapti
Repugnans
Celantes
Camestres
Stat
Non
H
D
Non Stat
PONS ASINORVM.



Un proverbio medievale dice: '*de modalibus non gustabitur asinus*', ma non è necessario essere un asino per perdersi in questo labirinto di leggi astratte: Teofrasto e quasi tutti i moderni, fino al 1934, fraintesero completamente il sistema.

(Joseph M. Bocheński, 1902–1995)

"Notevole [. . .] che sin ad oggi la logica non abbia potuto fare un passo avanti; cosí, in tutta evidenza, essa è da ritenersi chiusa e compiuta."

(Immanuel Kant,
Critica della ragion pura, 2ª ed., 1787)

Tappe epocali

- Aristotele di Stagira (384–322 a.C.) e Teofrasto (–287 a.C.): sillogistica assertoria e modale
- Raimondo Lullo (1235–1315),
  Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)
- George Boole (1815–1864): "leggi del pensiero" nel 1854
- Charles S. Peirce (1839–1914) ed Ernst Schröder (1841–1902): un calcolo delle relazioni
- Gottlob Frege (1848–1925): la "Begriffsschrift" (1879)
- Alfred N. Whitehead (1861–1947) e Bertrand Russell (1872–1970): "Principia Mathematica" (1910, 1912, 1913)
- David Hilbert (1862–1943): X problema (1900),
  "Entscheidungsproblem" (1928)
- Ernst Zermelo (1871–1953):
  assiomatizzazione della teoria degli insiemi (1908)
- Kurt Gödel (1906–1978):
  indecidibilità essenziale dell'aritmetica

A CHE PRO ?

"È ragionevole sperare che il connubio fra computazione e logica matematica sarà, nel prossimo secolo, cosí fruttuoso quanto lo è stato, nel secolo scorso, quello fra analisi e fisica. Sollecitudine verso questa impresa richiede sollecitudine sia per le applicazioni che per l'eleganza matematica."

(John McCarthy, 1963)

A CHE PRO ?

"È ragionevole sperare che il connubio fra computazione e logica matematica sarà, nel prossimo secolo, cosí fruttuoso quanto lo è stato, nel secolo scorso, quello fra analisi e fisica. Sollecitudine verso questa impresa richiede sollecitudine sia per le applicazioni che per l'eleganza matematica."

(John McCarthy, 1963)

(J. McCarthy Boston, 1927 – Palo Alto, 2011)

Calcolo e Teorie

- Un calcolo ha $\boxed{\text{assiomi logici}}$ e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno $\boxed{\text{assiomi propri}}$ e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*

Calcolo e Teorie

- Un calcolo ha $\boxed{\text{assiomi logici}}$ e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno $\boxed{\text{assiomi propri}}$ e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*

- È desiderabile che il calcolo, oltre che "sound" (=corretto) sia *completo*: deve, cioè consentire di ricavare tutta la conoscenza 'implicita' negli assiomi
- Una teoria *può* essere contraddittoria—quando lo è risulta inutile

- Un calcolo ha $\boxed{\text{assiomi logici}}$ e regole d'inferenza vuoti di contenuto
- Le teorie fondate su di un calcolo hanno $\boxed{\text{assiomi propri}}$ e modellano qualche aspetto della conoscenza
- Perfino i *programmi* (scritti in Prolog, ML, CLP, ecc.) vengono talvolta presentati come *teorie*

- È desiderabile che il calcolo, oltre che "sound" (=corretto) sia *completo*: deve, cioè consentire di ricavare tutta la conoscenza 'implicita' negli assiomi
- Una teoria *può* essere contraddittoria—quando lo è risulta inutile

Tutto si svolge entro un *linguaggio formale*. Perciò i detrattori della logica, insinuano che essa, riducendo la semantica alla sintassi, sia del tutto sterile.

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione finita* di formule

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ...???...

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una collezione descrivibile tramite
  schemi sintattici in numero finito

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ...???...

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione ...???...

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione *semi-decidibile*

Gli assiomi, sia logici che propri, possono formare:

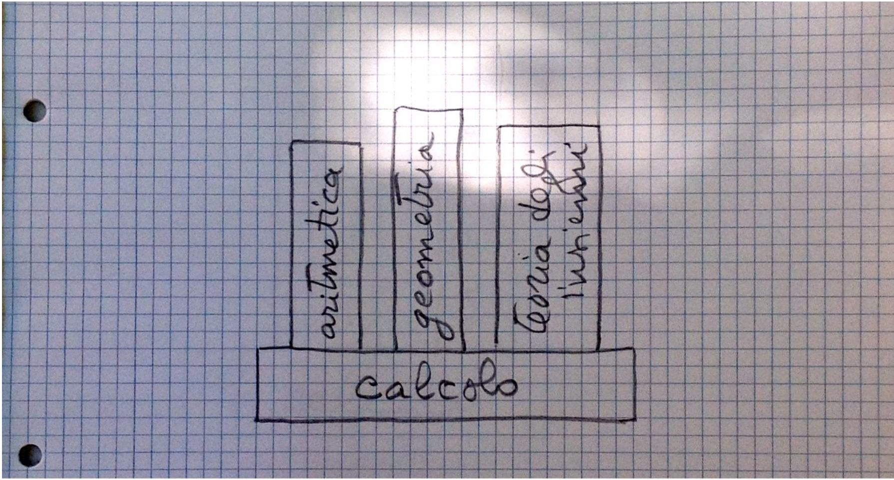
- una *collezione decidibile*

Le regole d'inferenza garantiranno che, di conseguenza, i teoremi (=tutto ciò che si può ricavare dagli assiomi) formeranno una collezione *semi-decidibile* (ovvero: "ricorsivamente enumerabile")

··· E questo è dunque il vantaggio del nostro metodo: che immediatamente possiamo stabilire per mezzo dei numeri se le proposizioni che ci vengono presentate sono provate o no; e che con la sola guida dei caratteri e con un metodo sicuro e veramente analitico, portiamo alla luce verità che altri avevano raggiunto a stento con immenso sforzo della mente e per caso. E perciò noi siamo in grado di presentare entro il nostro secolo dei risultati che altrimenti con difficoltà potrebbero fornire molte migliaia di anni.[1]

(Leibniz, 1679)

[1] Traduz. Massimo Mugnai


aritmetica
geometria
teoria degli
l'infiniti
calcolo

Un'aritmetica dei numeri naturali

3: Undecidability 203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

$$\forall^{\mathfrak{I}} = \mathbb{N}$$

$$x \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} x + 1$$

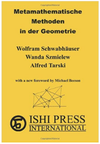
$$\ddots$$

$$(x, y) \overset{\mathrm{E}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} x^{y}$$

(Raphael M. Robinson , 1911–1995)

Assiomi della geometria tarskiana, semplificati

Wanda Szmielew
(1918–1976)



1 Assiomi, versione 1965 (pubblicata nel 1983)

	CE$_2$			
1.	ab	$\equiv$	ba	(RE)
2.	$ab \equiv pq \ \&\ ab \equiv rs$	$\rightarrow$	$pq \equiv rs$	(TE)
3.	$ab \equiv cc$	$\rightarrow$	$a = b$	(IE)
4.	$\exists\, x\,(B\ \bullet ax$	$\&$	$ax \equiv \bullet\bullet\,)$	(SC)
5.	$a \neq b \ \&\ B\,abc \ \&\ B\,a'b'c' \ \&\ ab \equiv a'b' \ \&$ $bc \equiv b'c' \ \&\ ad \equiv a'd' \ \&\ bd \equiv b'd'$	$\rightarrow$	$cd \equiv c'd'$	(FS)
6.	$B\,aba$	$\rightarrow$	$a = b$	(IB)
7.	$B\,apc \ \&\ B\,bqc$	$\rightarrow$	$\exists\, x\,(B\,pxb \ \&\ B\,qxa)$	(IP)
8.	$\exists\, a\,\exists\, b\,\exists\, c\,(\neg B\,abc$	$\&$	$\neg B\,bca \quad \& \quad \neg B\,cab\,)$	(Lo$_2$)
9.	$p \neq q \ \&\ ap \equiv aq \ \&\ bp \equiv bq \ \&\ cp \equiv cq$	$\rightarrow$	$B\,abc \vee B\,bca \vee B\,cab$	(Up$_2$)
10.	$B\,adt \ \&\ B\,bdc \ \&\ a \neq d$	$\rightarrow$	$\exists\, x\,\exists\, y\,(B\,abx \ \&\ B\,acy \ \&\ B\,xty)$	(Eu)
11.	$\exists\, a\,\forall\, x\,\forall\, y\,(x \in X \ \&\ y \in Y \ \rightarrow\ B\,axy)$	$\rightarrow$	$\exists\, b\,\forall\, x\,\forall\, y\,(x \in X \ \&\ y \in Y \ \rightarrow\ B\,xby)$	(Co)

Meglio

- sviluppare tante *teorie separate* (e.g.: aritmetica, geometria elementare), o perfino di nicchia (e.g.: teoria dei linguaggi regolari);

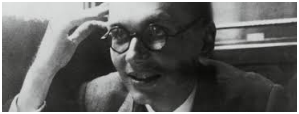
oppure

- una singola *teoria onnicomprensiva* (e.g. la teoria degli insiemi di Zermelo–Fraenkel–von Neumann oppure quella delle classi di Gödel-Bernays), alla quale ridurre le varie discipline esatte

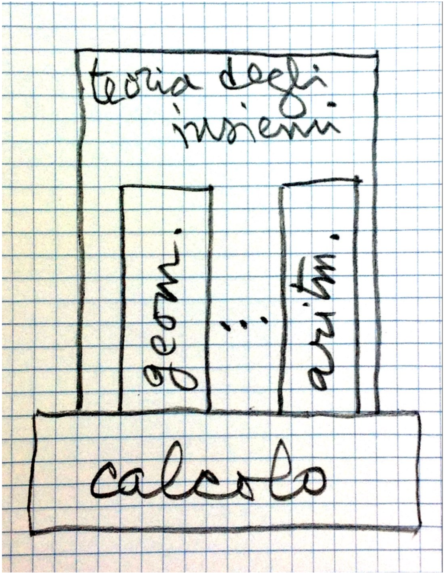
?

"*There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole field, and yielding such powerful methods for solving problems (and even solving them constructively, as far as that is possible) that, no matter whether or not they are intrinsically necessary, they would have to be accepted at least in the same sense as any well-established physical theory.* "

(Kurt Gödel, 1947)



Una teoria onnicomprensiva ?



INFORMATION PROCESSING 83, R.E.A. Mason (ed.)
Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland)

THE ARCHITECTURES IN THE FIFTH GENERATION COMPUTERS

Tohru MOTO-OKA
The University of Tokyo, Japan

Kazuhiro FUCHI
Institute for New Generation Computer Technology, Japan

Invited Paper

The fifth generation computers are being developed predominantly for use with knowledge information processing systems expected to come into wide spread utilization in the 1990s. Inference machines and relational algebra machines are typical of the core processors which constitute the fifth generation computer systems. A new logic programming language is being designed for use with the fifth generation kernel language to act as the interface between hardware and software in these machines. Several examples of proposed architectures are described. VLSI-oriented architecture and parallel processing control mechanisms are the main research topics.

1. INTRODUCTION

In the context of the Fifth Generation Computer Project, which is a project promoted on a national scale in Japan, a fifth generation computer is defined to be a computer for use in knowledge information processing with the widest range of applicability among the computers which will be produced in the 1990's[(1) (2)].

Those types of computers expected to be in wide use in the 1990's include main frame computers whose chief aim will be to perform conventional

able; it is also necessary to develop technology for creating VLSI-oriented architectures which also enable high speed processing through the incorporation of parallel processing. To this end, we need to get away from the sequential control mechanism employed in conventional von Neumann-type computers, and instead employ control mechanisms which can incorporate parallel processing in a natural way -- e.g., data flow machines and reduction machines.

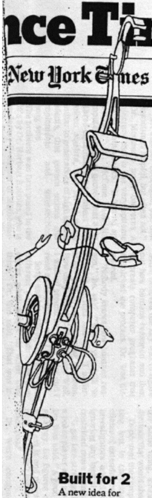
v) It should be possible to perform knowledge information processing at the users' sites as

nce Times

TUESDAY, DECEMBER 10, 1996

New York Times

C1



Built for 2

A new idea for astronauts, a tandem cycle, mimics gravity and has cams on the shaft to provide jolts to strengthen muscles and bones.

Source: Space Cycle
Illustration by Istvan Banyai

With Major Math Proof, Brute Computers Show Flash of Reasoning Power

The achievement would have been called creative if a human had done it.

By GINA KOLATA

COMPUTERS are whizzes when it comes to the grunt work of mathematics. But for creative and elegant solutions to hard mathematical problems, nothing has been able to beat the human mind. That is, perhaps, until now.

A computer program written by researchers at Argonne National Laboratory in Illinois has come up with a major mathematical proof that would have been called creative if a human had thought of it. In doing so, the computer has, for the first time, got a toehold into pure mathematics, a field described by its practitioners as more of an art form than a science. And the implications, some say, are profound, showing just how powerful computers can be at reasoning itself, at mimicking the flashes of logical insight or even genius that have characterized the best human minds.

Computers have found proofs of mathematical conjectures before, of course, but those conjectures were easy to prove. The difference this time is that the computer has solved a conjecture that stumped some of the best mathematicians for 60 years. And it did so with a program that was designed to reason, not to solve a specific problem. In that sense, the program is very different from chess-playing computer programs, for example, which are intended to solve just one problem: the moves of a chess game.

"It's a sign of power, of reasoning power," said Dr. Larry Wos, the supervisor of the computer reasoning project at Argonne. And with this result, obtained by a colleague, Dr. William McCune, he said, "We've taken a quantum leap forward."

Dr. Wos predicts that the result may mark the beginning of the end for mathematics research as it is now practiced, eventually freeing mathematicians to focus on discovering new conjectures, and leaving the proof to computers.

But the result also may challenge the very notion of creative thinking, raising the possibility that computers could take a parallel path to reach the same conclusions as great human thinkers. Or it may be that since no one has any idea how humans think, the magnificent bursts of creativity that spring apparently full blown from the minds of geniuses are actually a result of hidden, computer-like

Continued on Page C8

Riferimenti bibliografici

J. M. Bocheński.
La logica formale - La logica matematica.
Giulio Einaudi, Torino, 1972.
(Edizione a cura di A. Conte).

John W. jr Dawson.
Dilemmi logici – La vita e l'opera di Kurt Gödel.
Bollati Boringhieri, Torino, 2001.
(Traduzione di Paolo Pagli).