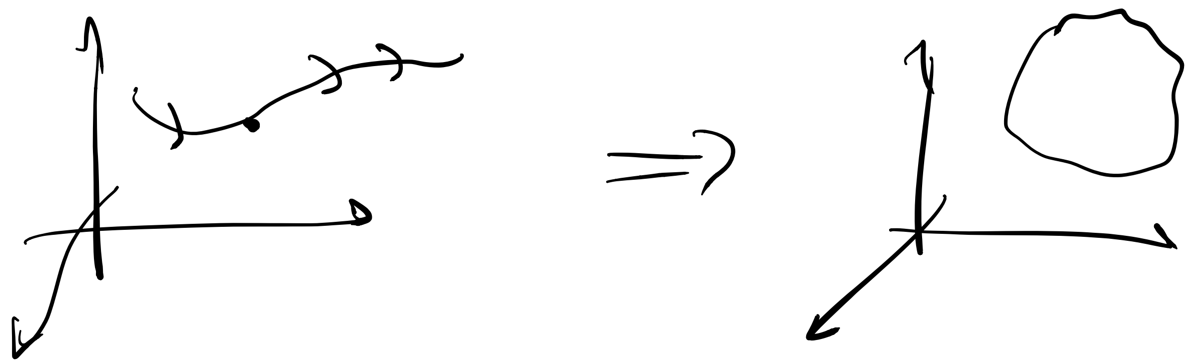
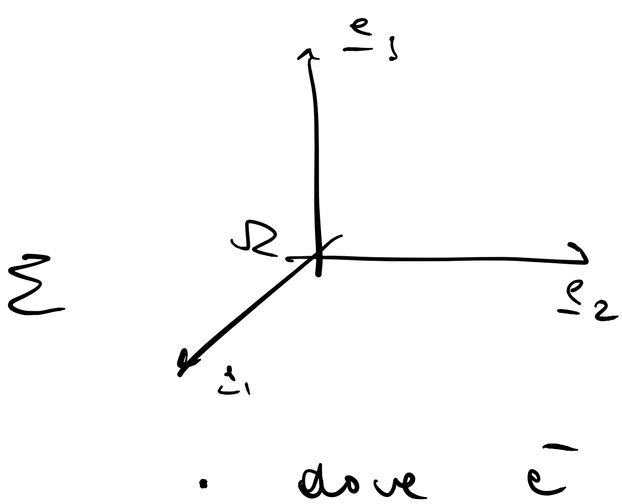
MECCANICA RAZIONALE

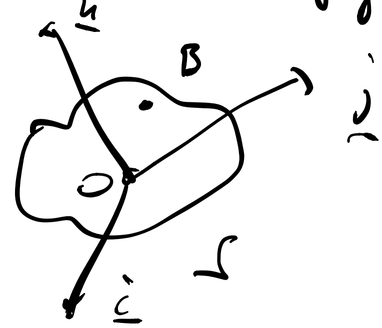
ing CIVILE
NAVALE

LEZIONE 2 - marzo - 2021



Corpo rigido: la distanza fra due punti non dipende dalla configurazione





- dove è S

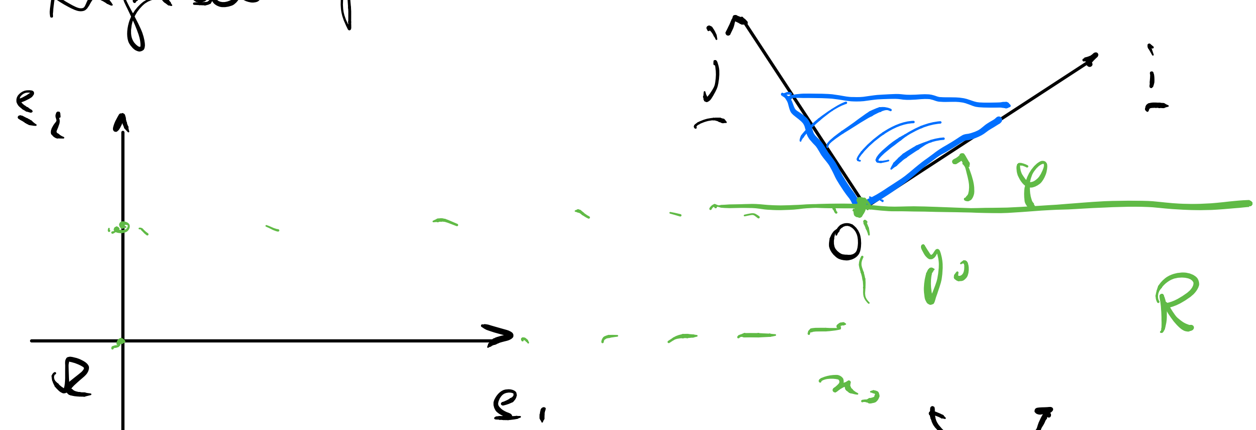
dove è O?
come sono orientati $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$?

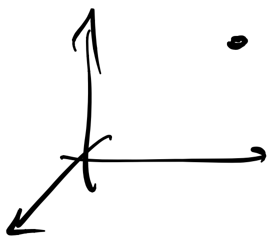
- dove è B

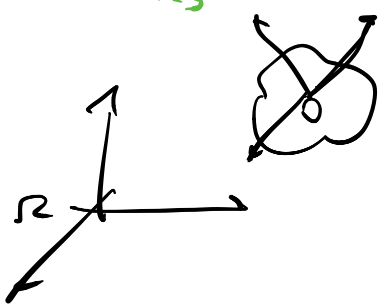
$\longrightarrow \quad \underline{x}_A = \underline{x}_0 + R \cdot \underline{X}_B$

matrice di rotazione

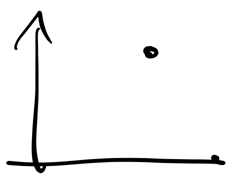
Rigido piano



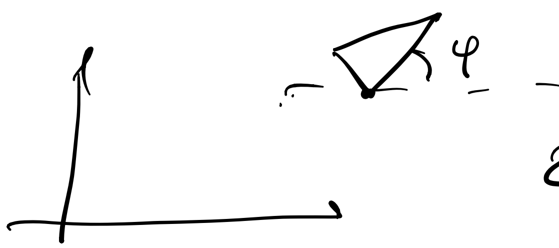




$3 + 3 = 6$

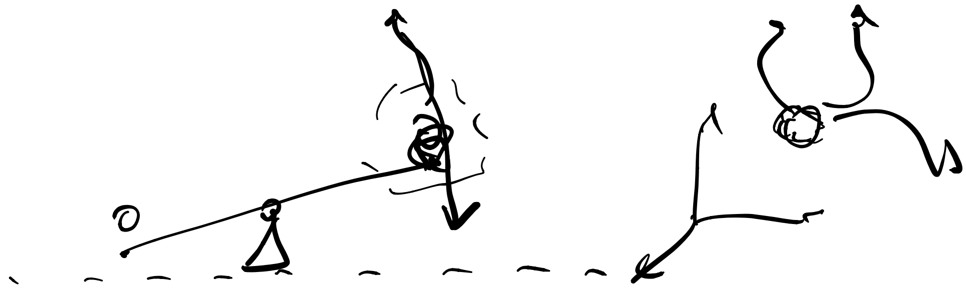


2



$2 + 1 = 3$

Vincoli



Si distinguono in

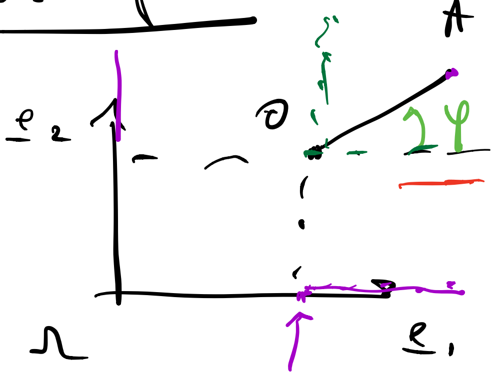
- OLONOMI (o di posizione)

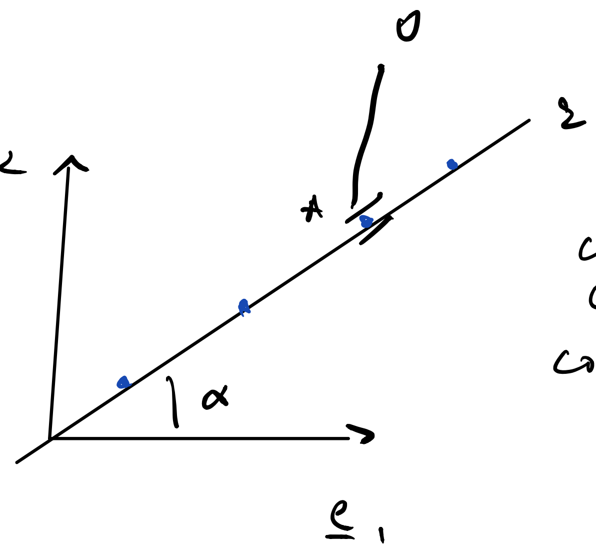
  → limitano le configurazioni di un sistema

  sono definiti come una relazione funzionale tra le coordinate.

- ANOLONOMI : tutti gli altri

Esempio





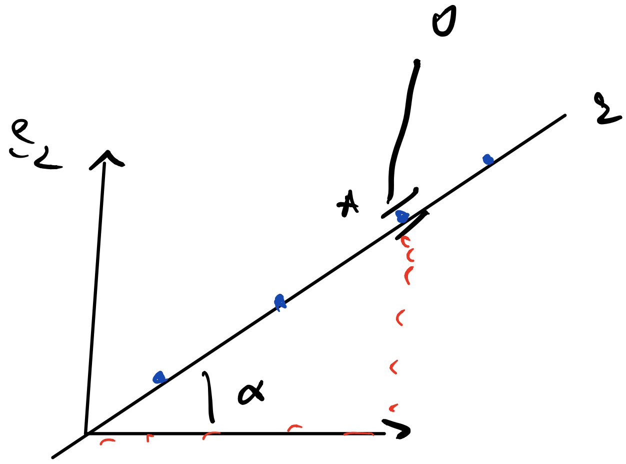
cerniera con carrello

$\overline{OA} = l$

il punto A sta sulla retta r

$$x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= x_0 + l\cos\varphi \\ y_A &= y_0 + l\sin\varphi \end{aligned}}$$



$(x_0 + l\cos\varphi)\sin\alpha$

$-(y_0 + l\sin\varphi)\cos\alpha$

$= 0$

coordinate libere di OA : (x_0, y_0, φ)

$\rightarrow$ non sono più libere. Infatti

$y_0 = (x_0 + l\cos\varphi)\tan\alpha - l\sin\varphi$

$(\cos\alpha \neq 0)$

Adesso : (x_0, φ) coordinate libere

ma y_0 è fissato per ogni (x_0, φ)

Il vincolo ha eliminato un grado di libertà.

Seconda Parte

Gradi di libertà $\longrightarrow$ Vincoli olonomi

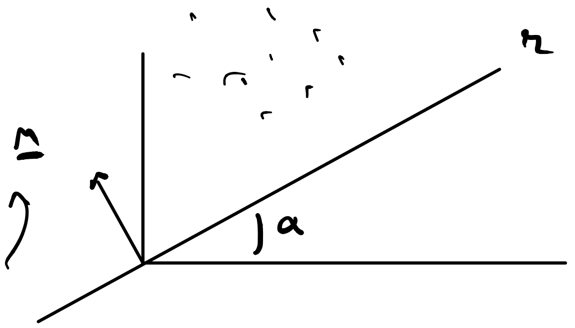
Tolgono gradi di libertà attraverso una relazione funzionale

$\rightarrow$ vincoli di posizione

<u>Es</u> : vincolo mobile

(ad esempio $\alpha = \omega t$)

vincolo <u>unilatero</u>



$\underline{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ versore normale

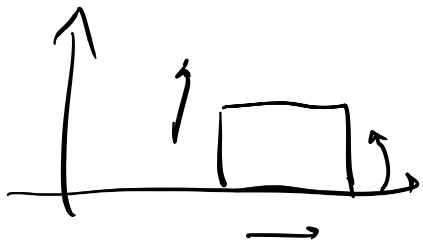
il vincolo adesso è $\underline{x}_A \cdot \underline{n} \geq 0$

$\perp$ $\quad \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0$

$\underline{n} \cdot \underline{x}_A = 0 \qquad \underline{n} \cdot \underline{x}_A \geq 0$

Vincoli olonomi, fissi, bilateri

e <u>semplici</u> (ν toglie solo un grado di libertà)



(x_0, y_0, φ)

S sistema materiale, n gradi di libertà

$\underline{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \quad (\vec{q})$

coordinate libere

Vincolo semplice = un'equazione

$f(\underline{q}) = f(q_1, \dots, q_n) = 0$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ regolare

- <u>esistenza</u>

$\mathcal{C} = \{ \underline{q} : f(\underline{q}) = 0 \}$ <u>non</u> è vuoto

asta sul piano

$f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2 + 1 = 0$

non ho soluzioni

- <u>semplice</u> : Toglie un grado di libertà ad es $f(x_0, y_0, \varphi) = \underline{x_0^2 + y_0^2}$

Allora $f = 0$, $x_0 = y_0 = 0$

$0 \in \Omega$ $\longrightarrow$ due gradi di libertà sono stati rimossi

La condizione che io posso sempre risolvere $f = 0$ rispetto ad una delle coordinate

$$\underline{\| \nabla f \|^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)^2$$

$$\underline{\neq 0} \qquad (\underline{\text{in } \mathcal{C}})$$

$\underline{f(x_0, y_0, \varphi) = x_0^2 + y_0^2}$ in $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} = \{x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ \varphi \text{ generico}\}$

$$\left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 \right\| =$$

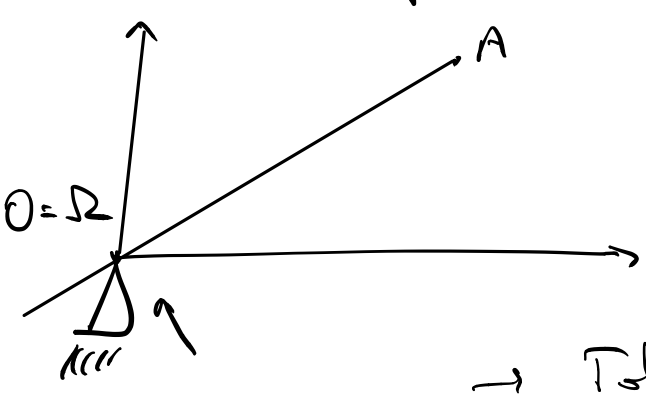
$$= \underline{(2x_0)^2 + (2y_0)^2} = 0 \quad \text{in } \underline{\mathcal{C}}$$

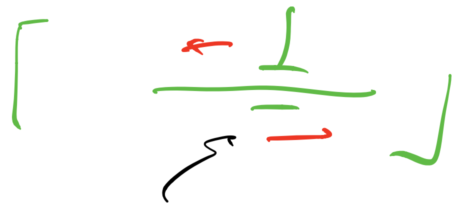
non è semplice

Terza parte

<u>Sovrapposizione di vincoli</u>

<u>Esempio</u> Consideriamo un'asta OA vincolata con una cerniera in O ad un punto fisso di Σ



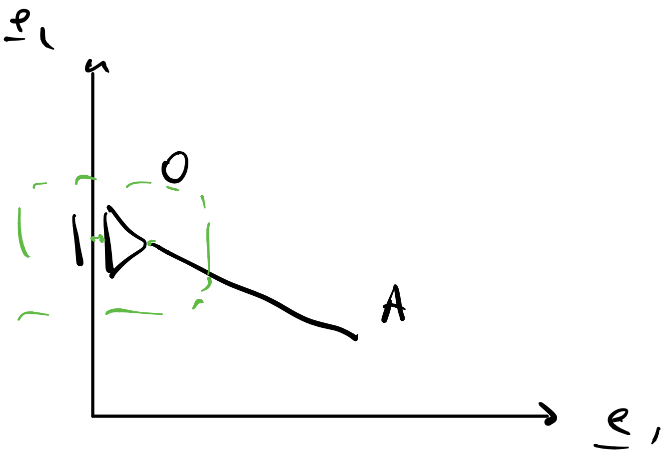


→ Tolto due gradi di libertà

Analiticamente :

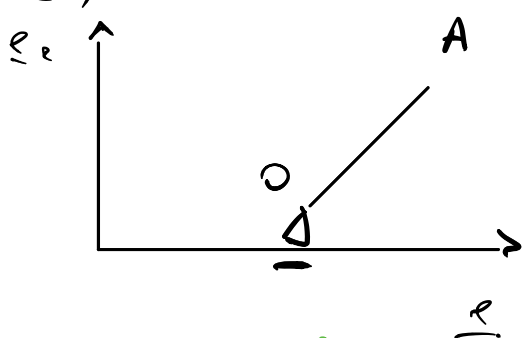
$$\begin{cases} (V_1) & x_0 = 0 \\ (V_2) & y_0 = 0 \end{cases}$$

(V_1)



$x_0 = 0$

(V_2)



$y_0 = 0$

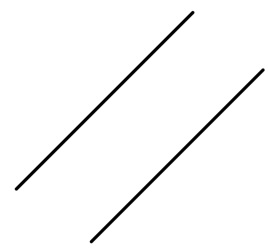
<u>Attenzione</u> consideriamo due vincoli semplici:

(V_1'): $O \in r$

(V_2'): $O \in r'$

r, r' sono due rette nel piano

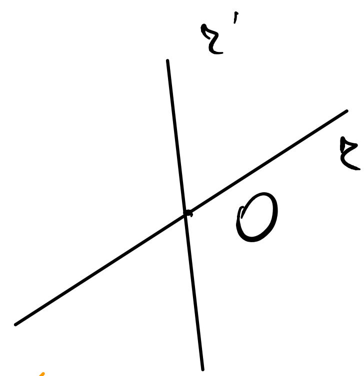
- <u>compatibilità</u> $r \parallel r'$



r e r' non devono essere parallele altrimenti no soluzione

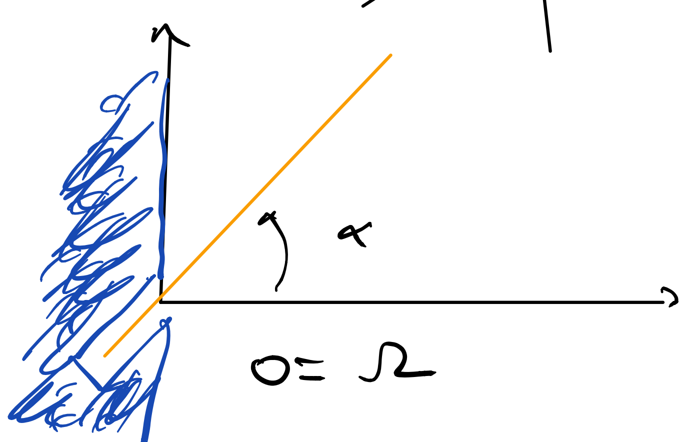
- <u>indipendenti</u>

r e r' non sono lo stesso retta



$\longrightarrow$ $O \in$ intersezione

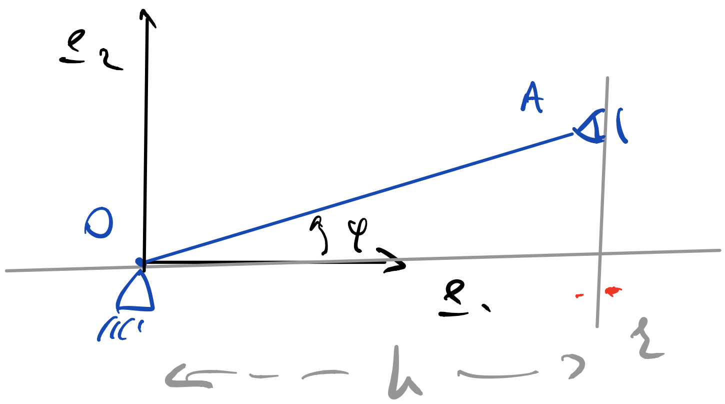
<u>Esempio</u> <u>Incastro</u>



$(V_1)\quad x_0 = 0\,, \qquad (V_2)\quad y_0 = 0$

$(V_3)\quad \varphi = \alpha$

Esempio (Carrucola fissa e carrello)



$(V_1)\quad x_0 = 0$

$(V_2)\quad y_0 = 0$

$(V_3)\quad x_A - h = 0$

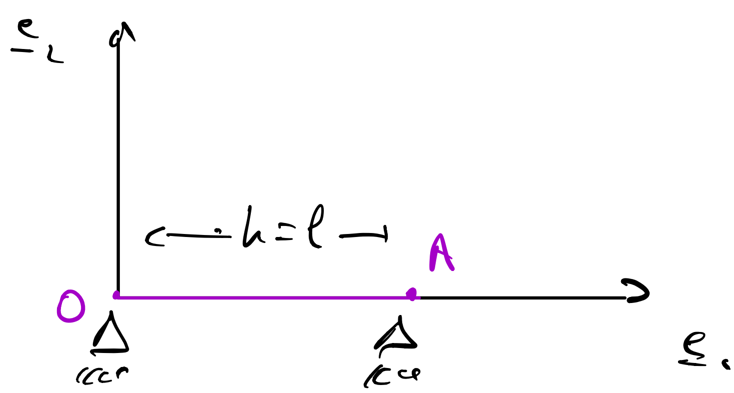
$= x_0 + l\cos\varphi - h = 0$

$OA = l$

$(h < l)$

(isostatici)

Esempio



$(V_1)\quad x_0 = 0$

$(V_2)\quad y_0 = 0$

$(V_3)\quad x_A - h = 0$

$= x_0 + l\cos\varphi - h = 0$

$(V_4)\quad y_A = 0$

$= y_0 + l\sin\varphi = 0$

$$\left(3 \text{ gradi di libertà}\right) - \left(4 \text{ vincoli imposti}\right) = -1$$

Riassumiamo

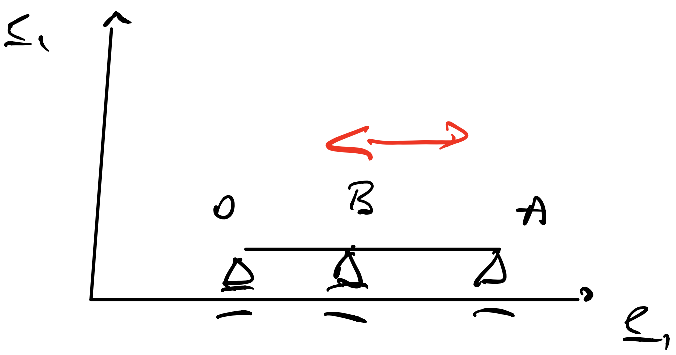
Sistema S n gradi di libertà

sottoposto a m vincoli semplici

(compatibili e indipendenti)

- IPOSTATICO $m < n$
- ISOSTATICO $m = n$
- IPERSTATICO $m > n$

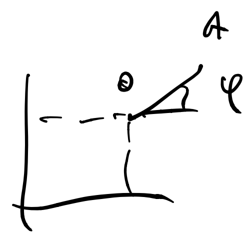
Esempio



(V_1) $y_O = 0$

(V_2) $y_B = 0$

(V_3) $y_A = 0$



$$\begin{cases} y_B = y_O + \overline{OB}\sin\varphi = 0 \\ y_A = y_O + \overline{OA}\sin\varphi = 0 \end{cases}$$