meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 1
modellazione sistemi
SDOF MDOF

Nel corso di Meccanica delle Vibrazioni
si tratteranno due macro argomenti:

- la misura e l'anali di dati acquisiti su sistemi meccanici che vibrano
- la modellazione di sistemi meccanici che vibrano

MDV

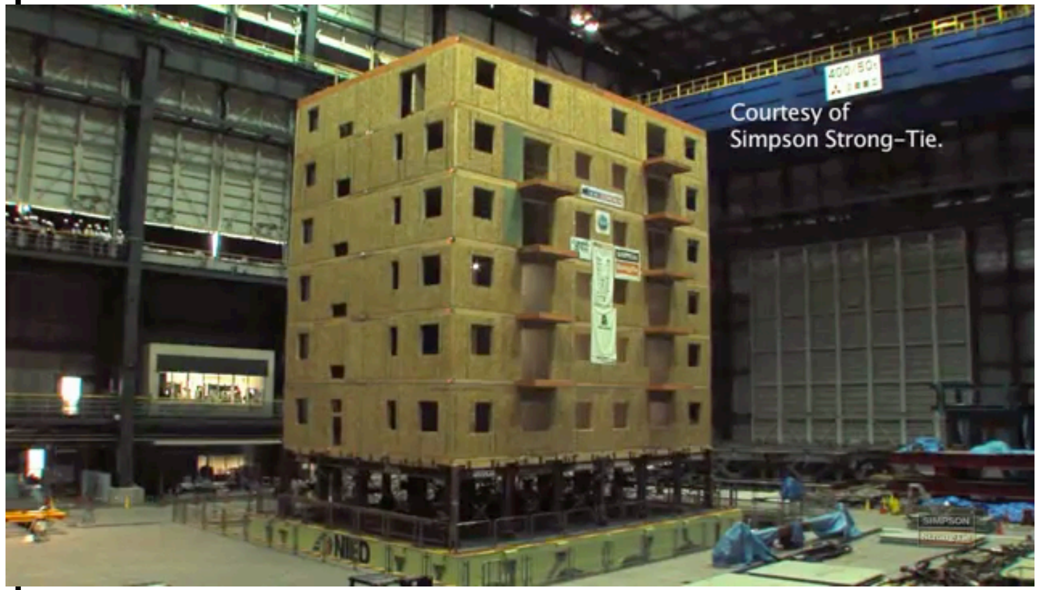
Sperimentale

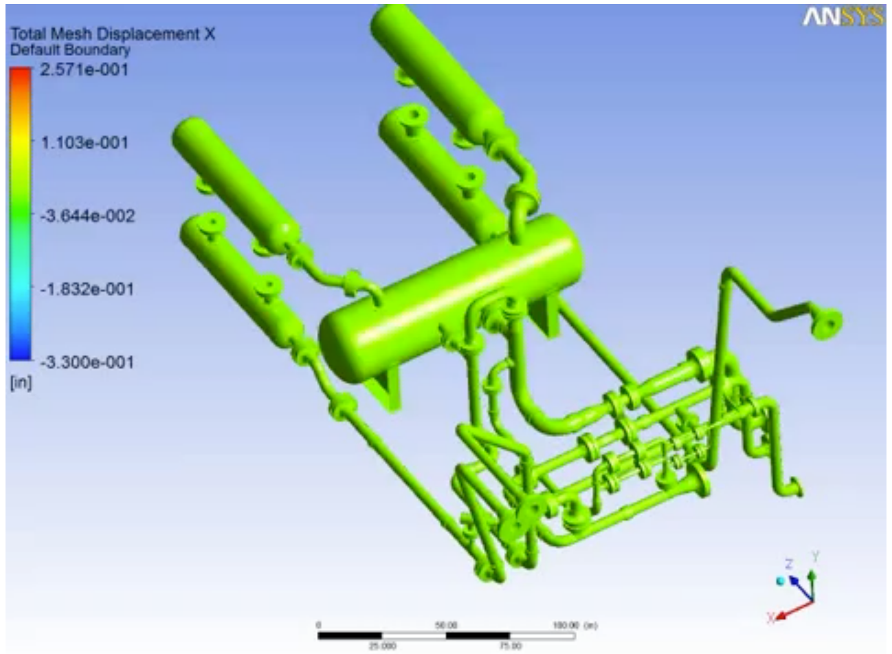
Acquisizione dati
Analisi modale
Analisi macchinario rotante
Analisi dati CBM
..
Laboratorio
..

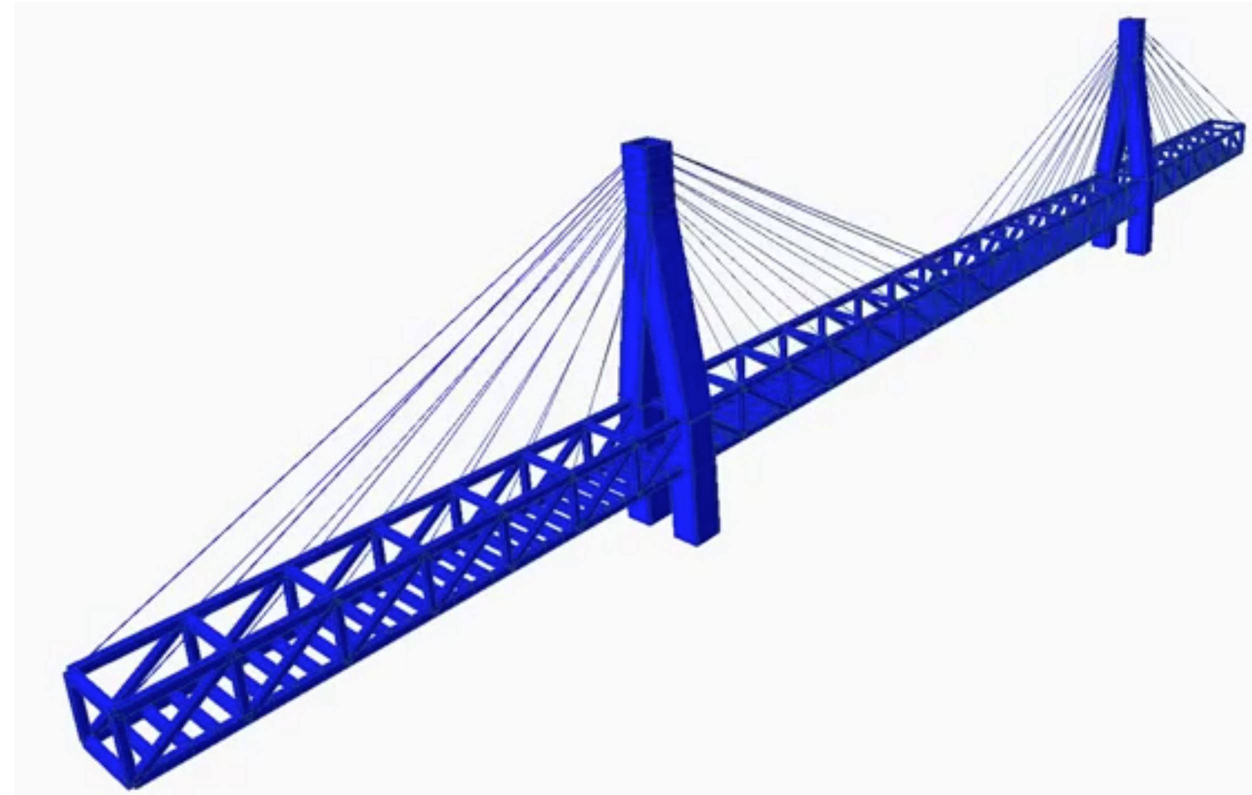
Numerica

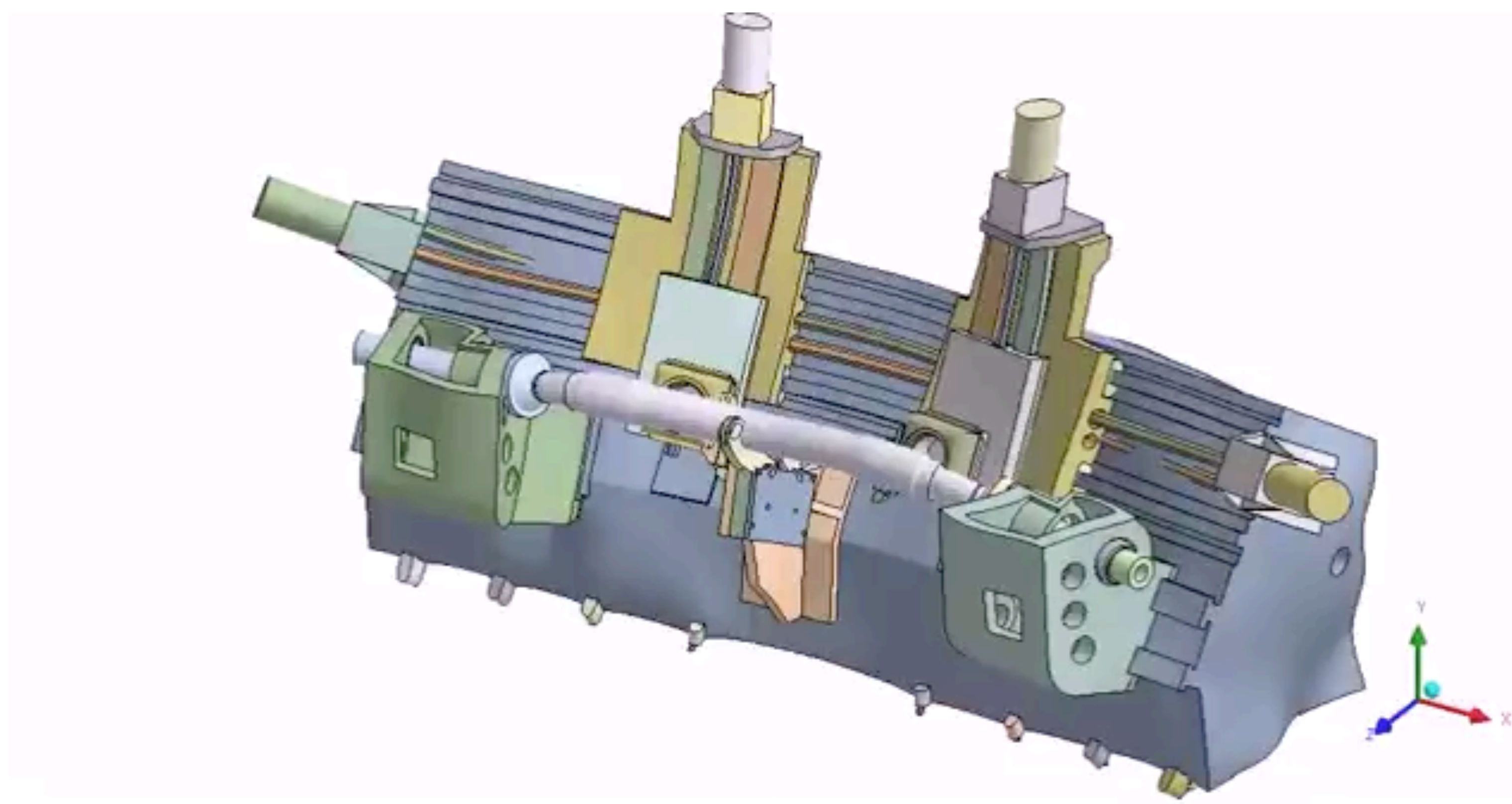
Sistemi SDOF / MDOF
Approccio Newtoniano
Approccio energetico
Approccio modale
Approccio State Space
Approccio Transfer Function
..

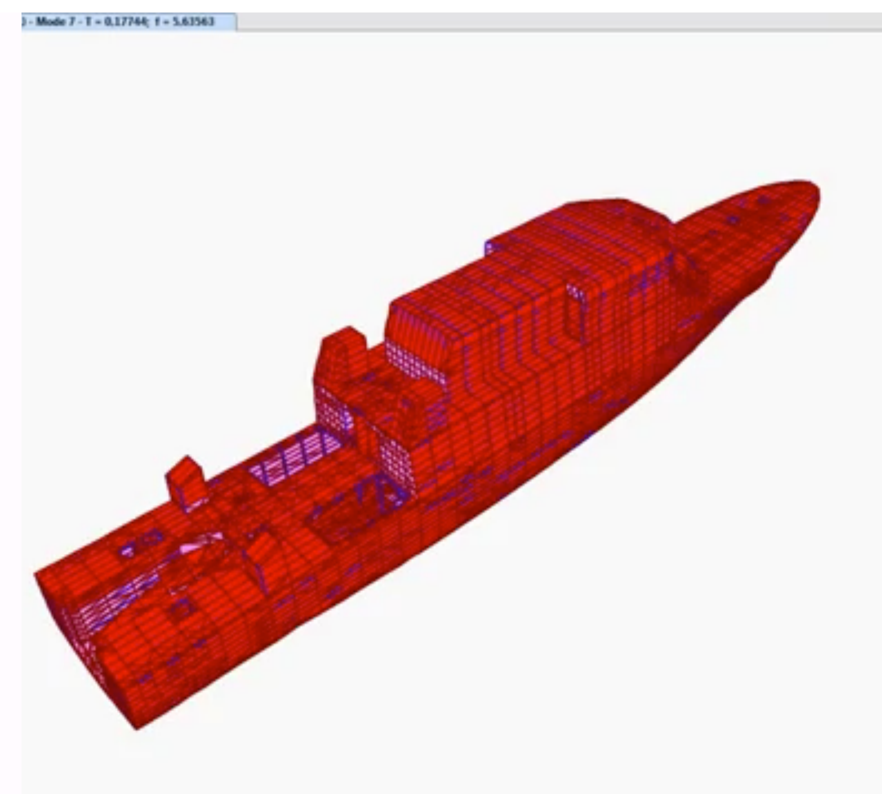

N7845Y

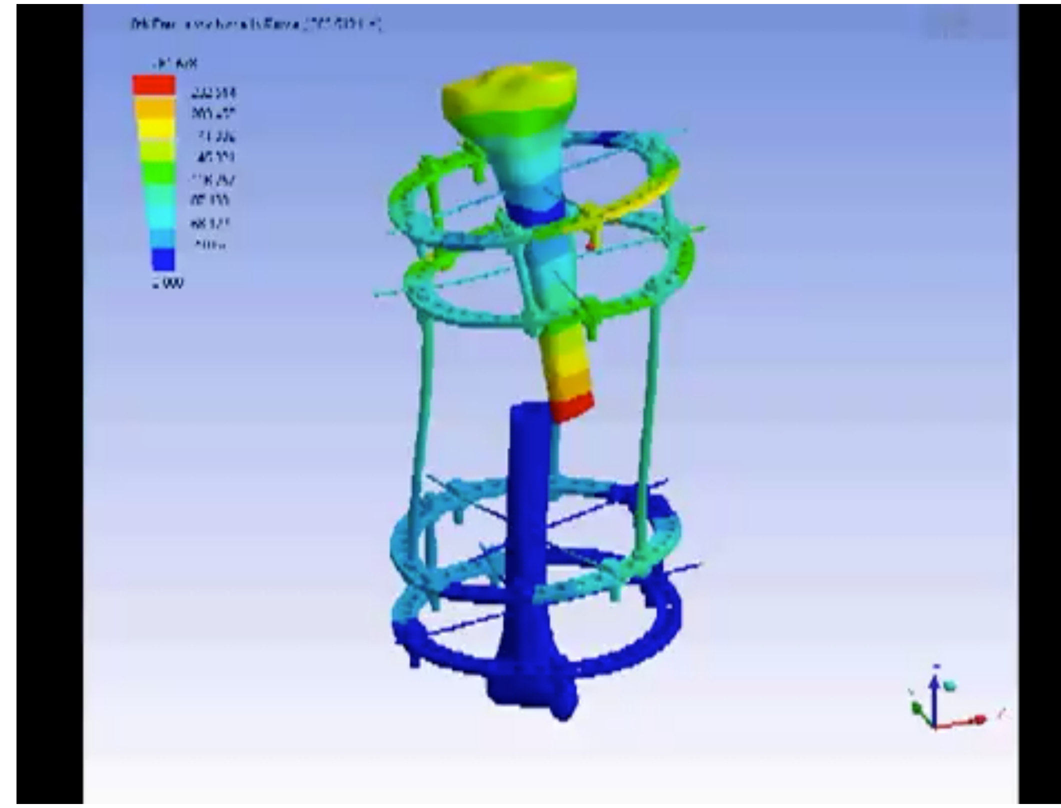

Courtesy of
Simpson Strong-Tie.


ANSYS
Total Mesh Displacement X
Default Boundary
2.571e-001
1.103e-001
-3.644e-002
-1.832e-001
-3.300e-001
[in]









Con le stesse tecniche,
si possono studiare moltissimi sistemi
di ambiti molto diversi tra loro!!

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Lo studio di un sistema dinamico può essere fatto in molti modi differenti, in funzione dell’utilizzo del sistema e della sua rappresentazione matematica :

- studiarne l’evoluzione nel dominio del tempo… (delle grandezze caratteristiche, degli stati…)

variazione freq. naturale vs presenza di danno

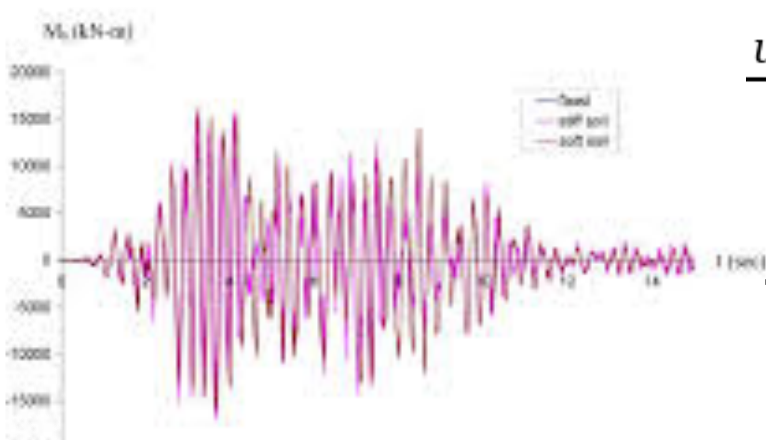
- studiarne la risposta in funzione della forzante applicata (impulsiva, armonica, random, operativa..)

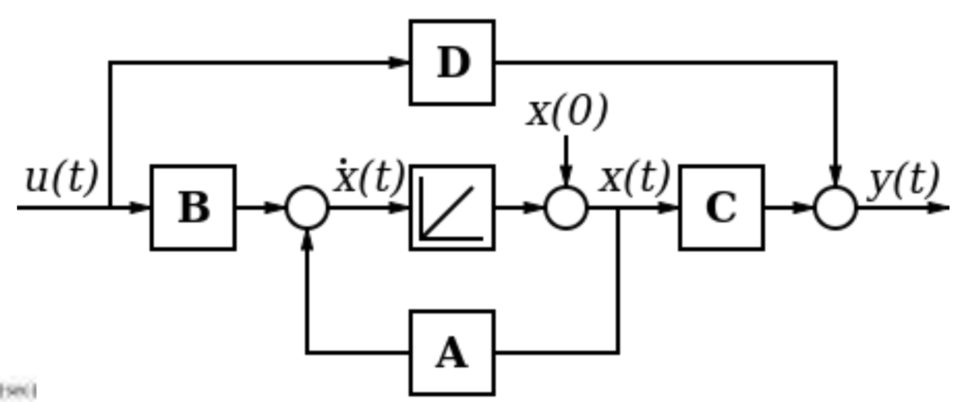
risposta sospensioni vs eccitazione strada

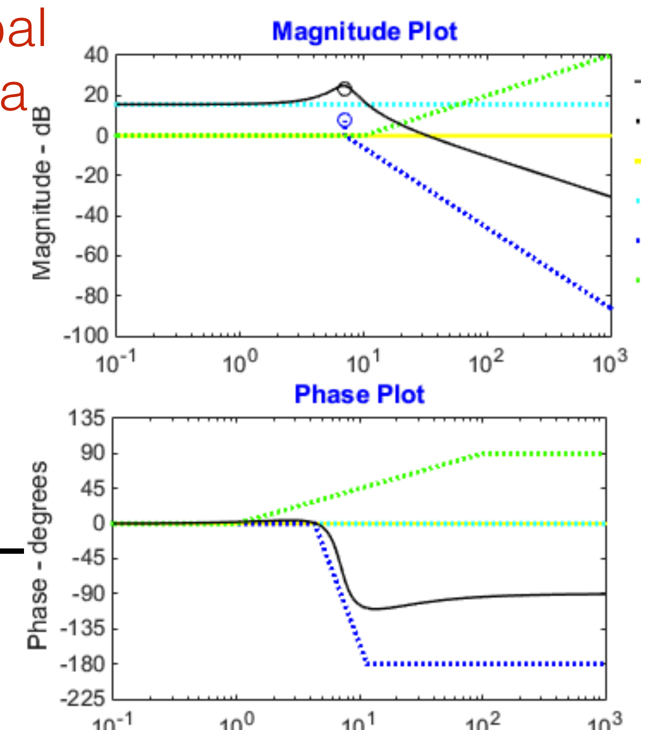
- controllarne la risposta in funzione delle caratteristiche del sistema e della forzante applicata per ottenere specifici risultati.. (controllo velocità, vibrazione residua..)

controllo attivo gimbal macchina fotografica

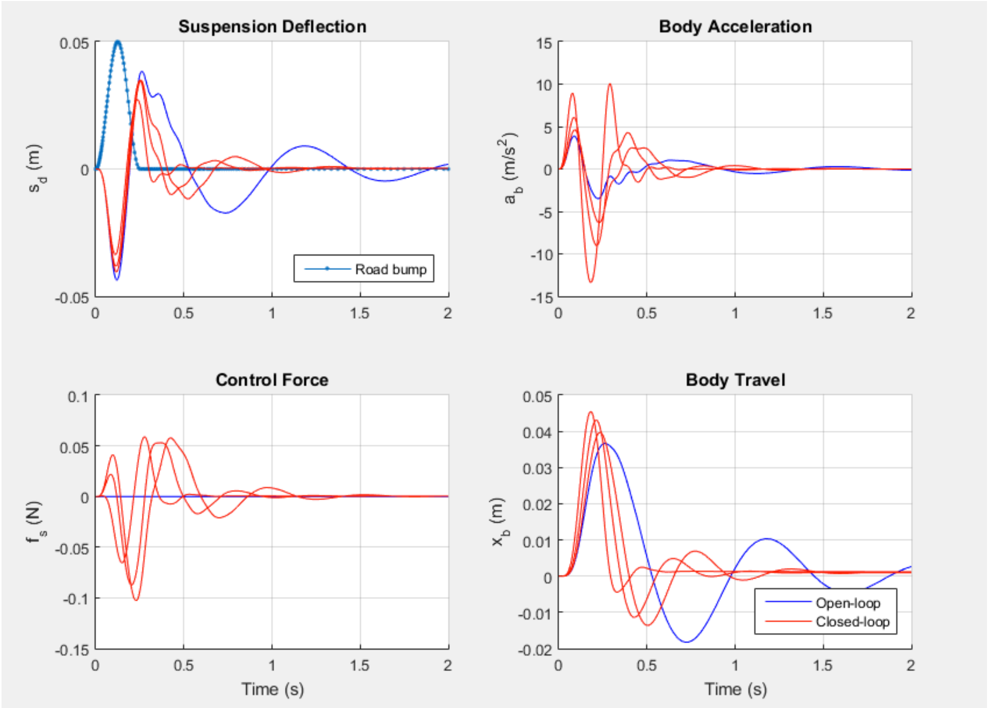
- …





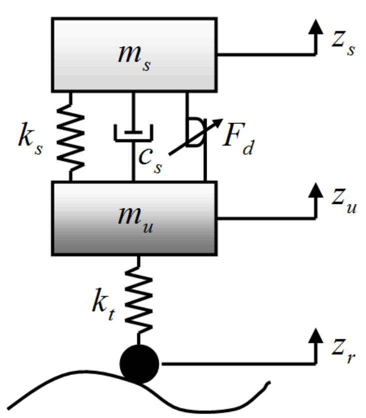


Sistema fisico

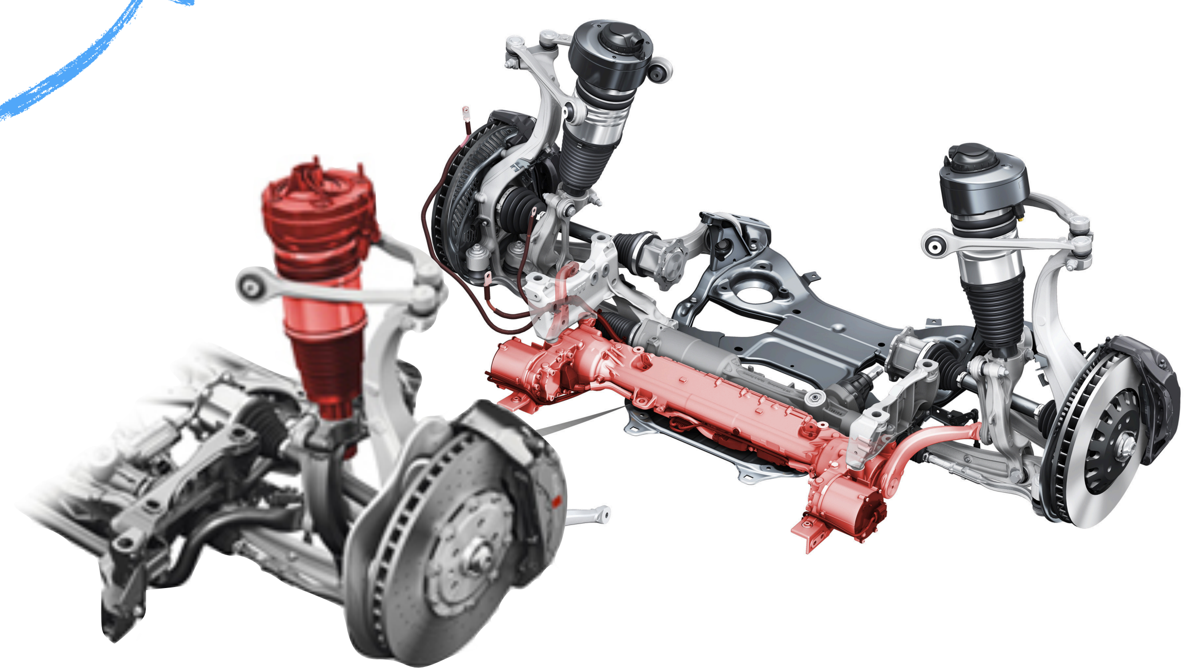


Risposte dinamiche

Modello numerico

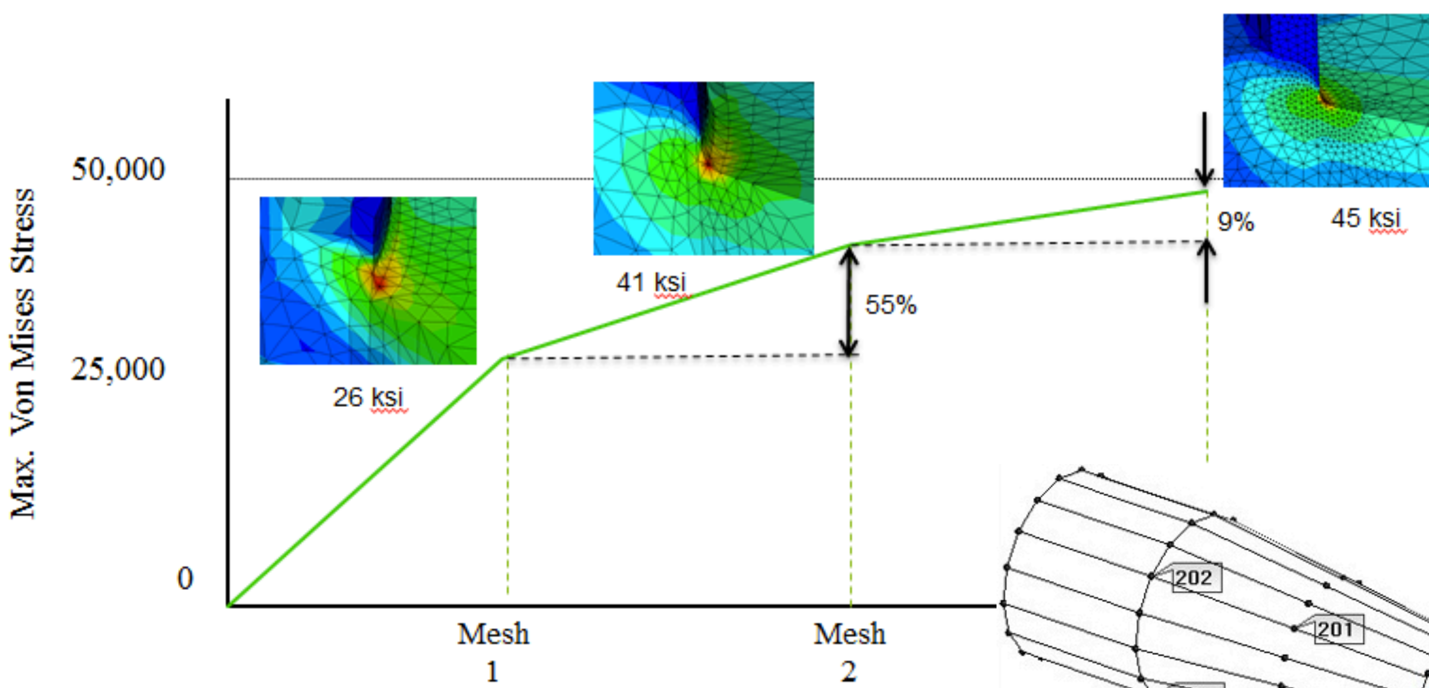


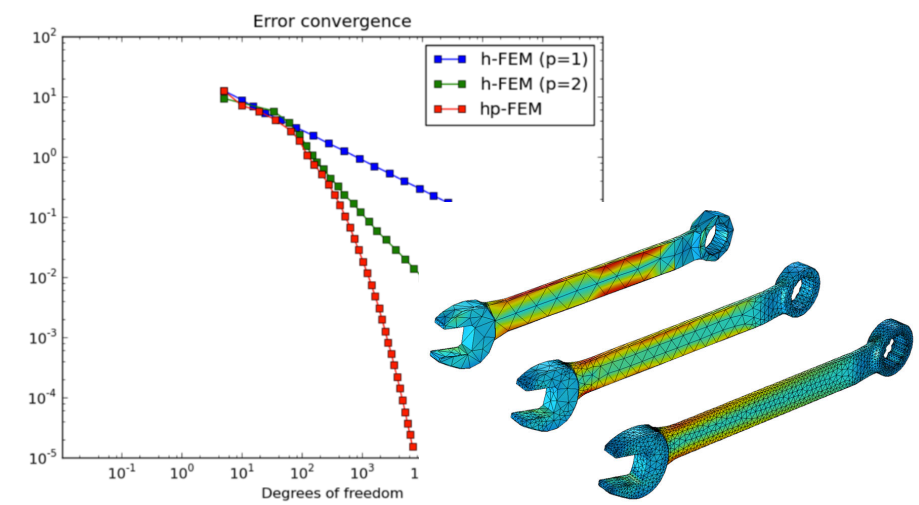
Sottosistemi

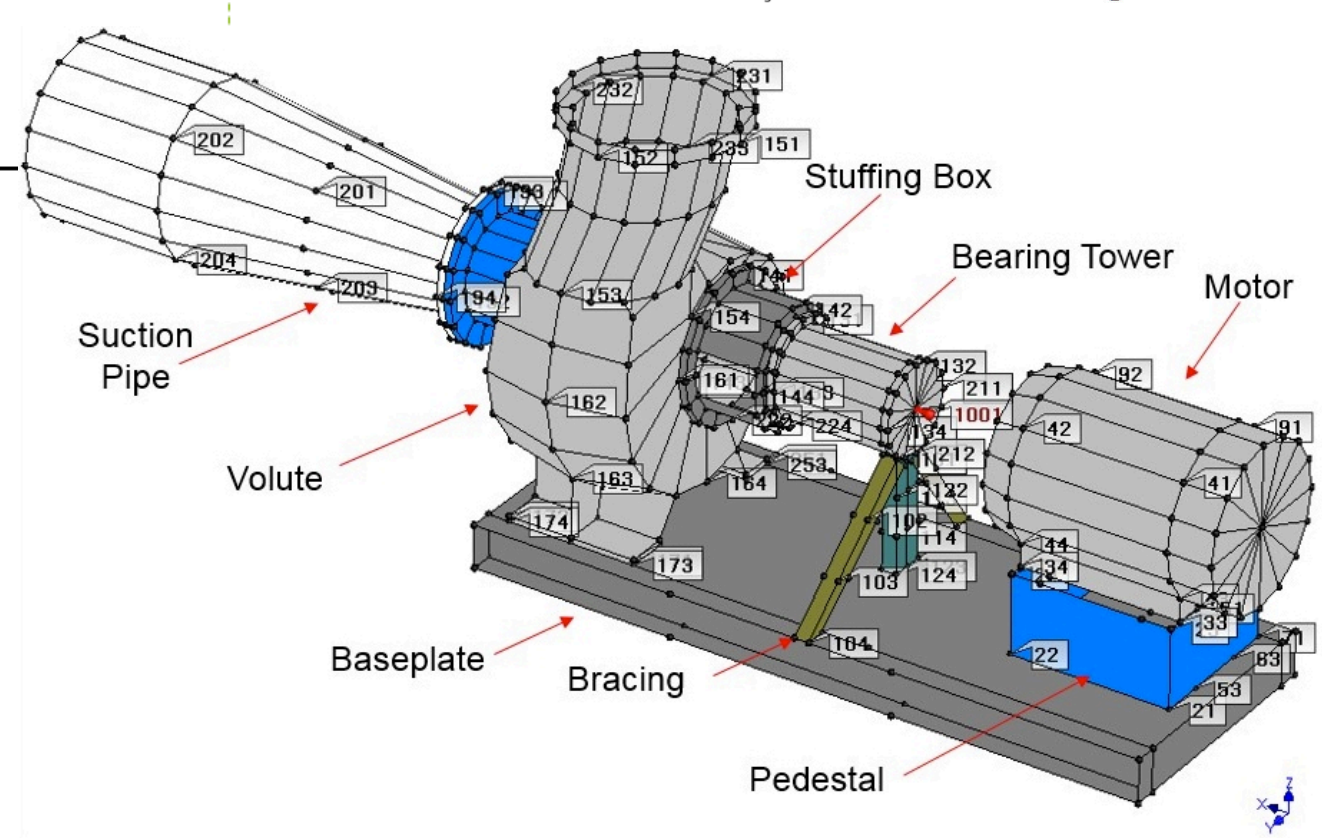


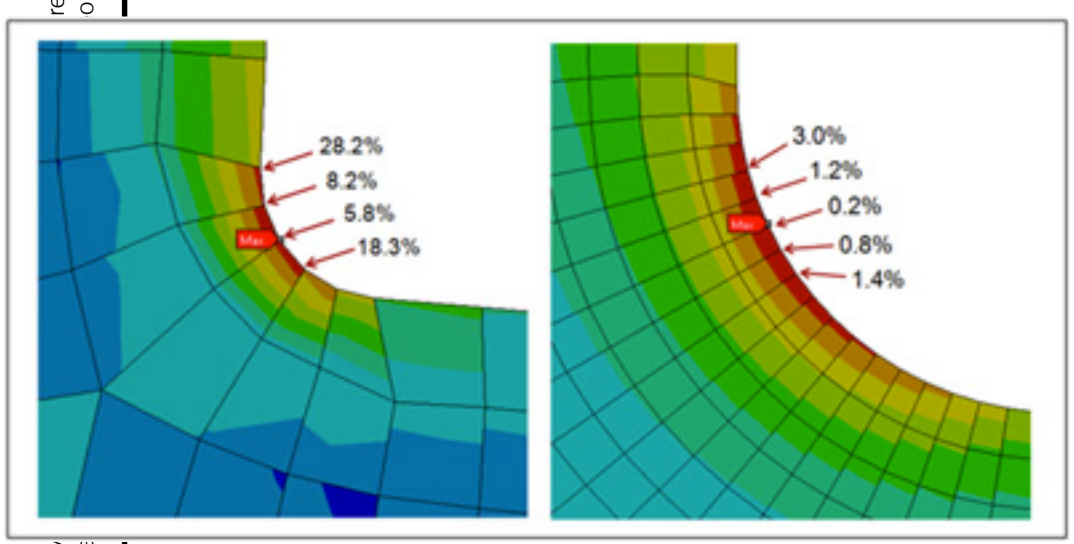
..semplificare
..modellare
..ottimizzare i parametri
..rimettere assieme tutto…
..reiterare!

..utilizzando una rappresentazione matematica del sistema, in grado di coglierne il comportamento (dinamico), con un livello di dettaglio definito dall'utilizzo del risultato!









Luigi BREGANT
bregant@units.it

L'equazione di partenza (ben nota) per lo studio dei sistemi dinamici è:

$$[m]\left\{\ddot{x}(t)\right\} + [c]\left\{\dot{x}(t)\right\} + \left[k\right]\left\{x(t)\right\} = \left\{f(t)\right\}$$

(eq. differenziale del secondo ordine…
a termini costanti…lineare… non omogenea…)

in cui ci sono 4 termini fondamentali, che determinano il tipo di modello…

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

per semplicità tralasciamo
per un po' da dipendenza da (t)

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

…e di risposta ottenibile!

Variano i termini potremmo studiare un sistema..

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$ …non forzato

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$ …non smorzato

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x^3\}=\{0\}$$ …non lineare

$$[I]\{\ddot{\theta}\}+[c_\theta]\{\dot{\theta}\}+[k_\theta]\{\theta\}=\{M\}$$ …torsionale

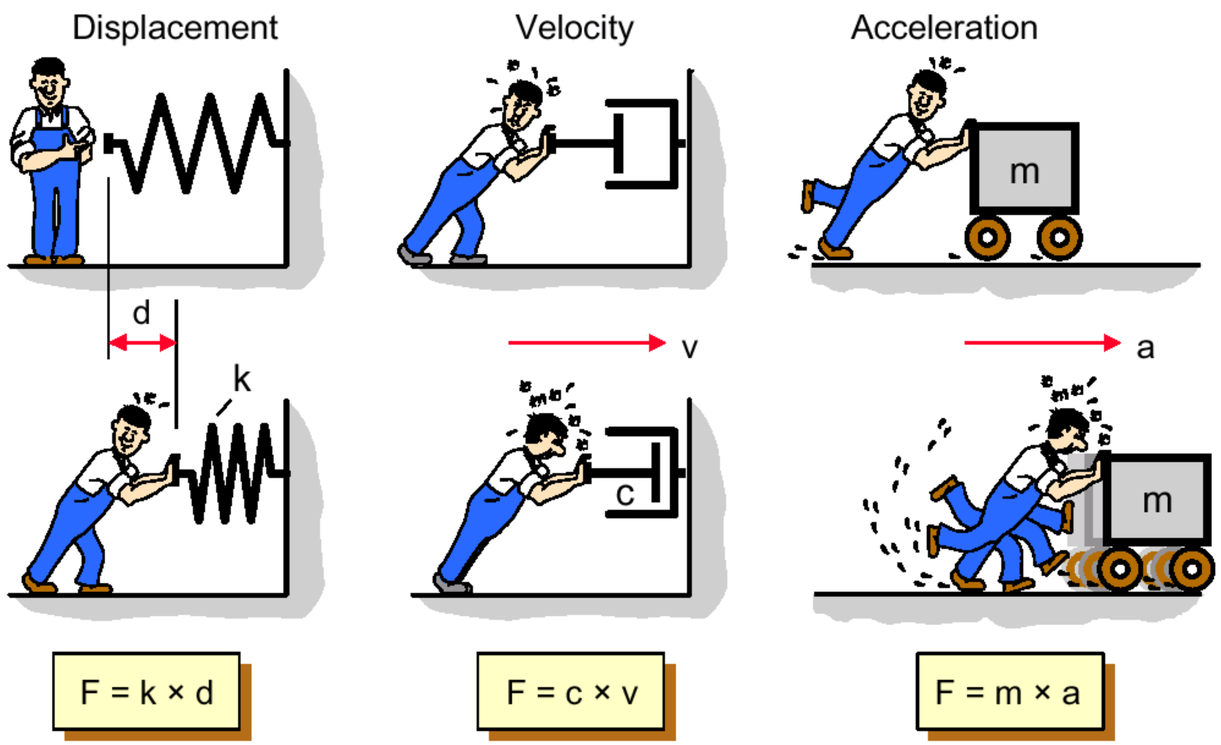
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

…accoppiato/disaccoppiato

…

Riguardiamo gli elementi fondamentali:

- **Massa** : dove si immagazzina l'energia potenziale o l'inerzia
- **Smorzatore** : dove si dissipa l'energia (normalmente trasformata da meccanica a termica)
- **Rigidezza** : dove si immagazzina l'energia elastica
- **Forzante** : ciò che causa le vibrazioni (interne: condizioni iniziali/contorno, esterne, forze e momenti)



Nel corso si considereranno sempre elementi **IDEALI**!
(una proprietà alla volta e solo quella)

$m=0$
$c=0$
$k=150kN/m$

Opportunamente moltiplicati per accelerazione, velocità, e spostamento realizzano le forze che si equilibrano nell'equazione di moto!

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Accelerazione

Spostamento

Velocità

$$[m]\left\{\ddot{x}(t)\right\}+[c]\left\{\dot{x}(t)\right\}+\left[k\right]\left\{x(t)\right\}=\left\{f(t)\right\}$$

NB sono equazioni del tempo
per semplicità trascuriamo (t)

Elemento Inerziale - massa [kg], momento d'inerzia [kgm^2]

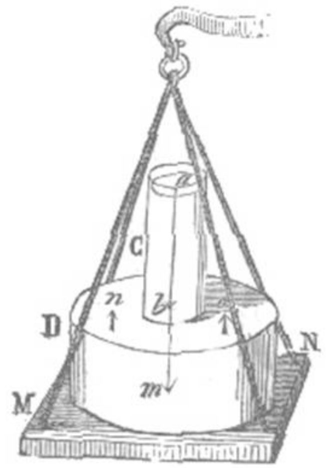


Fig. 49.

Ricordarsi di tutti i GDL (DOF)!

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \qquad \text{1 DOF}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 \qquad \text{3 DOF}$$

$$\left[kg * \frac{m}{s^2} \right] = [N]$$

..abituarsi a considerare - analizzare - risolvere sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

Elemento Dissipativo - smorzatore lineare [Ns/m], torsionale [Ns/rad]

Esistono diversi modelli matematici che rappresentano vari meccanismi dissipativi.. da cui derivano equazioni del moto più o meno complesse!

Viscoso $\quad f_d = c\dot{x}$

es. ammortizzatori veicolo (olio/gas)

Coulumbiano $\quad f_d = -\mu mg\,sign(\dot{x})$

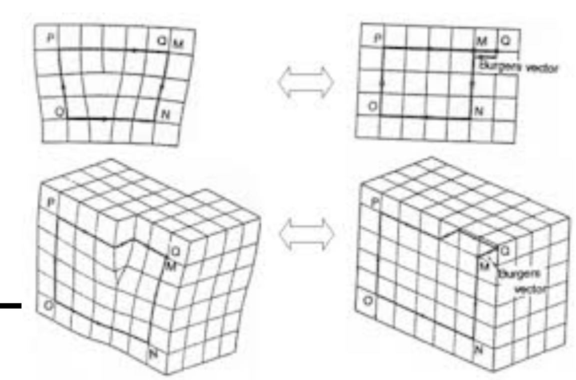
in opposizione con fase con vel

es. smorzatori attrito edilizia / lavatrici

Strutturale/isteretico $\quad f_d = jhx$

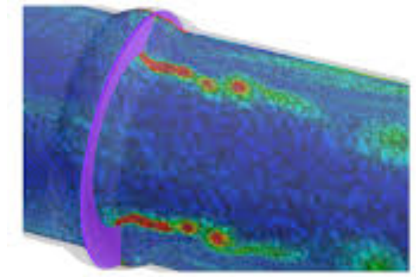
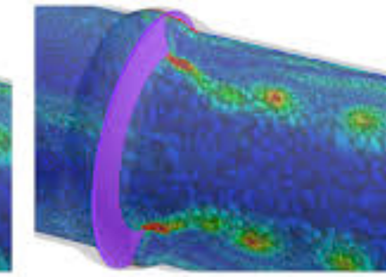
in fase con vel e proporzionale spost

es. cricche, dislocazioni, giochi



$$\left[\frac{Ns}{m} * \frac{m}{s}\right] = [N]$$

Elemento Dissipativo

Fluidodinamico

$$f_d = d\dot{x}^2$$

es. moto nei fluidi

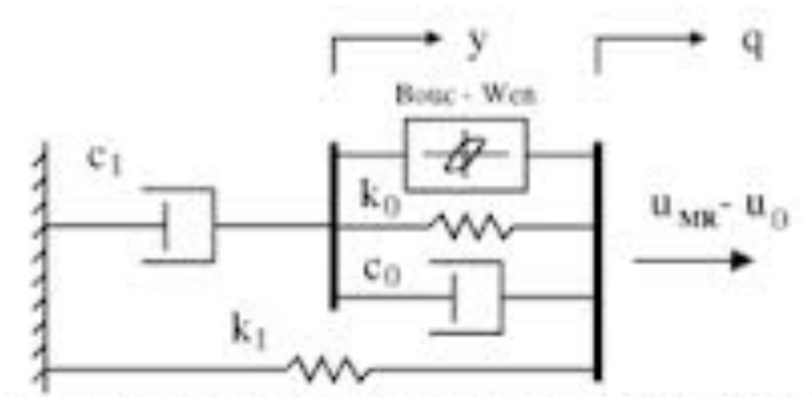
Frazionale

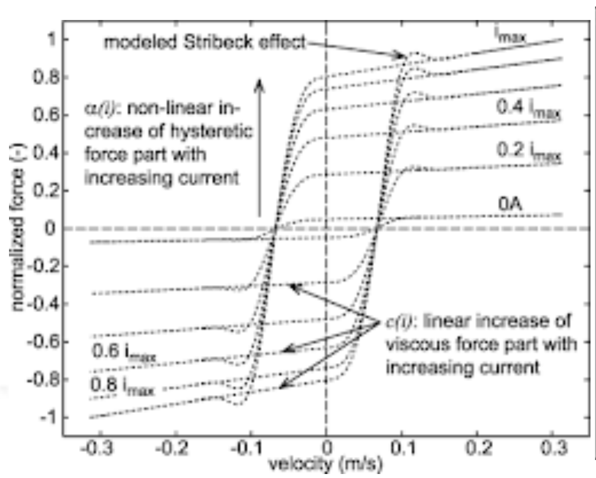
$$f_d = jA\frac{\partial^r x}{\partial t^r}$$

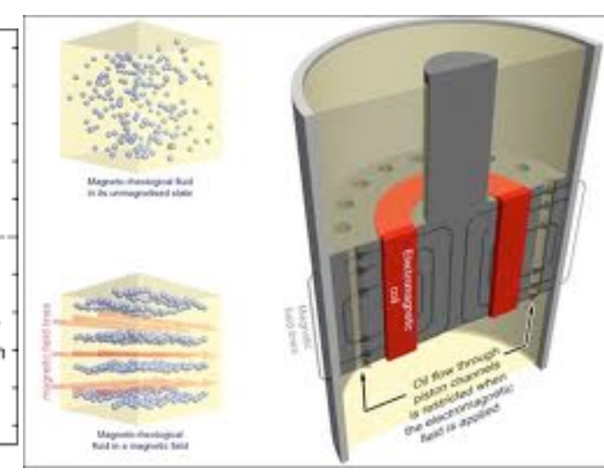
es. gomme / elastomeri feltri

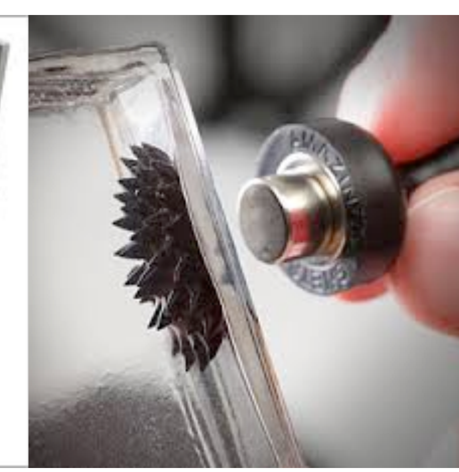
Magnetoreologico / combinati

es. ammortizzatori







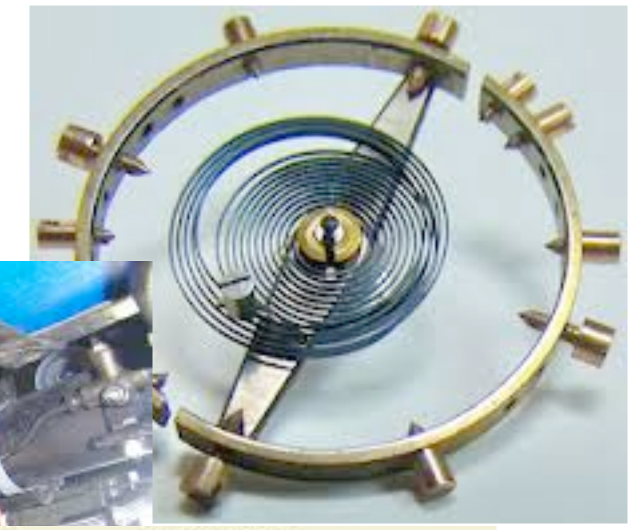


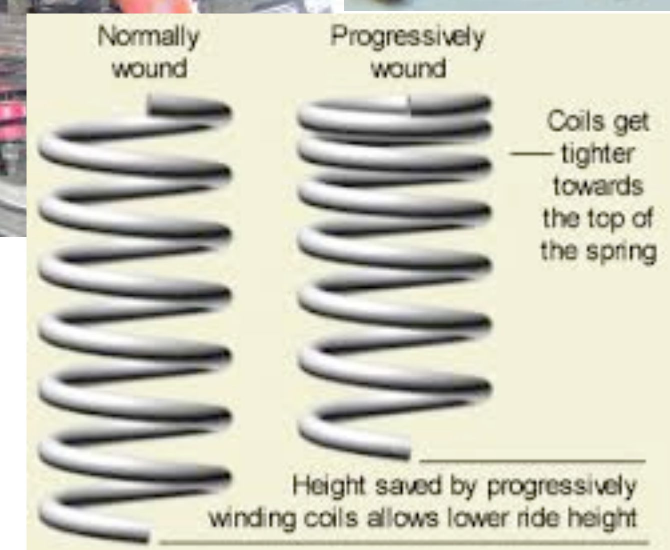
Luigi BREGANT
bregant@units.it

Elemento Elastico - rigidezza lineare [N/m], torsionale [N/rad]

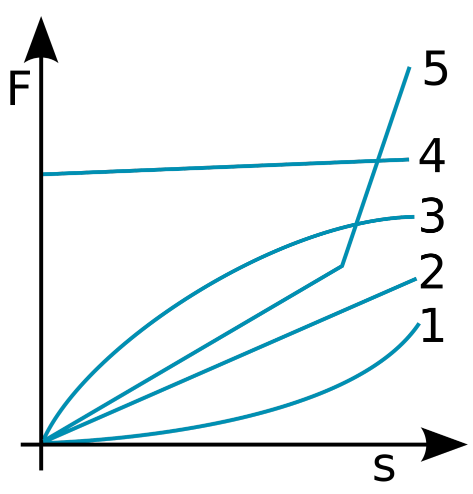
Lineari
(caratteristica)

$$f_s = kx \qquad f_s = k\theta$$





Non Lineari,
Bilineari,
Progressive
(Hardening, Softening),…



Sapete già calcolare la molla equivalente di molle in serie e in parallelo!!

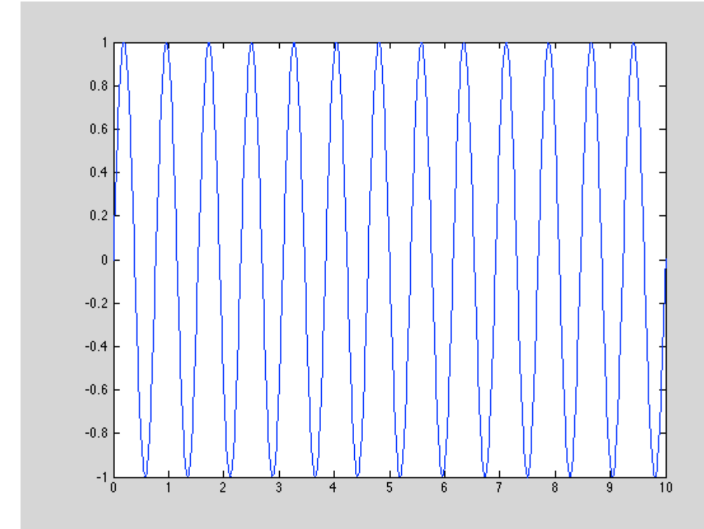
$$\left[\frac{N}{m} * m\right] = [N]$$

..abituarsi a considerare - analizzare - risolvere sistemi con TRASLAZIONI e ROTAZIONI!

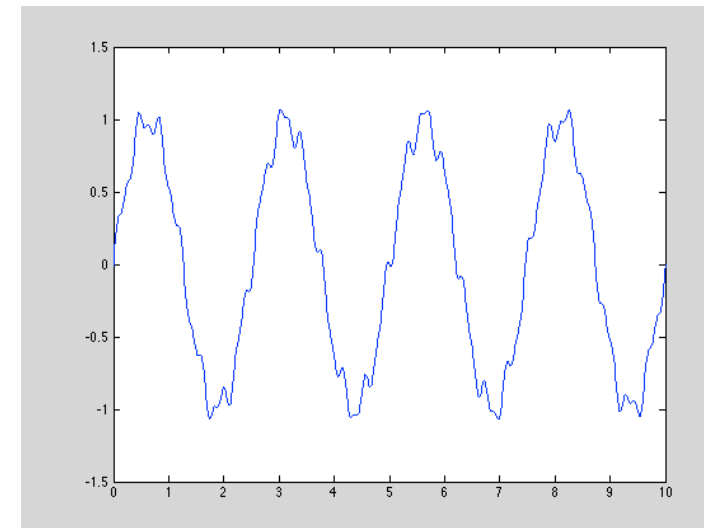
Forzanti

Armoniche semplici
es. squilibrio residuo

a=sin(2*pi*1.3*t);

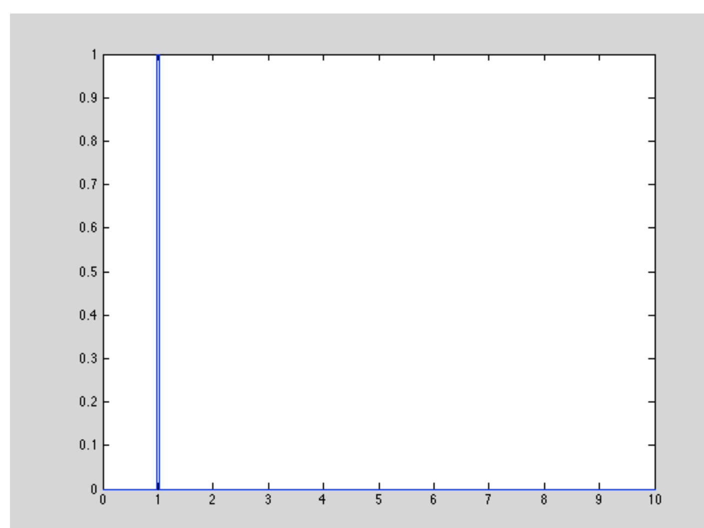


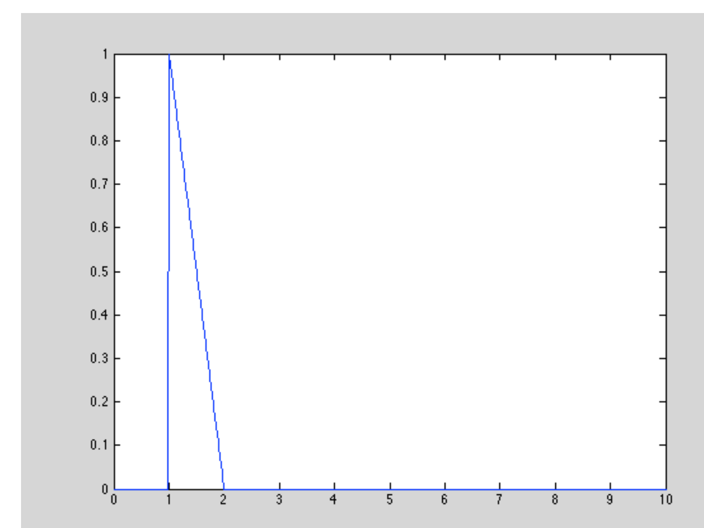
Armoniche complesse
es. combustione



a=sin(2*pi*0.4*t)+0.09*sin(2*pi*2.7*t)+0.05*sin(2*pi*5.1*t);

Impulsive
es. impatto, esplosione



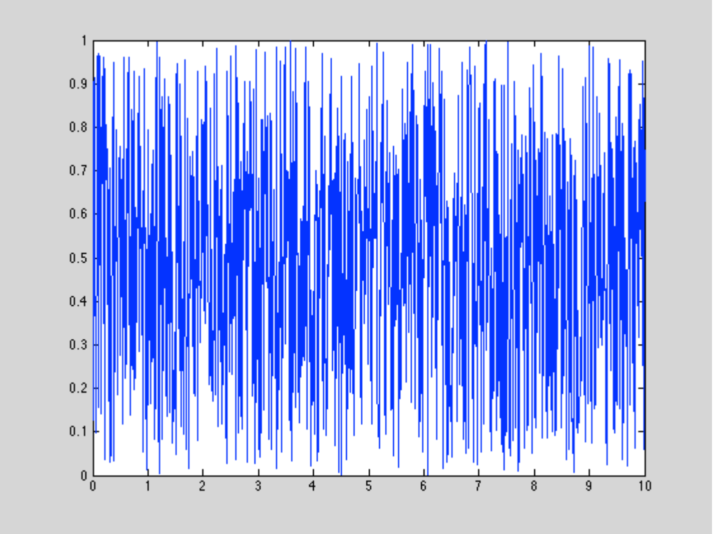


a=[zeros(1,100) ones(1,3) zeros(1,898)];

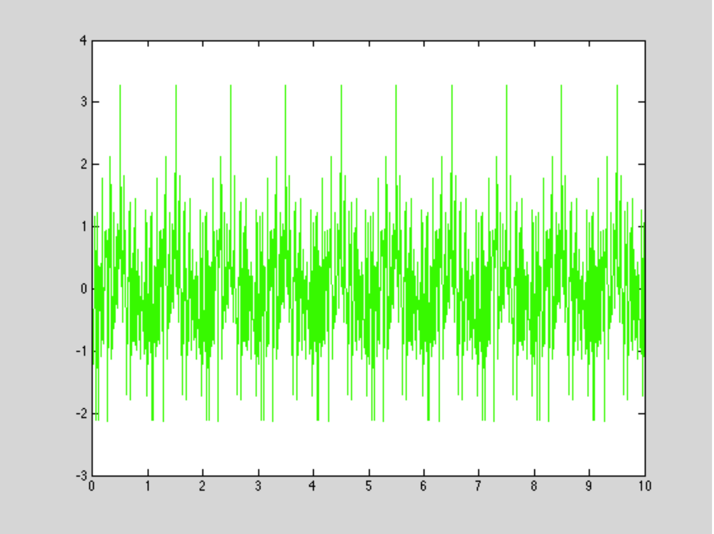
a=[zeros(1,100) 1-t(1:100) zeros(1,801)];

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Forzanti



a=rand(1,size(t,2));

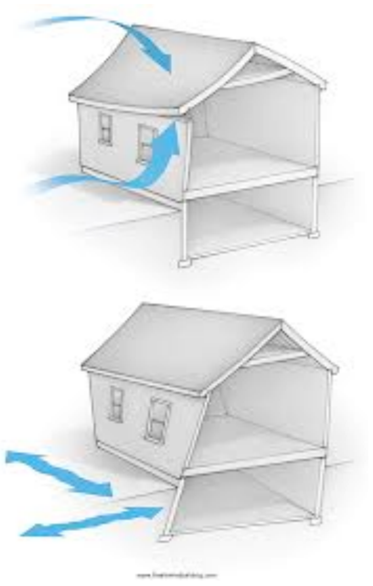


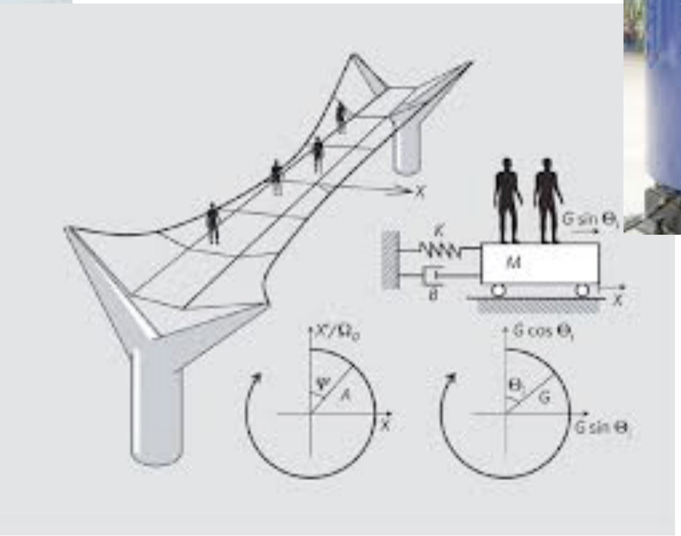
a=randn(1,100);
a=[a a a a a a a a a a];

Random
es. rugosità asfalto

Operazionali

es. vento, funzionamento impianto, traffico veicolare, pedoni,…





In rete si trovano calcolatori di tutti i tipi per stimare le caratteristiche dei parametri necessari..

https://www.tribology-abc.com/calculators/damping_1.htm

https://www.calqlata.com/productpages/00076-help.html

https://www.acxesspring.com/spring-stiffness-calculator.html

https://www.newcombspring.com/springulator/

https://www.modalshop.com/vibration-calculator?ID=1036

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Accelerazione

Spostamento

Velocità

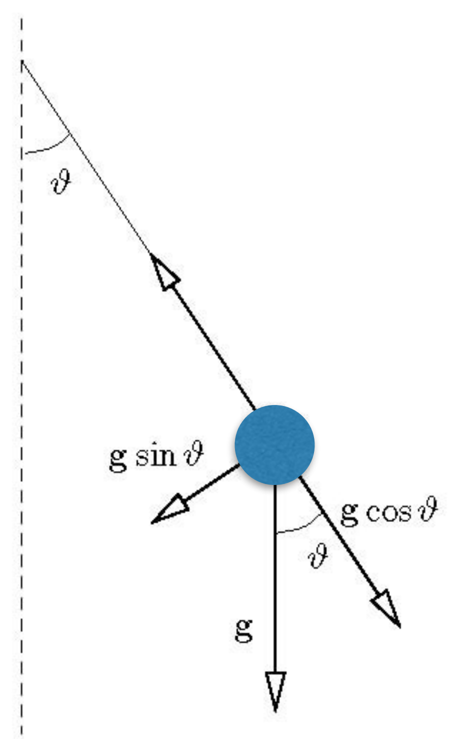
Luigi BREGANT
bregant@units.it

Linearizzazione

I sistemi reali solitamente NON sono lineari!, prima o poi il legame tra le grandezze non è di proporzionalità!

Si linearizza il sistema per semplificare le equazioni del moto!

es: Vibrazioni del pendolo



$$\begin{cases} ma_c = T - mg\cos\theta \\ ma_t = -mg sen\theta \end{cases}$$

Moto Circolare: $\begin{cases} a_c = L\dot{\theta}^2 \\ a_t = L\ddot{\theta} \end{cases}$

$$\begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg sen\theta \end{cases}$$ divido per mL

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right) sen\theta = 0$$ equazione esatta (non lineare $sen\theta$)

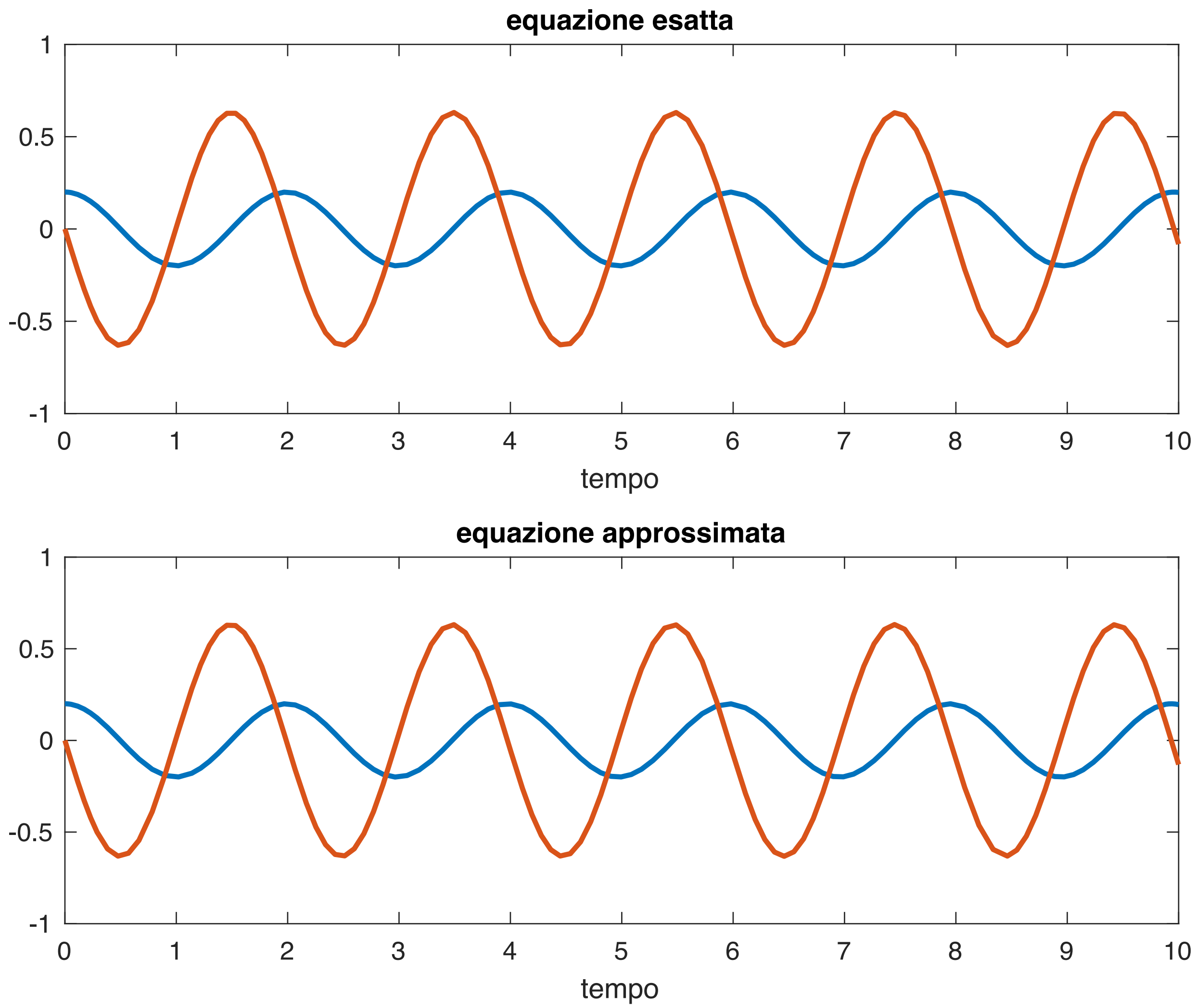
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0$$ per piccoli spostamenti $sen\theta \approx \theta$

equazione approssimata (lineare)

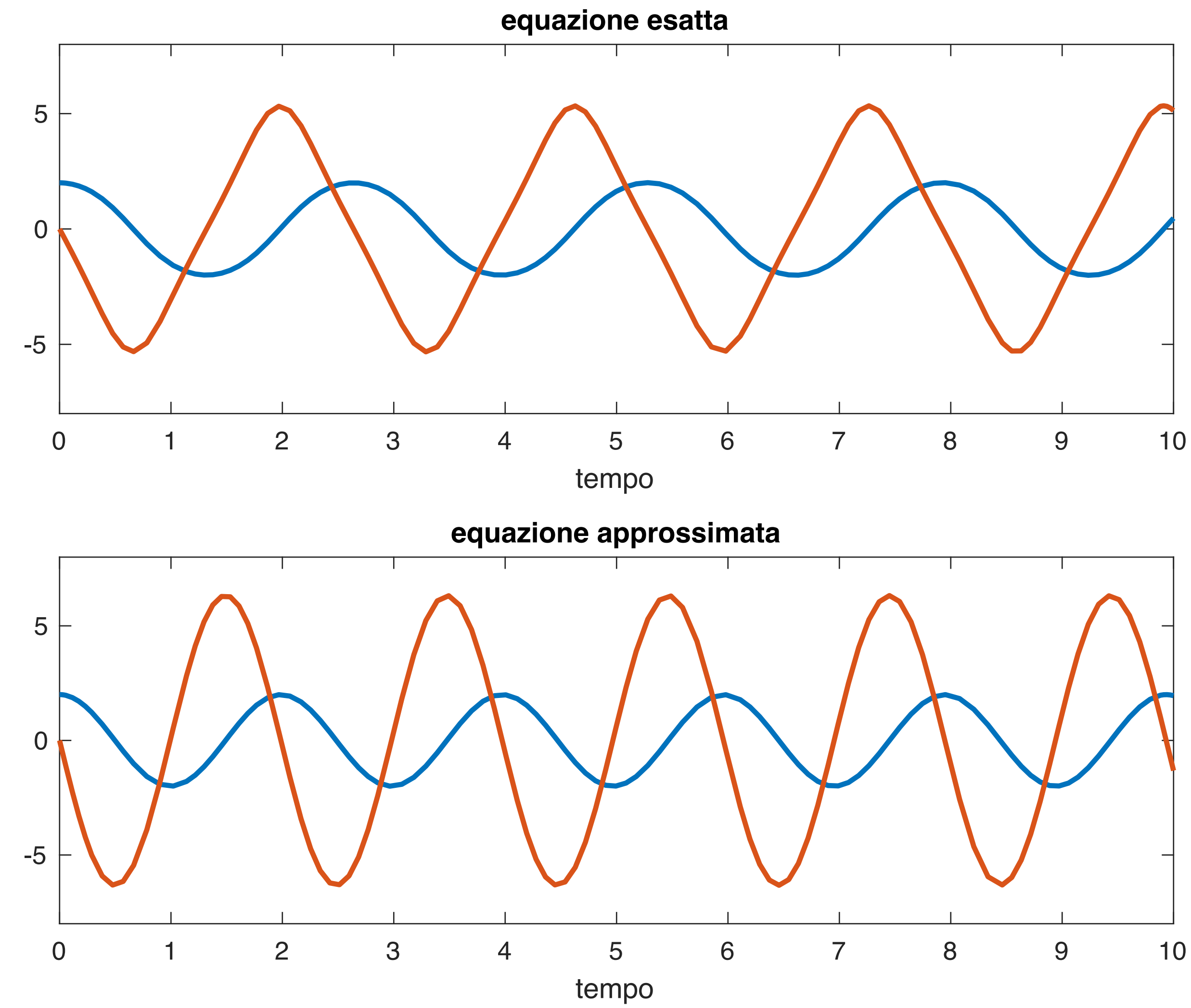
es: Vibrazioni del pendolo

in blu lo spostamento
in arancio la velocità

ω^2=10rad/s^2 condizioni iniziali [.2 0]	ω^2=10rad/s^2 condizioni iniziali [2 0]



Piccoli Spostamenti



Grandi Spostamenti

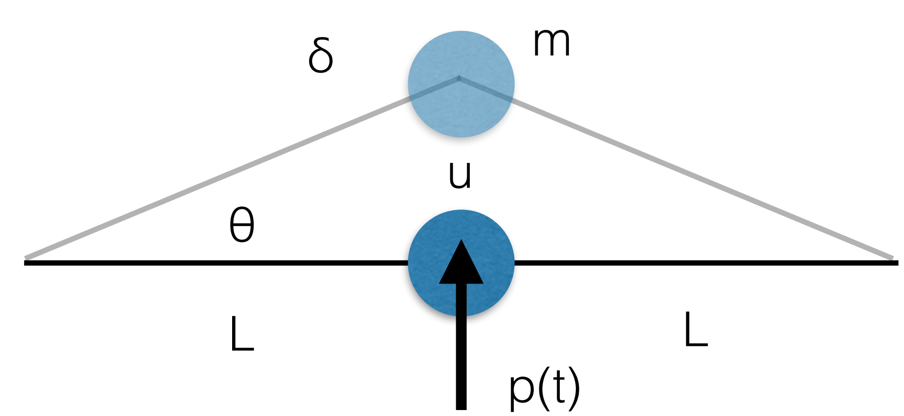
es: Vibrazione fune tesa

Consideriamo una fune tesa, con una massa al centro.
Deriviamo le equazioni del moto, noti

- la tensione di una fune
- le caratteristiche della fune (sezione A, lunghezza L, modulo di Young E)
- lo spostamento iniziale trasversale u

(da cui deriva un allungamento δ della fune)

$$m\ddot{u} + 2T\sin\theta = p$$ Per l'equilibrio delle forze agenti



$$\delta = \left(L^2 + u^2\right)^{1/2} - L$$

$$T = T_o + \left(\frac{AE}{L}\right)\delta$$

$$\sin\theta = \frac{u}{\left(L^2 + u^2\right)^{1/2}}$$

sostituendo:

$$\boxed{m\ddot{u} + 2\left[T_0 + \left(\frac{AE}{L}\right)\left[\left(L^2 + u^2\right)^{1/2} - L\right]\right]\left[\frac{u}{\left(L^2 + u^2\right)^{1/2}}\right] = p}$$

equazione esatta

es: Vibrazione fune tesa

ipotizzando piccoli spostamenti: $u << L$

$$\boxed{m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L}\right)u = p}$$

ipotizzando di stimare l'allungamento della fune con un espansione..

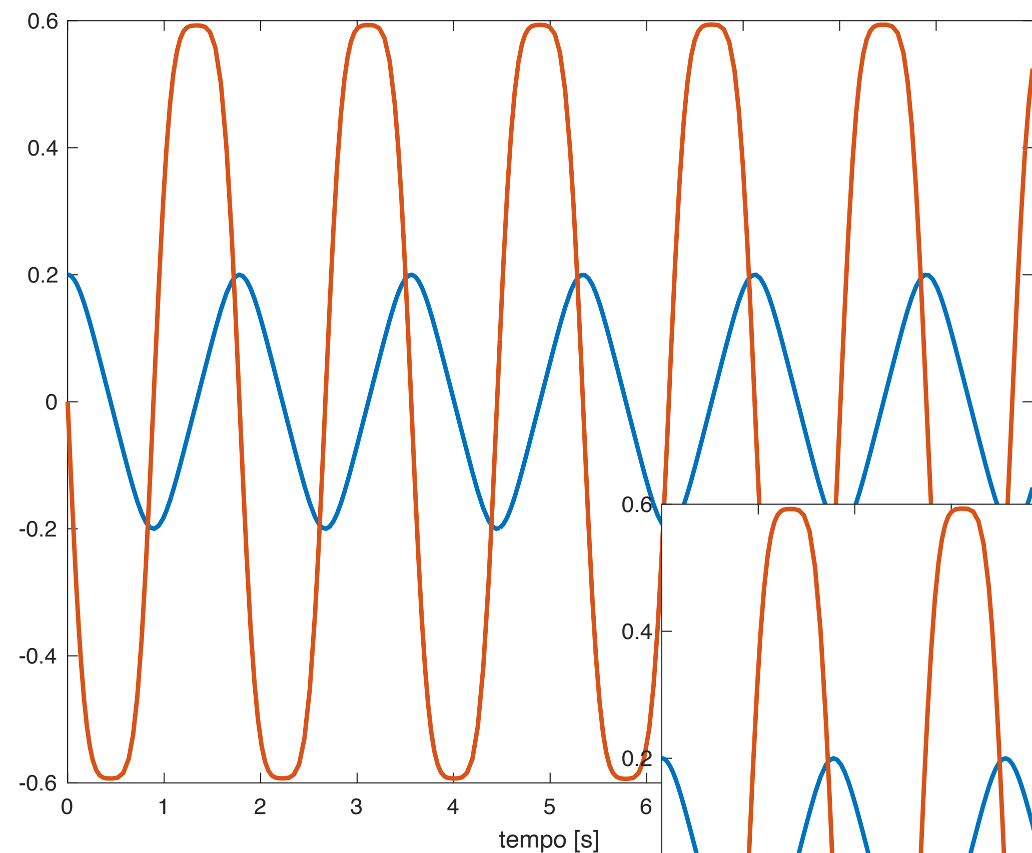
$$\delta = L\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{L}\right)^2\right] - L = \left(\frac{1}{2L}\right)u^2$$

$$\boxed{m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L}\right)u + \left(\frac{AE}{L^3}\right)u^3 = p}$$

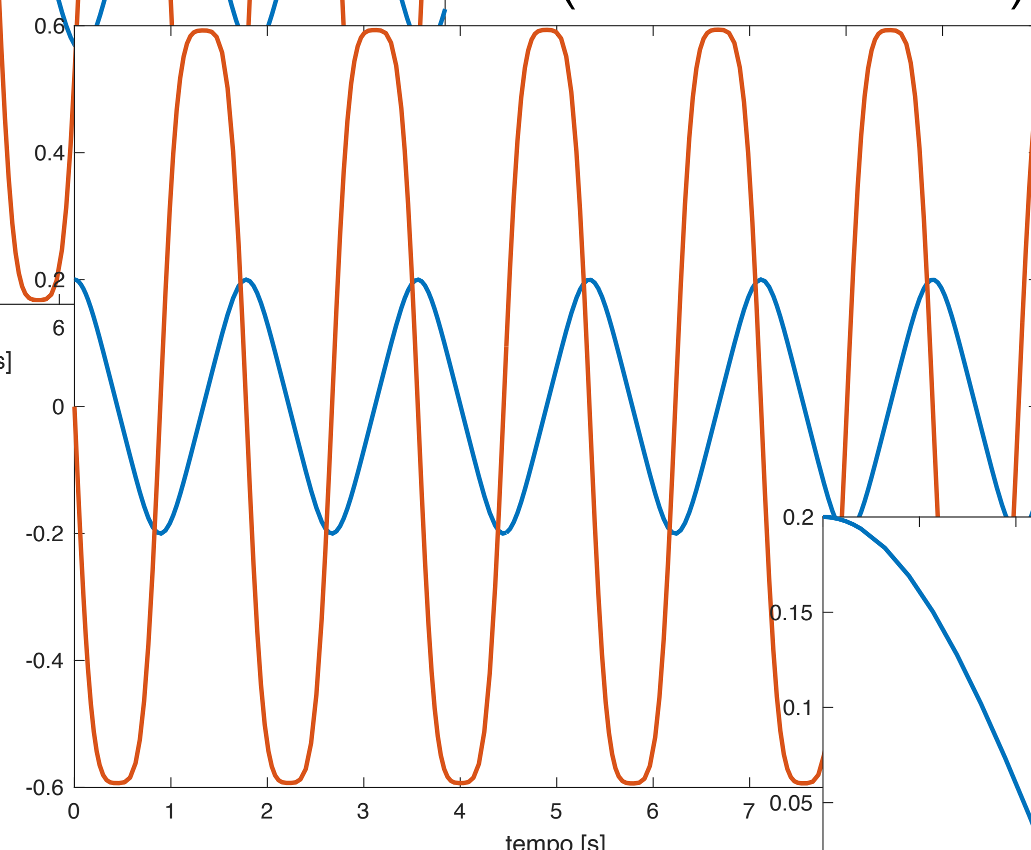
..le equazioni sono evidentemente differenti!

in blu lo spostamento
in arancio la velocità

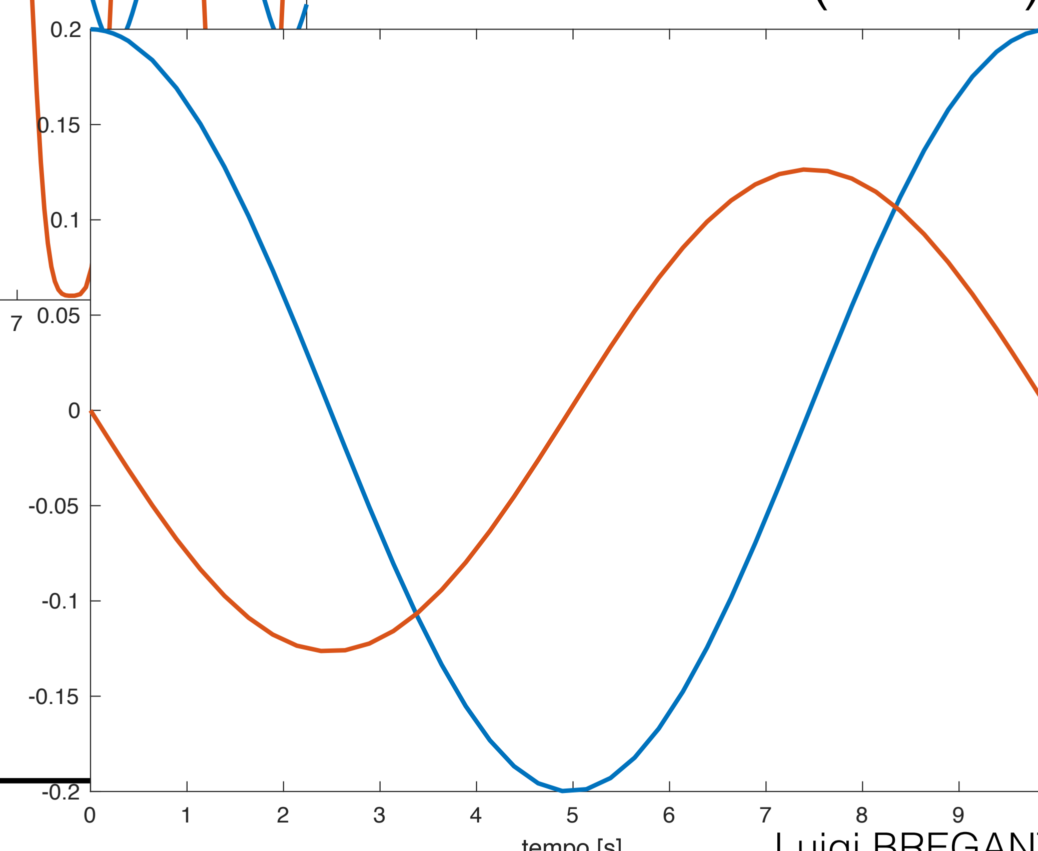
esatta



approssimata
(lineare+cubica)



approssimata
(lineare)



L=10; % [m]
T=100; % [N]
m=50 % [kg]
A=1.0000e-04; % [m^2]
E=210000000000; % [Pa]

t=[0 10]
init=[.2 0];

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Se il sistema viene linearizzato, le cose si semplificano…

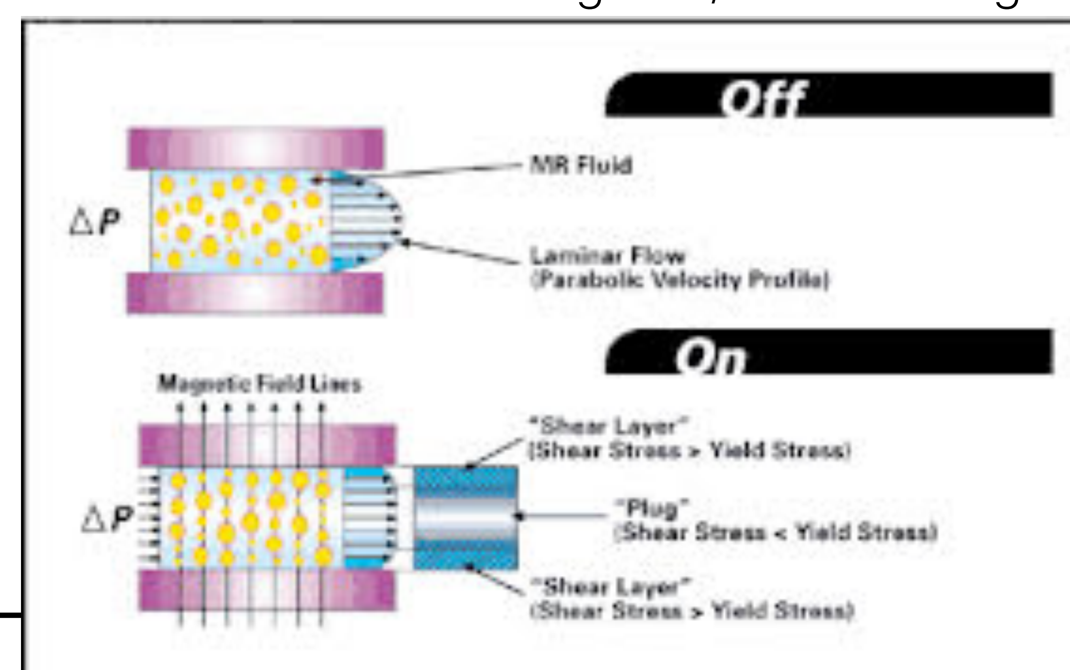
$$x(t) \rightarrow p(t) \qquad \alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow \alpha p(t) + \beta q(t)$$
$$y(t) \rightarrow q(t)$$

..vale il principio di sovrapposizione degli effetti
..vale il teorema di Maxwell/reciprocità

Nel CorsoMDV si considerano principalmente sistemi **LINEARI** ed a **PARAMETRI TEMPO INVARIANTI.** Vengono detti sistemi **LTI**

Massa variabile

Materiali Magneto / Elettro reologici



$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Accelerazione

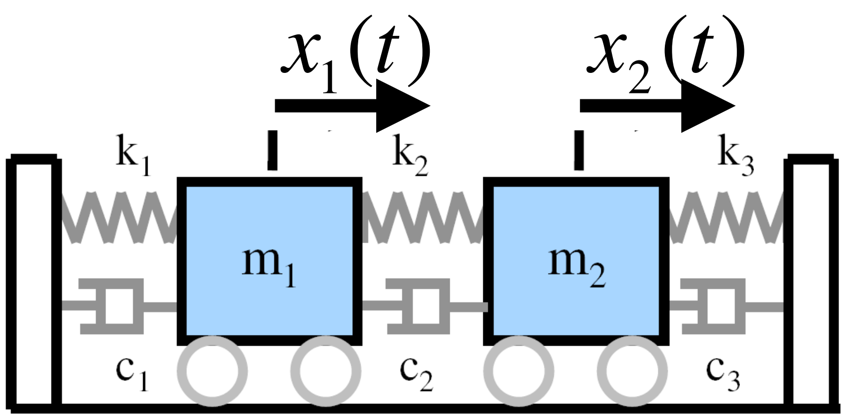
Velocità

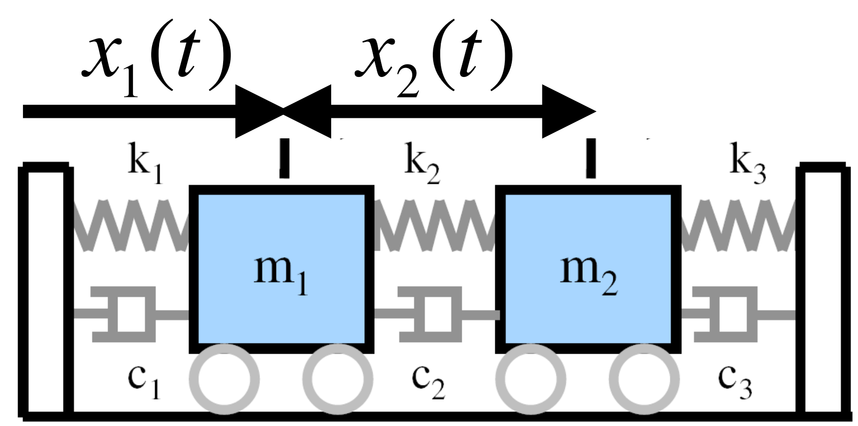
Spostamento

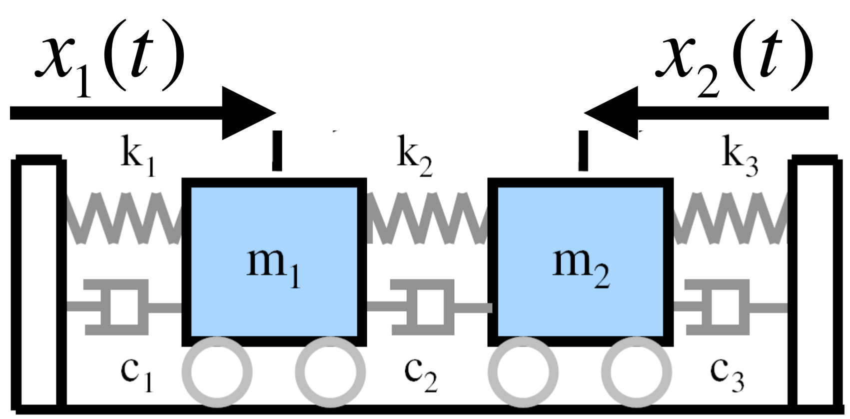
Luigi BREGANT
bregant@units.it

Coordinate

Minimo numero di informazioni in grado di descrivere completamente lo stato del sistema (nella maniera più comoda possibile - equazioni del moto più semplici)..

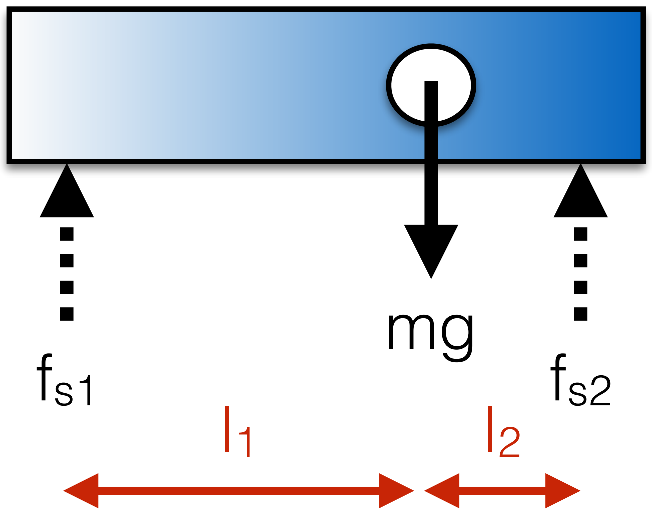






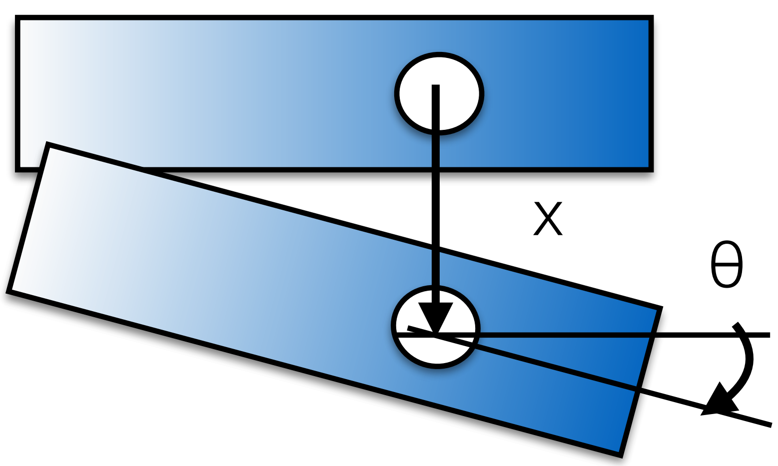
..ed in funzione di quello che si vuole studiare…

Coordinate



In funzione della scelta delle coordinate cambiano le equazioni del moto, e le matrici del sistema!

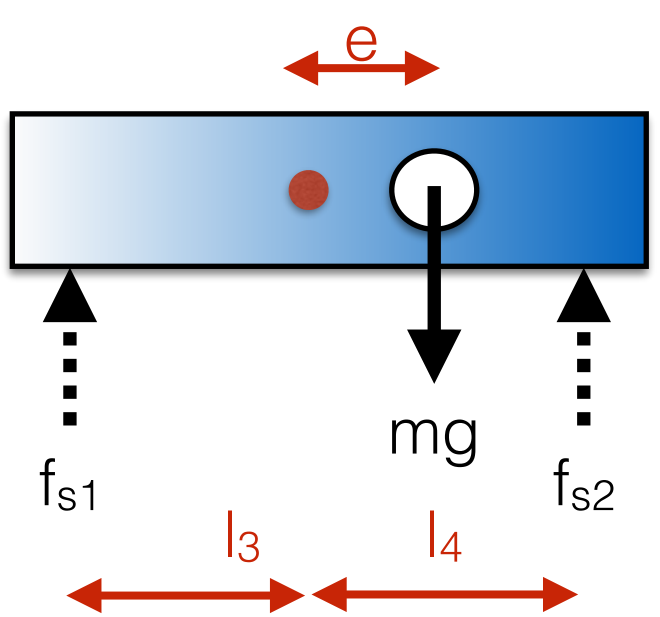
Scelta 1
x abbassamento baricentro
θ rotazione attorno al baricentro



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

matrice di massa diagonale
matrice di rigidezza non diagonale
> accoppiamento STATICO

Coordinate



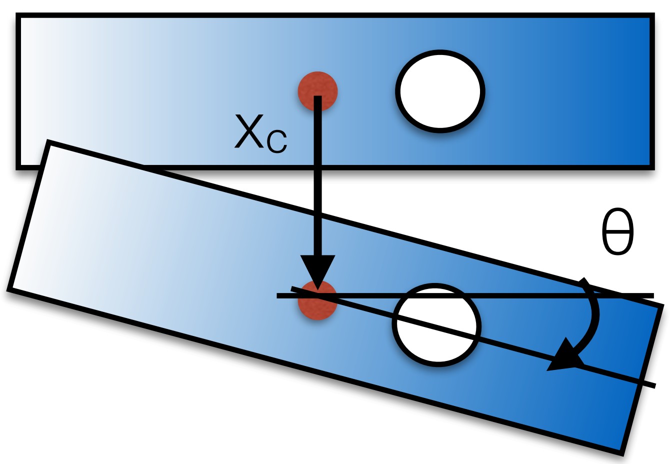
Centro elastico: punto di equilibrio dei momenti delle forze applicate

$$l_3 k_1 = l_4 k_2$$

Scelta 2

x_c abbassamento centro elastico

θ rotazione attorno al centro elastico



$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_{ce} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_3^2 - k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

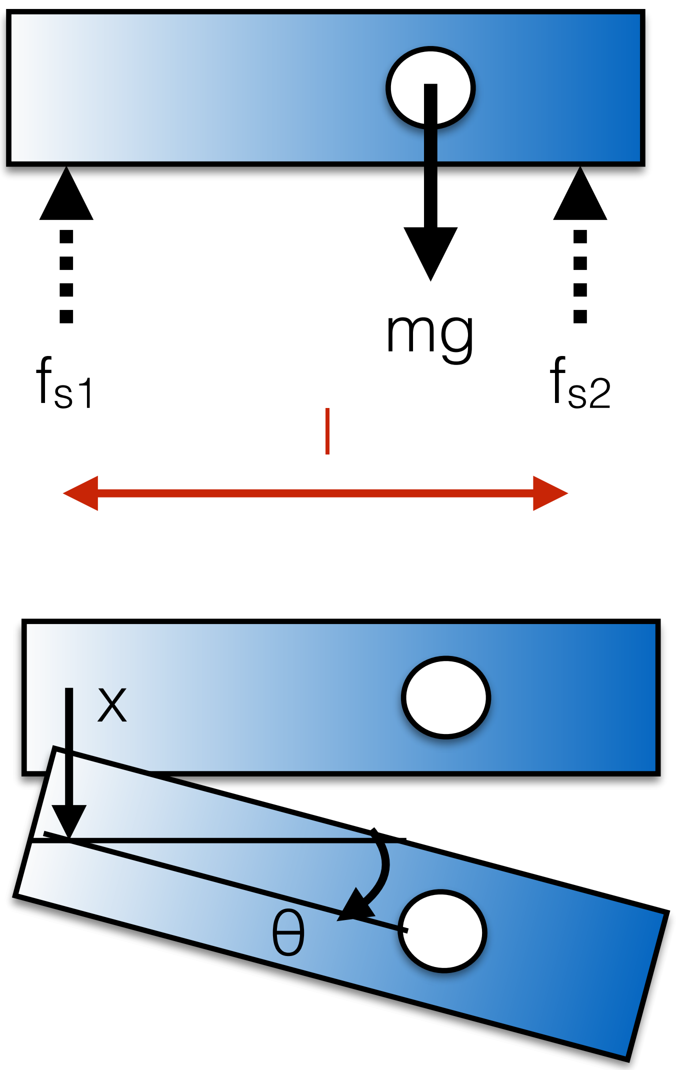
matrice di massa non diagonale

matrice di rigidezza diagonale

> accoppiamento DINAMICO

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Coordinate



Scelta 3
x abbassamento vincolo 1
θ rotazione attorno vincolo 1

$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

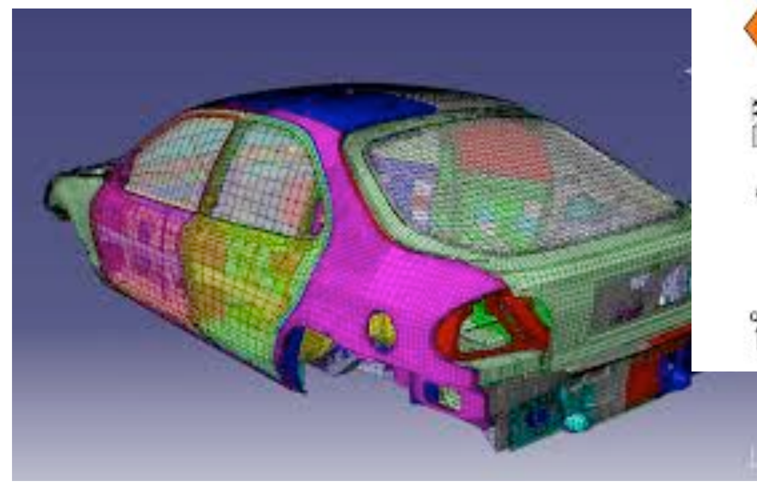
matrice di massa non diagonale
matrice di rigidezza non diagonale
> accoppiamento STATICO e DINAMICO

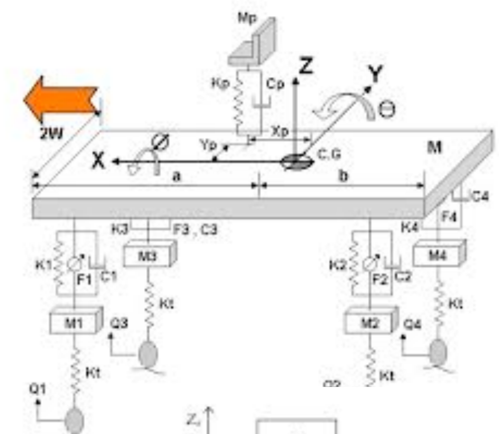
NB le matrici di massa e di rigidezza sono comunque SIMMETRICHE !
(per il principio di Maxwell)

Coordinate

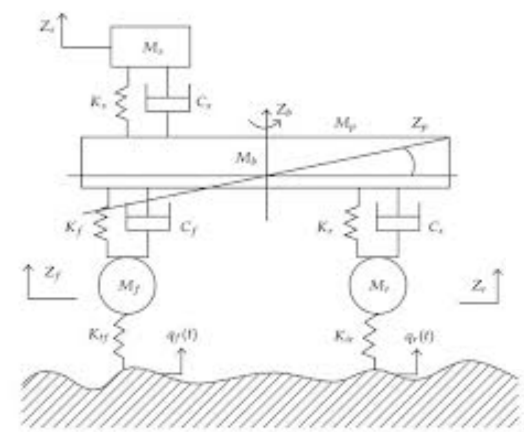
Sistemi Continui

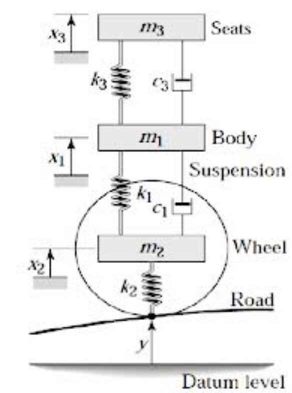
..semplificare!



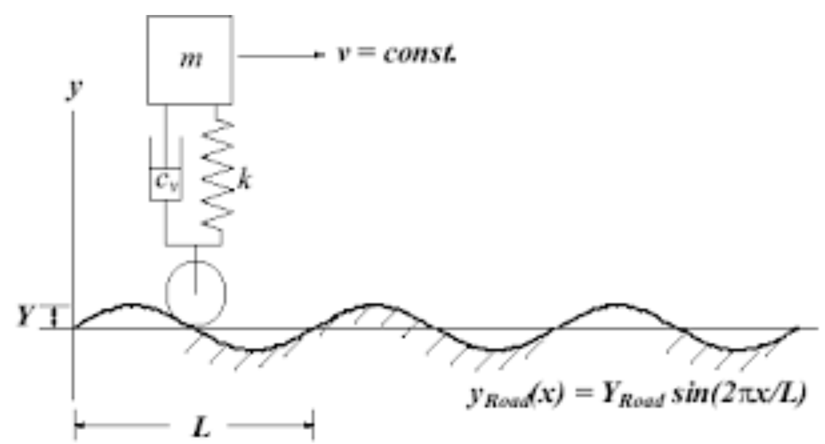


Sistemi MDOF





..semplificare!



Sistemi SDOF

La scelta della rappresentazione determina i risultati ottenibili!

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Accelerazione

Velocità

Spostamento

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Problema1: scrittura delle equazioni del moto..

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Approccio Newtoniano

Diagramma di corpo libero

Equilibrio delle Forze / Momenti

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$\sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

Approccio Energetico

Principio Lavori Virtuali

Equilibrio Lavoro per ogni spostamento virtuale

$$\delta W' = \delta W_{\substack{forze\\reali}} + \delta W_{\substack{forze\\inerzia}} = 0$$

Metodo Lagrangiano

Calcolo En. Cinetica e Potenziale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{noncons}}$$

Problema2: risoluzione delle equazioni del moto..

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Equazioni del moto
in coordinate fisiche

Integrazione
ODE nel tempo

Funzione di
Trasferimento

Zeri, Poli e
Guadagni

Rappresentazione
Modale

$$\begin{cases}\{x\}=[\phi]\{q\}\\ [m][\phi]\{\ddot{q}\}+[c][\phi]\{\dot{q}\}+[k][\phi]\{q\}=\{f\}\end{cases}$$

Stato
Spazio

$$\begin{cases}\{\dot{x}\}=[A]\{x\}+[B]\{u\}\\ \{y\}=[C]\{x\}+[D]\{u\}\end{cases}$$

…forniscono soluzioni nel dominio del tempo e della frequenza

Scritte le equazioni del moto..bisogna risolverle !
Il che significa:

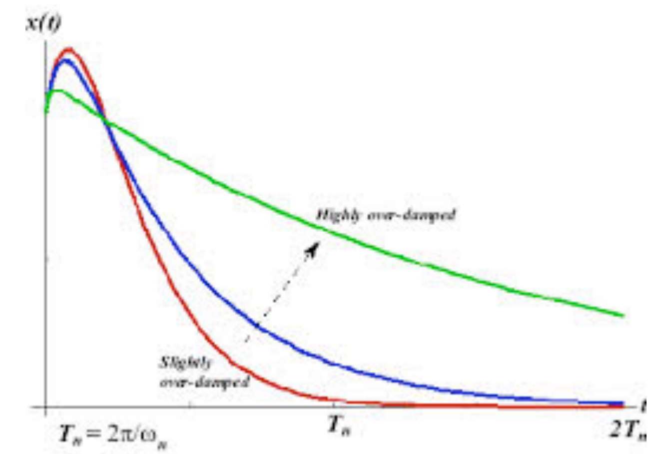
- trovare l'andamento della coordinata libera

(nel dominio del tempo, della frequenza, degli stati..)

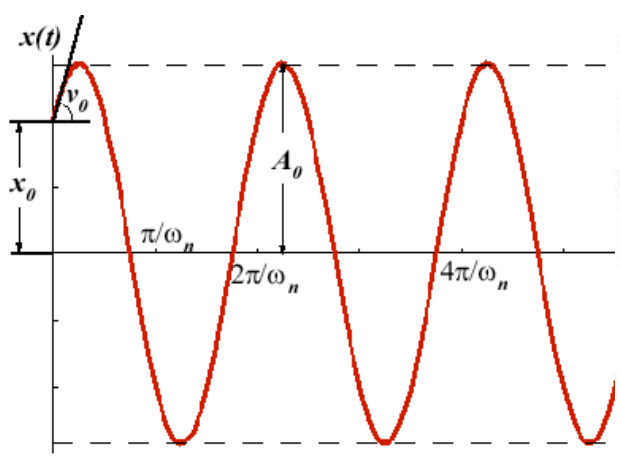
- in funzione, dei parametri del modello,
- delle condizioni iniziali,

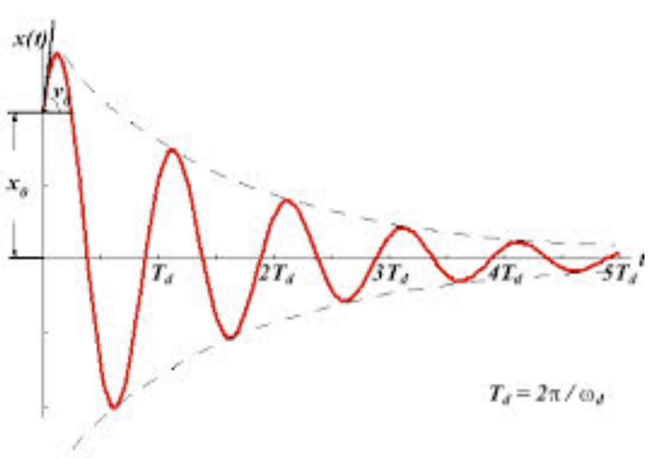
(eq.diff II ordine > 2 condizioni iniziali…spostamento e velocità)

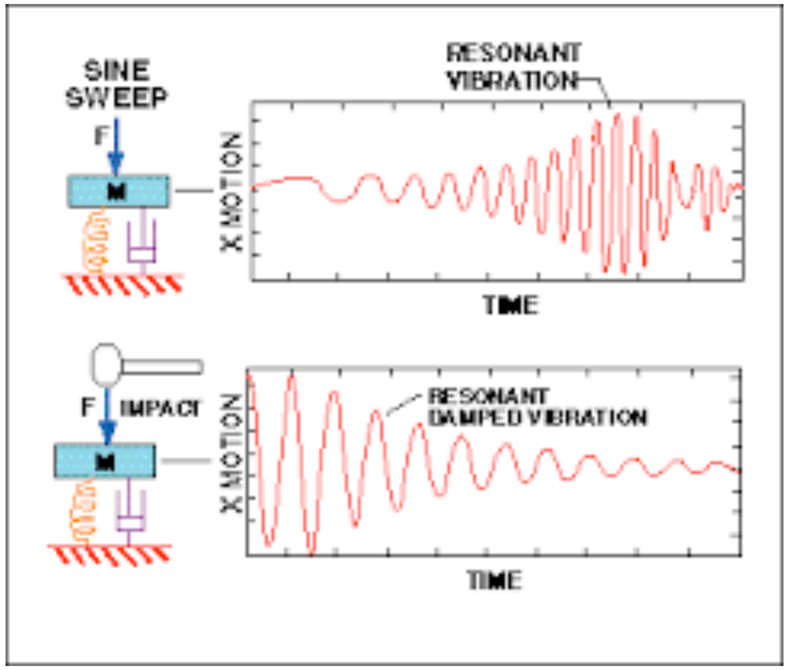
- delle forzanti applicate,



in forma chiusa / risoluzione numerica



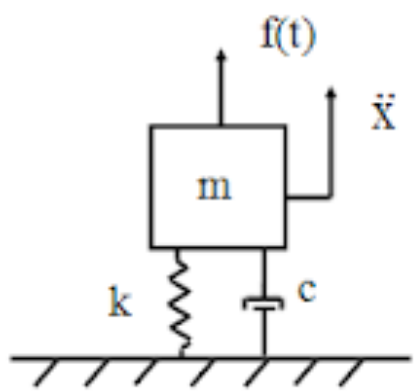


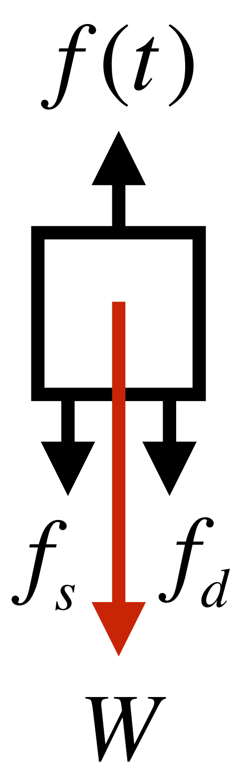


Approccio Newtoniano

Si usa la seconda legge di Newton..
(in equilibrio la sommatoria delle forze è nulla,
nel caso dinamico si inseriscono le forze d'inerzia)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$





- si definisce la coordinata libera ed il verso positivo,
- si traccia il diagramma di corpo libero con le forze agenti
- si scrive la relazione di equilibrio delle forze agenti..

$$f(t) - f_s - f_d - W = m\ddot{x}$$

sostituendo l'espressione delle varia forze agenti :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) - W \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

> eq. diff II ordine, non omogenea
lineare, a coefficienti costanti

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Tralasciamo il cedimento statico x_s, ci interessa l'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio

$$x_s = \frac{W}{k}$$

La soluzione delle eq. diff. sarà
una combinazione della soluzione omogenea (…=0)
e della soluzione particolare (..=f(t))

$$x = x_o + x_p$$

Es.soluzione omogenea sistema smorzato con c.i. spost e vel

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

.. come si arriva
sin qui lo sapete già!

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{c_c} \qquad c_c = 2\sqrt{km} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)-W$$

Considero l'equazione omogenea,
senza forzanti, senza cedimento statico,

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

divido per m,

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0$$

sostituisco una soluzione generale
e sue derivate,

$$x=Ce^{st}\,,\dot{x}=sCe^{st}\,,\ddot{x}=s^2Ce^{st}$$

questa deve valere per ogni valore di t,

$$\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)Ce^{st}=0$$

$$\left(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2\right)=0$$

equazione caratteristica di cui trovo
gli zeri,

$$s_{1,2}=\frac{-2\zeta\omega_n\pm\sqrt{\left(2\zeta\omega_n\right)^2-4\omega_n{}^2}}{2}$$

da sostituire nella soluzione generale,

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

C_1 e C_2 dipendono dalle c.i.

$$x(t)=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}$$

$$x_1 = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t)+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n t}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

Formula generalizzata!

A questa si può aggiungere la soluzione particolare, in funzione della forzante f_1

NB un sistema SDOF, ha 2 soluzioni tra loro complesse coniugate

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad x_1 = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Se le plottiamo su un piano complesso possiamo vedere come cambiano al variare dello smorzamento :

$\zeta = 0$ $\quad \boxed{s_{1,2} = \pm j\omega_n}$ $\quad$ smorzamento nullo

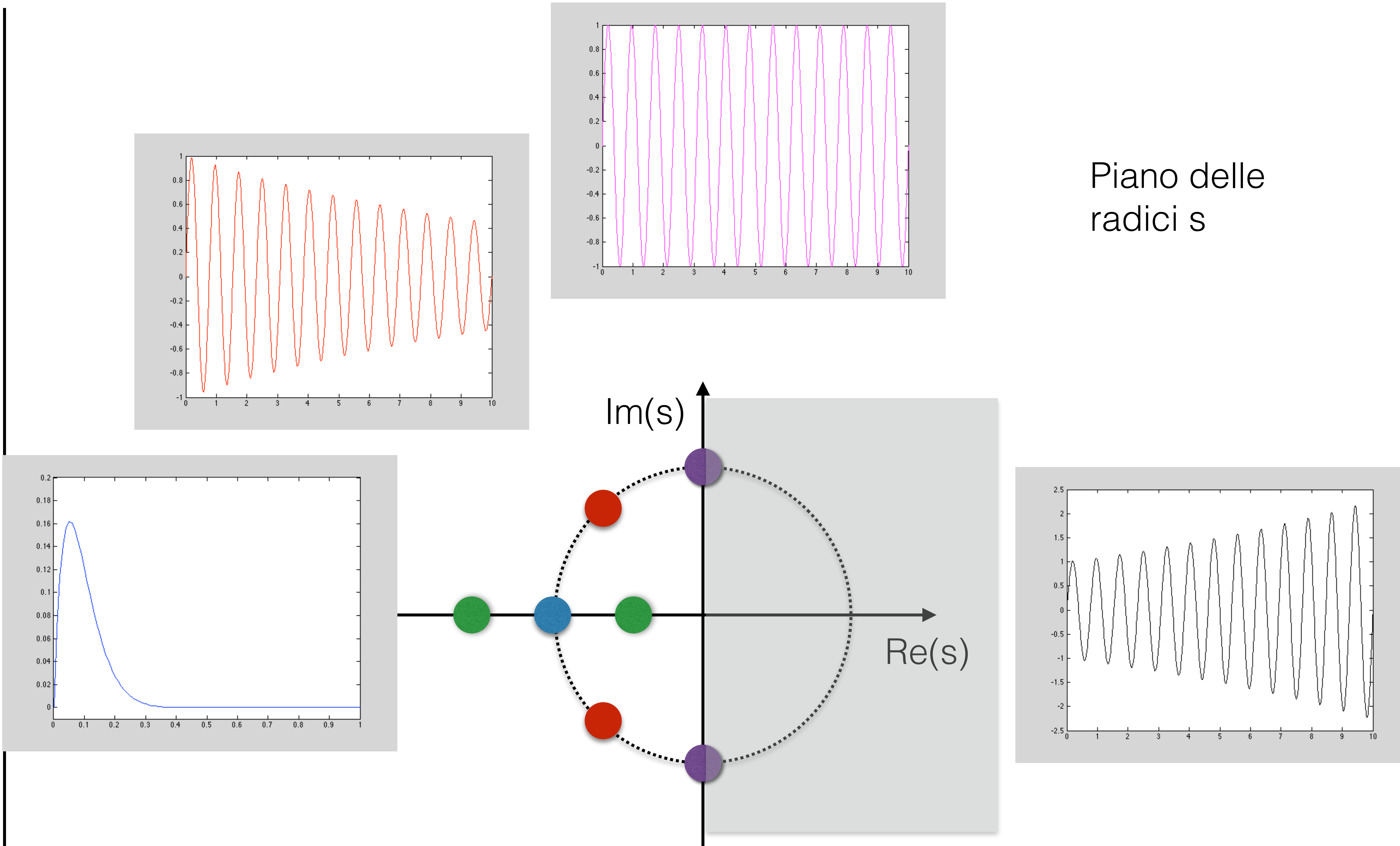
$\zeta < 1$ $\quad \boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d}$ $\quad$ smorzamento ipocritico

$\zeta = 1$ $\quad \boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n}$ $\quad$ smorzamento critico

$\zeta > 1$ $\quad \boxed{s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega^*}$ $\quad \omega^* = \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ $\quad$ smorzamento ipercritico

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1\cosh(\omega^* t) + C_2\sinh(\omega^* t)\right]$$

Piano delle radici s



Luigi BREGANT
bregant@units.it

Approccio Newtoniano - Torsionale

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \cdots\cdots\rightarrow \quad \sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta = M$$

Vogliamo considerare le vibrazioni di un motore aeronautico, sospeso sotto l'ala…

$$-M_0 - WL\sin\theta = J_o\ddot{\theta}$$

$$M_0 = k_\theta\theta$$

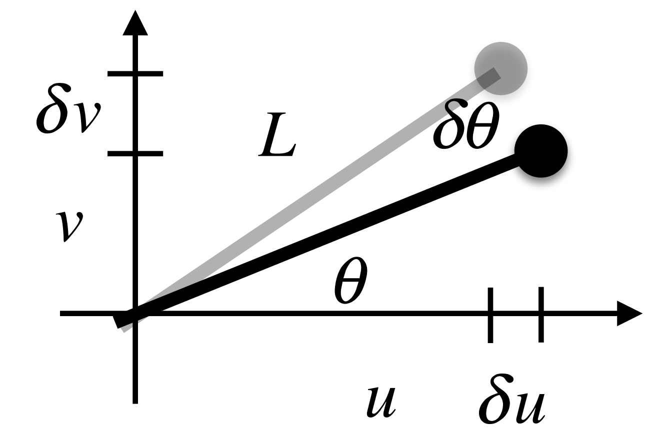
$$J_0 = J_g + mL^2$$

$$\left(J_g + mL^2\right)\ddot{\theta} + k_\theta\theta + WL\sin\theta = 0$$

Approccio Lavori Virtuali

coordinata : quantità che descrive una configurazione del sistema;

vincolo : limite cinematico sulle configurazioni del sistema;



coordinate generalizzate : un set di spostamenti lin. indipendenti, congrui ai vincoli capace, di descrivere ogni configurazione del sistema (q_i);

spostamento virtuale : un infinitesimo spostamento di configurazione del sistema permesso dai vincoli (δq_i)

lavoro virtuale : lavoro delle forze applicate al sistema quando sottoposto ad uno spostamento virtuale

forze generalizzate : quei moltiplicatori di δq_i che forniscono il lavoro virtuale di δq_i (qualora $\delta q_i=1$ e $\delta q_j=0$ per ogni i diverso da j)

$$\delta W = \sum_{i=i}^{N} Q_i \delta q_i$$

principio dei lavori virtuali: per qualsiasi spostamento virtuale del sistema la somma dei lavori virtuali delle forze applicate e di quelle d'inerzia è nullo

$$\delta W' = \delta W_{\substack{forze\\reali}} + \delta W_{\substack{forze\\inerzia}} = 0$$

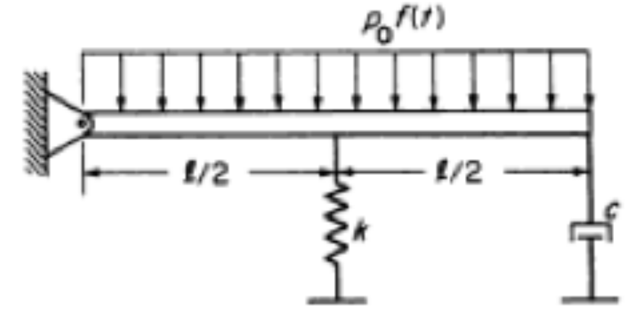
$$\delta W_{\substack{forze\\inerzia}} = -\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta}\delta\theta$$

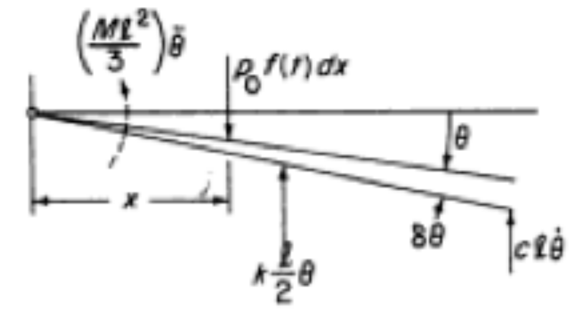
$$\delta W_{\substack{forze\\smorzamento}} = -\left(cL\dot{\theta}\right)L\delta\theta$$

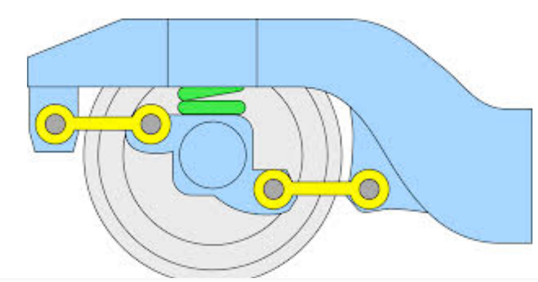
$$\delta W_{\substack{forze\\rigidezza}} = -\left(k\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2}\delta\theta$$

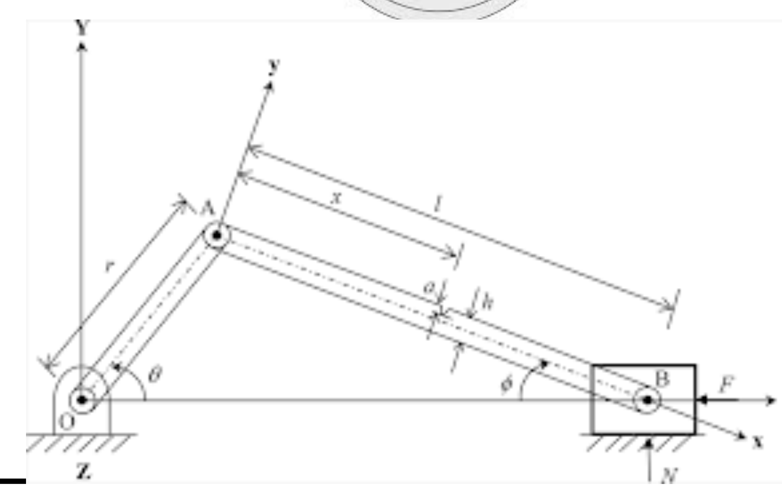
$$\delta W_{\substack{forze\\carico}} = \int_0^L p_o f(t)x\,dx\delta\theta = p_o f(t)\frac{L^2}{2}\delta\theta$$

$$\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta} + \left(cL^2\right)\dot{\theta} + \left(k\frac{L^2}{4}\right)\theta = p_o\frac{L^2}{2}f(t)$$









Conviene usare questi approccio quando ci sono forze distribuite, o per studiare sistemi complessi

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Approccio Energetico

(generalizzazione principio di D'Alambert / dal principio di Hamilton)

Si considerano quantità scalari e nonpiù vettoriali:
Energia Cinetica (T) e Energia Potenziale (V),
da cui si costruisce il Lagrangiano (L)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{noncons}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

eq. del moto di Lagrange
in forma generale

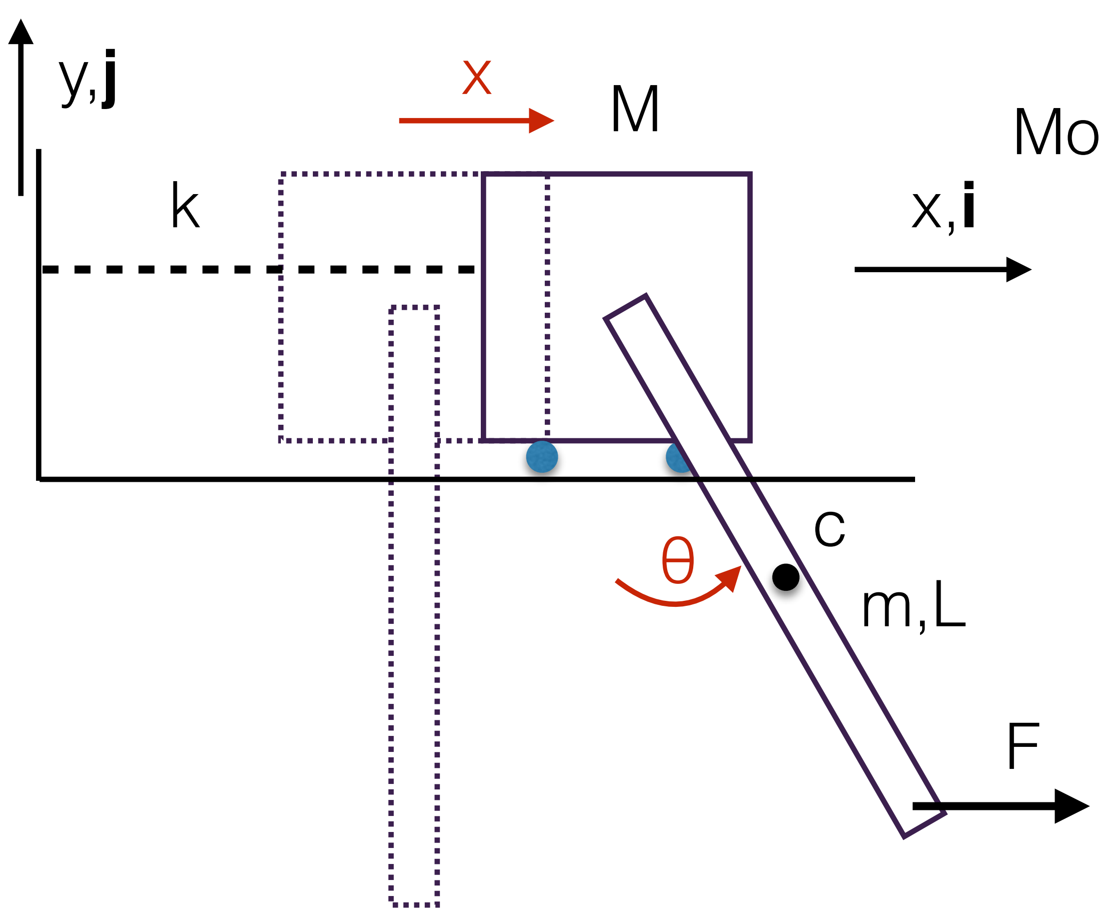
Consideriamo un sistema considerato da una massa M, collegato al mondo esterno con una molla di rigidezza k, alla massa è collegato un pendolo ed una forza F…

Energia Cinetica $$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v_c \bullet v_c + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

Energia Potenziale $$V = \frac{1}{2} k x^2 + mg \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

Velocità v_c $$v_c = \left(\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \right)\vec{i} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\vec{j}$$

Momento Inerzia J_c $$J_c = \frac{mL^2}{12}$$



..con le opportune sostituzioni si valuta il Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}^2 + mL\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{3} mL^2\dot{\theta}^2 \right] +$$
$$- \frac{1}{2} k x^2 - mg \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

..si effettuano poi tutte le derivate rispetto alle coordinate ed alle loro derivate:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + \frac{1}{2}mL\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}mL\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}$$

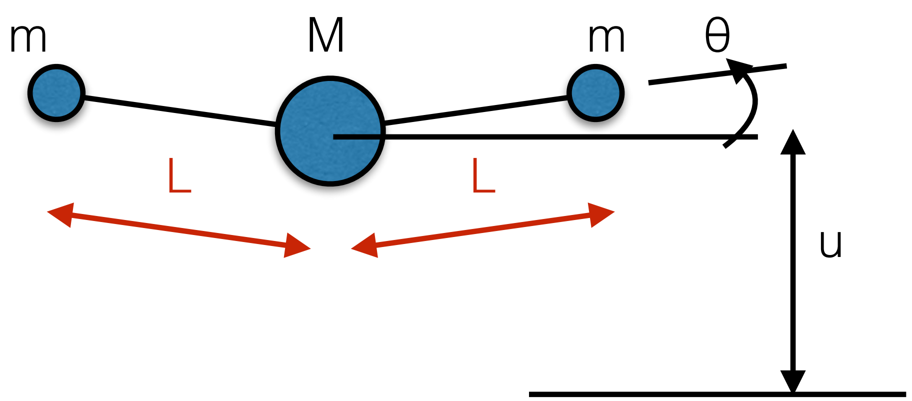
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgL\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{k_{noncons}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(M+m)\dot{x} + \frac{1}{2}mL\dot{\theta}\cos\theta\right] + kx = F$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{6}mL(3\dot{x}\cos\theta + 2L\dot{\theta}\right] + \frac{1}{2}mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}mgL\sin\theta = FL\cos\theta$$

Un altro esempio..



..coordinate lagrangiane..

$$\begin{cases} q_1 = u \\ q_2 = \theta \end{cases}$$

..energia cinetica del sistema..

$$T = \frac{1}{2} M\dot{u}^2 + 2\left[\frac{1}{2} m\dot{y}_m^2\right]$$

$$y_m = u + L\sin\theta \simeq u + L\theta$$ ..piccoli spostamenti

$$T = \frac{1}{2} M\dot{u}^2 + m\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)^2$$

..energia potenziale elastica..

$$V = 2\frac{1}{2} k\theta^2$$

Eq. Lagrange..

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$

Approccio lagrangiano

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} + 2m\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2mL\left(\dot{u} + L\dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\theta$$

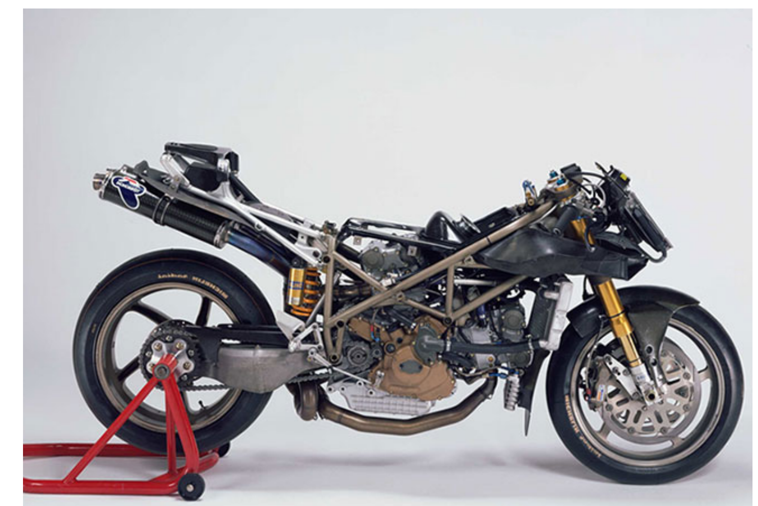
$M\ddot{u} + 2m\left(\ddot{u} + L\ddot{\theta}\right) = 0$ rispetto q_1

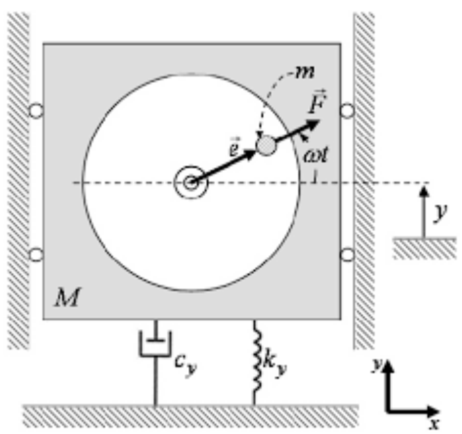
$2mL\left(\ddot{u} + L\ddot{\theta}\right) + 2k\theta = 0$ rispetto q_2

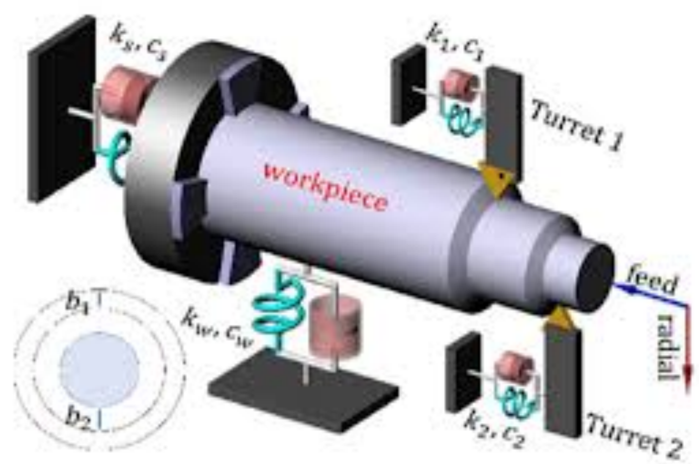
$$\begin{bmatrix} M+2m & 2mL \\ 2mL & 2mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

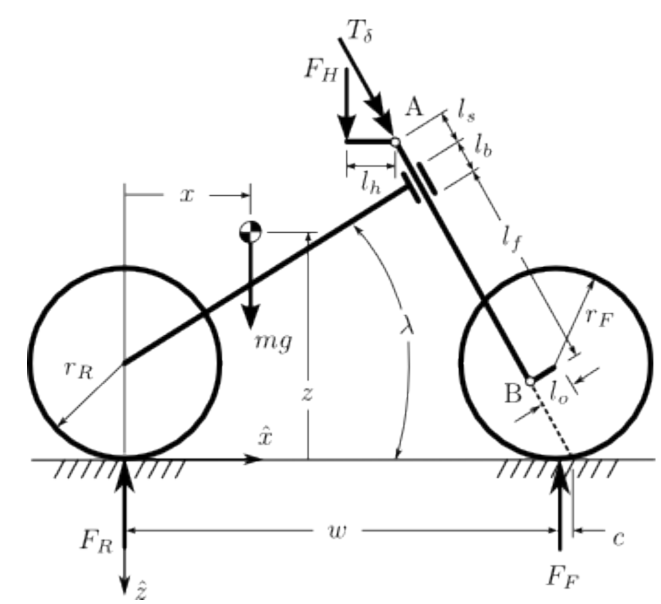
..matrice di rigidezza singolare!
(ordine diverso da rango)
…moto di corpo rigido!

Bisogna abituarsi a semplificare i sistemi reali, in modelli a pochi gradi di libertà, che evidenziano solo il fenomeno che vi interessa trascurando gli effetti secondari (se trascurabili)









Stesso modello
per sistemi diversi!

I procedimenti non cambiano se il sistema da studiare ha più gradi di libertà! bisogna solo scrivere più equazioni del moto!!