meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 2
risoluzione sistemi
SDOF MDOF

Problema2: risoluzione delle equazioni del moto..

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Equazioni del moto
in coordinate fisiche

Integrazione
ODE nel tempo

Funzione di
Trasferimento

Zeri, Poli e
Guadagni

Rappresentazione
Modale

$$\begin{cases} \{x\}=[\phi]\{q\} \\ [m][\phi]\{\ddot{q}\}+[c][\phi]\{\dot{q}\}+[k][\phi]\{q\}=\{f\} \end{cases}$$

Stato
Spazio

$$\begin{cases} \{\dot{x}\}=[A]\{x\}+[B]\{u\} \\ \{y\}=[C]\{x\}+[D]\{u\} \end{cases}$$

…forniscono soluzioni nel dominio del tempo e della frequenza

Soluzioni nel dominio del tempo

Una volta scritte le equazioni differenziali del moto, $[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$
bisogna risolverle.. trovare l'andamento
(nel tempo) della variabile indipendente x(t)

L'equazione differenziale può avere una soluzione
esprimibile in forma chiusa..
(è facile visualizzarla f.e in matlab)

$$x_1 = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t)+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n t}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

ma esistono casi in cui la soluzione
in forma chiusa non è disponibile
bisogna trovare una soluzione numerica…approssimata*

*approssimata :
dipende dal metodo di integrazione**
dipende dal passo di integrazione

** approccio
Newton-Cotes
Gaussiano

Esempio soluzione in forma chiusa:

```
t=0:.01:5;
```
definisco la base dei tempi

```
omegan=2*pi*2;
csi=0.2;
omegad=omegan*sqrt(1-csi^2);
```
calcolo le costanti del sistema

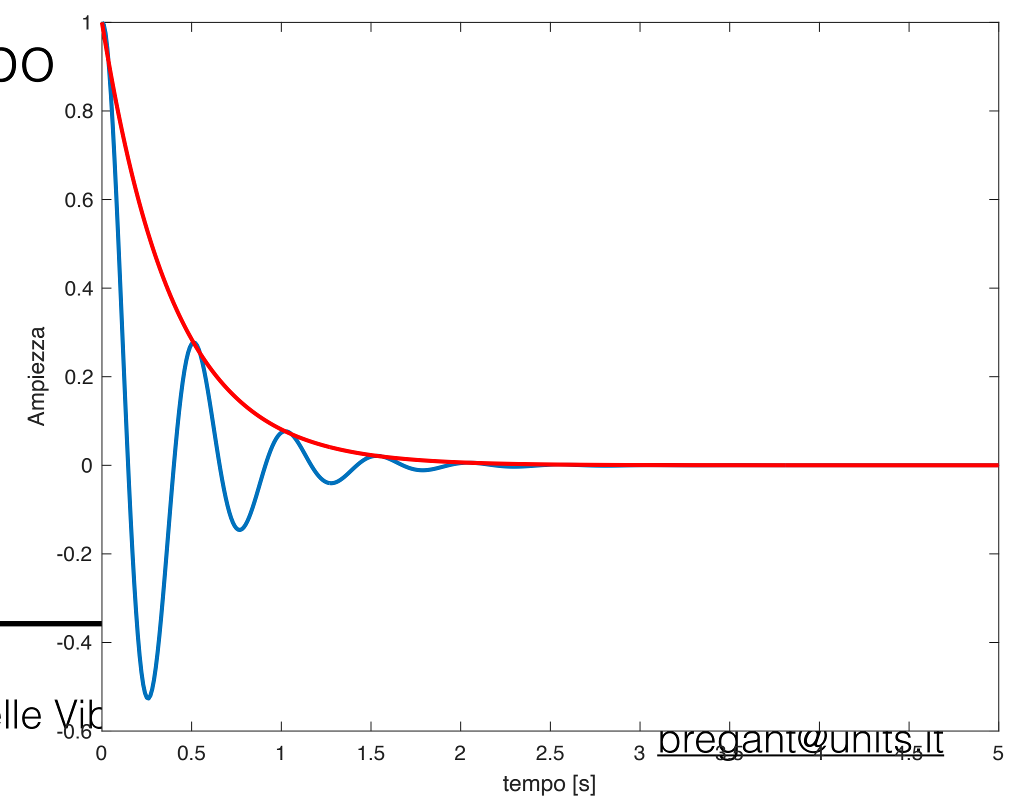
```
x0=1;
xdot0=.3;
```
definisco le condizioni iniziali per spostamento e velocità

```
A=x0;
B=(xdot0+csi*omegan*x0)/omegad;
```
calcolo le costanti della risposta

```
x=exp(-csi*omegan*t).*(A.*cos(omegad*t)+B.*sin(omegad*t));
```
calcola risposta nel tempo

```
plot(t,x)
hold
```
plotto la risposta

```
plot(t,exp(-csi*omegan*t),'r')
```
plotto l'inviluppo

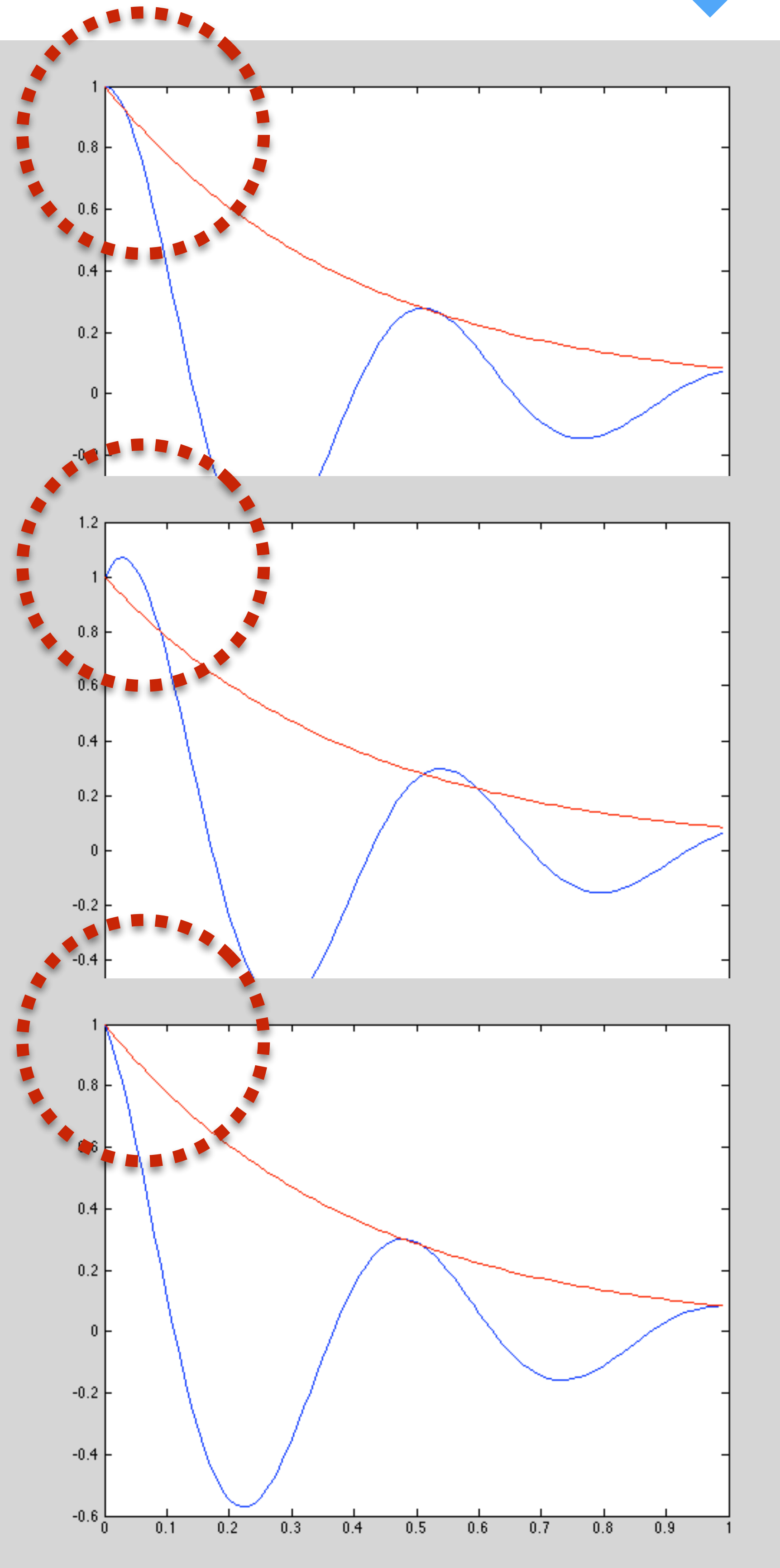


$$x_1 = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0\cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n t}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)\right]$$

la risposta dipende dalle condizioni iniziali

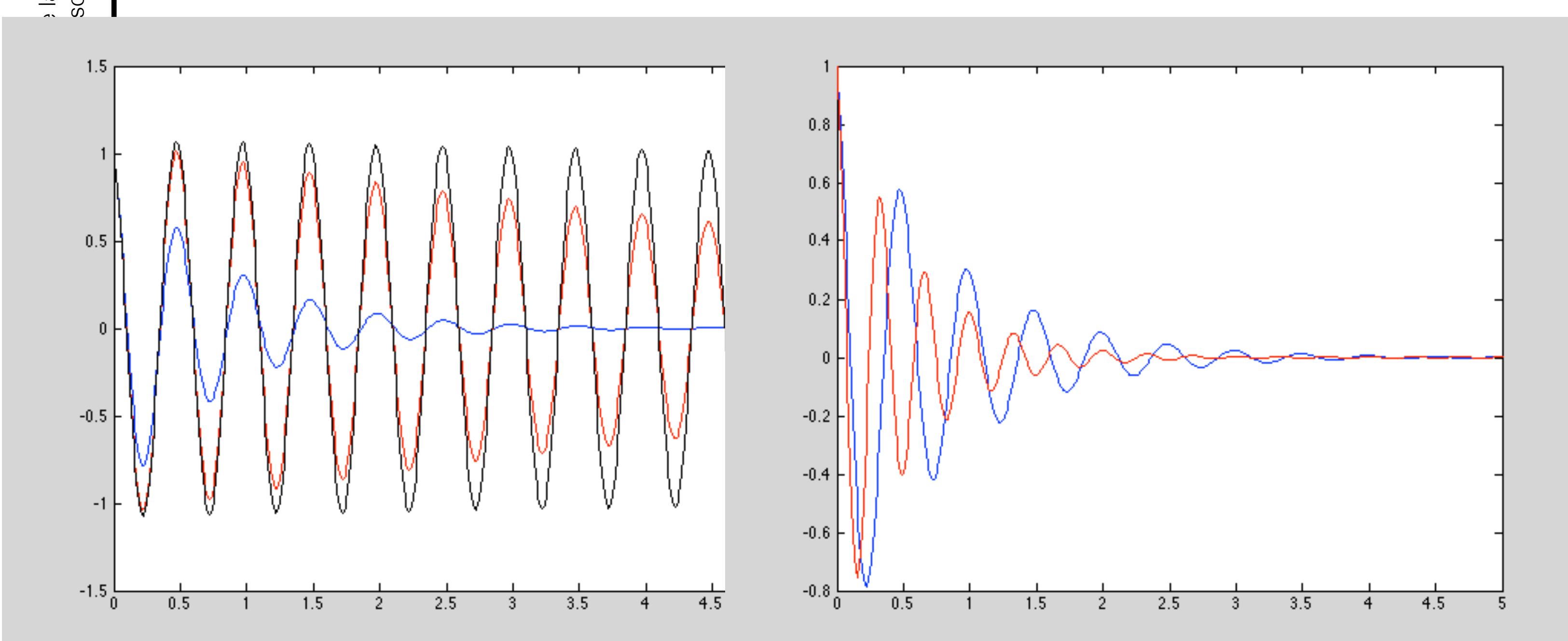
```
figure
plot(t(1:100),x(1:100))
hold
plot(t(1:100),exp(-csi*omegan*t(1:100)),'r')
```

plotta primi 100 punti



E' facile verificare l'influenza sulla risposta di:

- frequenza di oscillazione (dipende da m e k)
- fattore di smorzamento (dipende da c m e k)
- condizioni iniziali
- ..



bregant@units.it

Esempio soluzione in forma numerica:

Come utilizzare il comando ode45 per risolvere equazioni differenziali (ODE):

NB ode 45 è uno dei solutori disponibili (vedi pagina seguente)..
non è detto sia quello più adatto a risolvere il problema!
verificare sul cosa più funzionare meglio per il sistema che star analizzando!.

Cominciamo con un eq. differenziale del primo ordine, omogenea

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

isoliamo il termine con la derivata più alta

$$\frac{dy}{dt} = -2y \qquad f = inline('-2*y','t','y')$$

(inline non è raccomandato)

definiamo una funzione per questa equazione differenziale

source: sharetechnote.com

Da Matlab Documentation>
Numerical Integration and Differential Equations>
Ordinary Differential Equations >
Chose an ODE solver

Solver	Problem Type	Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. ode45 should be the first solver you try.
ode23		Low	ode23 can be more efficient than ode45 at problems with crude tolerances, or in the presence of moderate stiffness.
ode113		Low to High	ode113 can be more efficient than ode45 at problems with stringent error tolerances, or when the ODE function is expensive to evaluate.
ode15s	Stiff	Low to Medium	Try ode15s when ode45 fails or is inefficient and you suspect that the problem is stiff. Also use ode15s when solving differential algebraic equations (DAEs).
ode23s		Low	ode23s can be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances. It can solve some stiff problems for which ode15s is not effective. ode23s computes the Jacobian in each step, so it is beneficial to provide the Jacobian via odeset to maximize efficiency and accuracy. If there is a mass matrix, it must be constant.
ode23t		Low	Use ode23t if the problem is only moderately stiff and you need a solution without numerical damping. ode23t can solve differential algebraic equations (DAEs).
ode23tb		Low	Like ode23s, the ode23tb solver might be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances.
ode15i	Fully implicit	Low	Use ode15i for fully implicit problems $f(t,y,y') = 0$ and for differential algebraic equations (DAEs) of index 1.

Nonstiff Vs Stiff

..Generally stiffness can be described as having time constants in a model that vary by several orders of magnitude..

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

$f = inline('-2*y','t','y');$ la funzione dipende da 't' e da 'y'

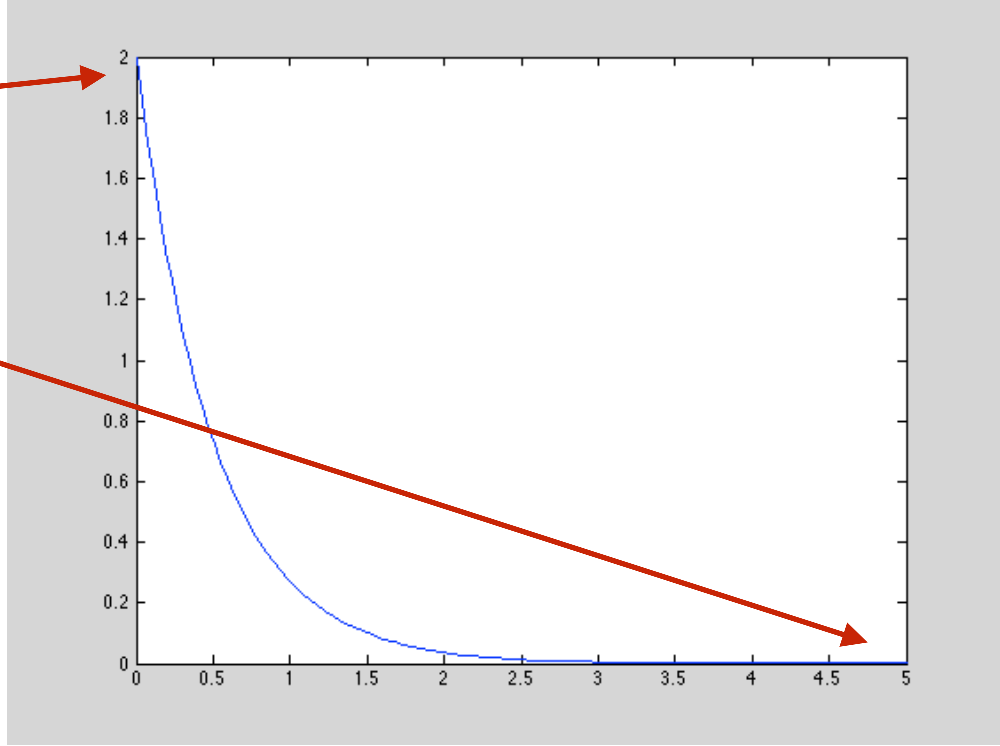
$[t,y] = ode45(f,[0\ 5],2,odeopt);$

la funzione

l'intervallo di tempo
su cui calcolare la soluzione

le condizioni iniziali

le opzioni di soluzione



cut and paste in Matlab

```
f = inline('-2*y','t','y');
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(f,[0 5],2,odeopt);
plot(t,y)
```

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{L}\right)sen\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{L}\right)\theta=0$$

Come si integra **l'equazione del pendolo**,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin(\theta)=0$$

Si isola il termine con la derivata più alta con $\omega^2=\frac{g}{l}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\sin(\theta) \quad \bigstar$$

Si effettua una sostituzione di variabili $\theta=y_1$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{dy_1}{dt}=y_2 \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{dy_2}{dt}$$

Si riscrive l'equazione di ordine2 $\bigstar$
con due equazioni di ordine1

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_2\\[2ex]\dfrac{dy_2}{dt}=-\omega^2 sin(y_1)\end{cases}$$

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

definiamo una funzione per queste due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\omega^2 sin(y_1) \end{cases}$$

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \\ -\omega^2 \sin(y_1)];$$

$$[t,y] = ode45(dy\_dt,[0\ 25],[0.0\ 1.0],odeopt);$$

la funzione

l'intervallo di tempo
su cui calcolare la soluzione

le condizioni iniziali (due, per y_1 e per y_2)

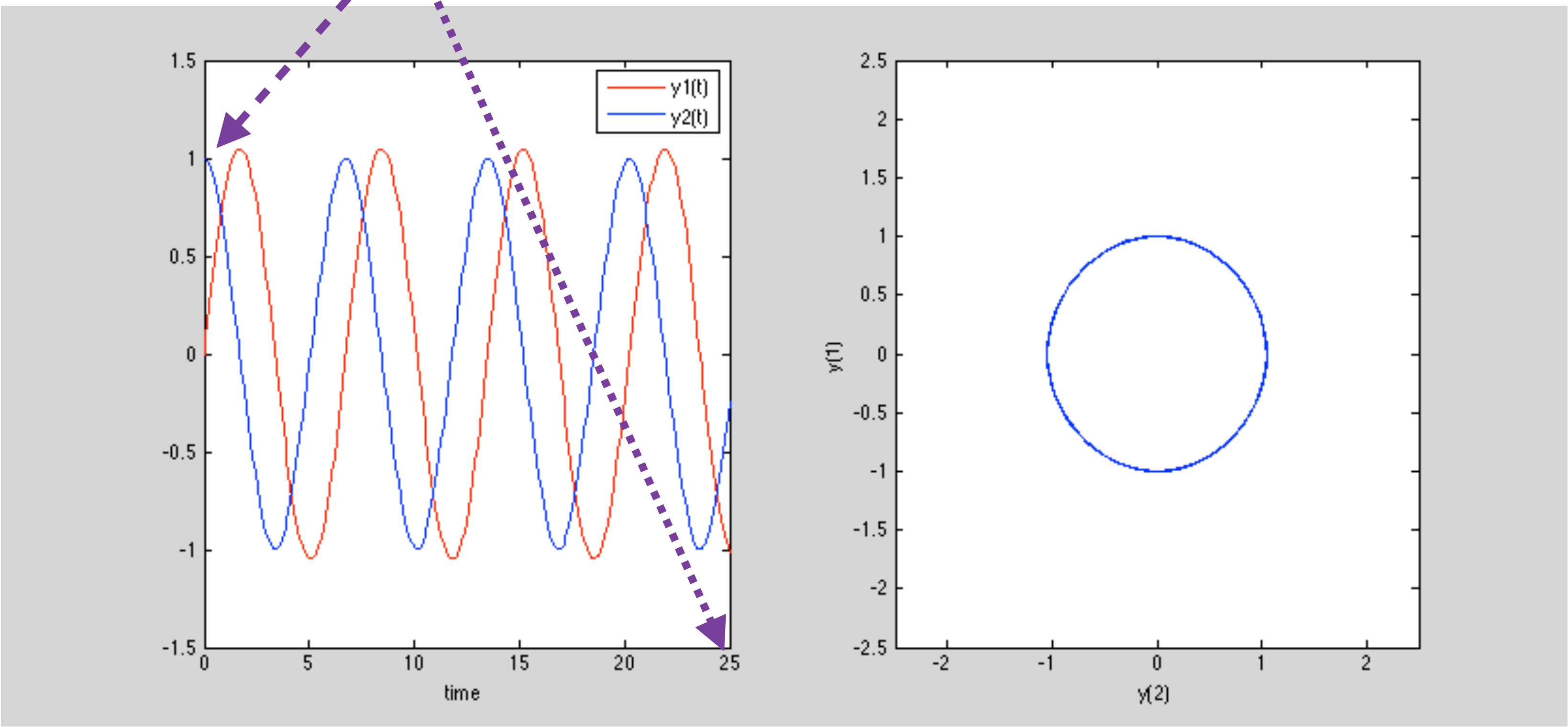
le opzioni di soluzione

NB y è un vettore,. contiene y_1 e y_2

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

cut and paste in Matlab

```
omega = 1;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                -omega.^2*sin(y(1))];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 25], [0.0 1.0],odeopt);
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-');xlabel('time'); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-'); axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5]); xlabel('y(2)');ylabel('y(1)');
```



..con questa struttura si possono analizzare tutte le possibili combinazioni di rapporto g/L, di condizioni iniziali, di durata, ..

La medesima struttura e procedura si applica a sistemi differenti:

sistema massa molla non smorzato..

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{k}{m}y_1 \end{cases}$$

sistema massa molla smorzato..

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{c}{m}y_2-\dfrac{k}{m}y_1 \end{cases}$$

sistema massa molla smorzatore forzato..

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_o}{m}\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{c}{m}y_2-\dfrac{k}{m}y_1+\dfrac{F_0}{m}\sin(\omega t) \end{cases}$$

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

sistema massa molla non smorzato..

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \quad -\frac{k}{m}y_1];$$

sistema massa molla smorzato..

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \quad -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1];$$

sistema massa molla smorzatore forzato..

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \quad -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1 + \frac{F_o}{m}\sin(\omega t)];$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

sistema massa molla non smorzato..

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \\ -\frac{k}{m}y_1];$$

sistema massa molla smorzato..

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \\ -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1];$$

sistema massa molla smorzatore forzato..

$$dy\_dt = @(t,y)[y_2; \\ -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1 + \frac{F_o}{m}\sin(\omega t)];$$

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

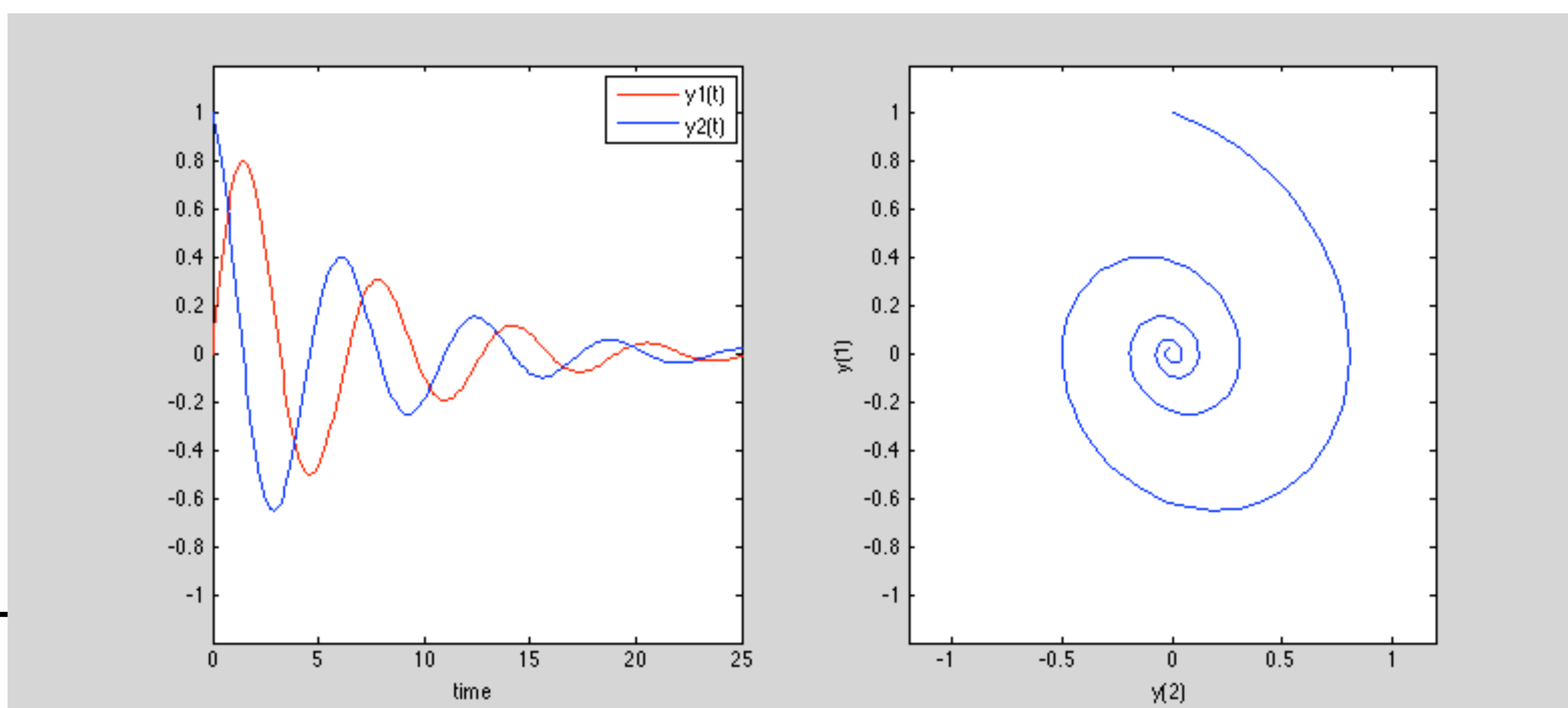
..e si risolve con la stessa equazione!:

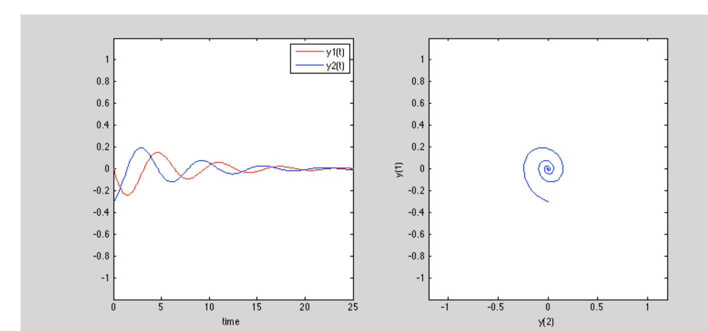
$$[t,y]=ode45(dy\_dt,[0\ 25],[0.0\ 1.0],odeopt);$$

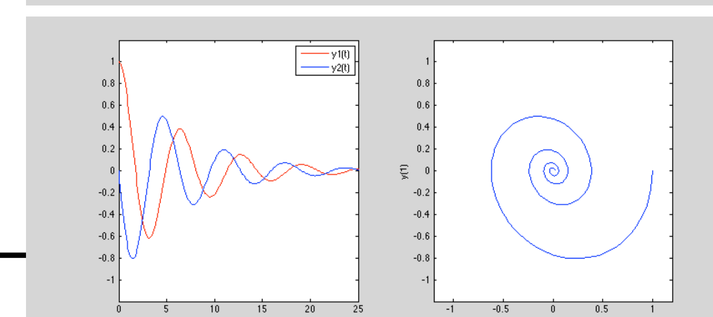
cut and paste in Matlab

sistema massa molla smorzato..

```
m = 1; k = 1; c = 0.3;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
              -(c/m) * y(2) - (k/m) * y(1) ];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 25], [0.0 1.0],odeopt);
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-'); xlabel('time'); ylim([-1.2 1.2]); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-'); xlabel('y(2)');ylabel('y(1)'); xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
```







Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

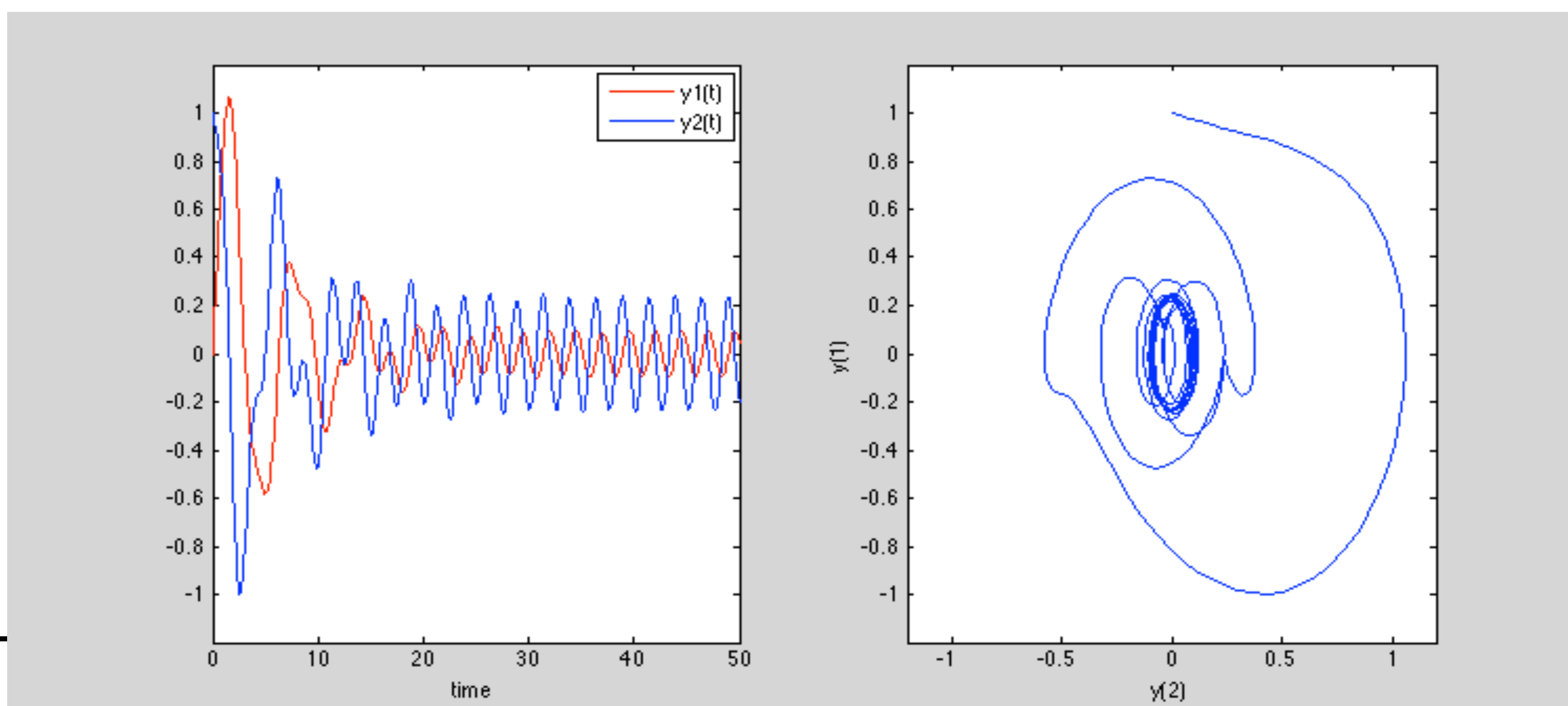
..e si risolve con la stessa equazione!:

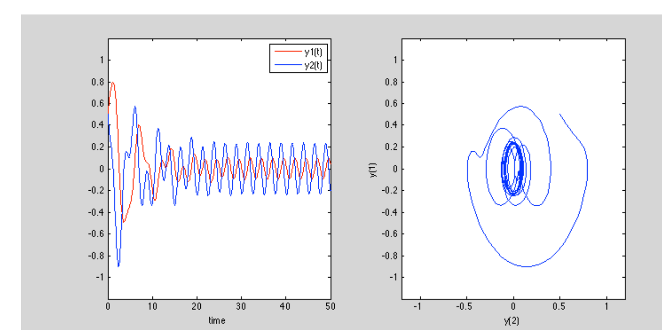
$$[t,y] = ode45(dy\_dt,[0\ 25],[0.0\ 1.0],odeopt);$$

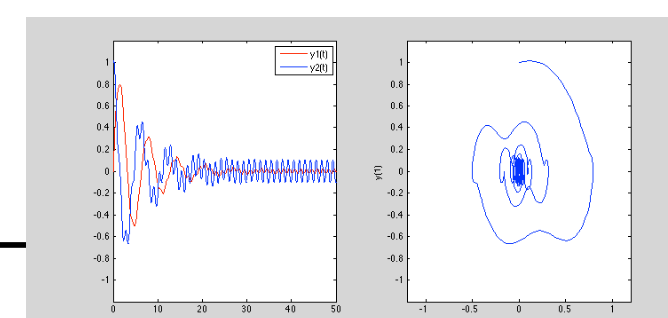
sistema massa molla smorzato forzato..

cut and paste in Matlab

```
m = 1; k = 1; c = 0.3;
F0 = 0.5; w = 2.5;
dy_dt = @(t,y) [y(2);...
                    -(c/m) * y(2) - (k/m) * y(1) + (F0/m) * sin(w*t)];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 50], [0.0 1.0],odeopt);
subplot(1,2,1);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-'); xlabel('time'); ylim([-1.2 1.2]); legend('y1(t)','y2(t)');
subplot(1,2,2);plot(y(:,1),y(:,2),'b-'); xlabel('y(2)');ylabel('y(1)'); xlim([-1.2 1.2]); ylim([-1.2 1.2]);
```







Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

..anche se l'equazione diventa più complessa .. non lineare.. es oscillatore di Duffing

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+\left(\beta x^3+\omega_0^2 x\right)=\gamma\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

(es. pendolo in cui la rigidezza della fune varia non sodisfando la legge di Hook)

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-\delta y_2-(\beta y_1^3+\omega_0^2 y_1)+\gamma cos(\omega t+\phi)\end{cases}$$

$$dy\_dt=@(t,y)[y_2;$$

$$-\delta y_2-\left(\beta y_1^3+\omega_0^2 y_1\right)+\gamma\cos\left(\omega t+\phi\right)];$$

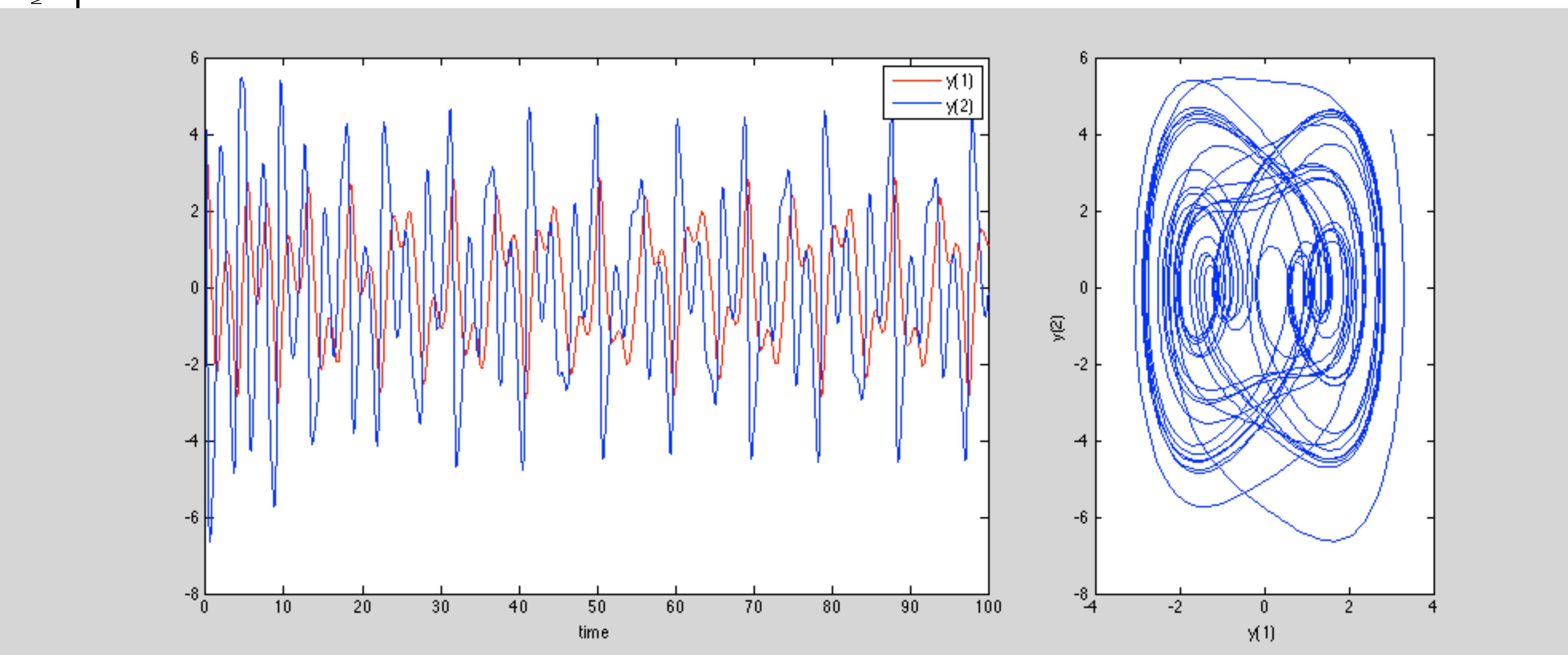
$$[t,y]=ode45(dy\_dt,[0\ 100],[3.0\ 4.1],odeopt);$$

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

cut and paste in Matlab

oscillatore di Duffing..

```
delta = 0.06; beta = 1.0;
w0 = 1.0; w = 1.0; gamma = 6.0; phi = 0;
 dy_dt = @(t,y) [y(2);...
               -delta*y(2)-(beta*y(1)^3 + w0^2*y(1))+gamma*cos(w*t+phi)];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 100], [3.0 4.1],odeopt);
subplot(1,3,[1 2]);plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'b-'); xlabel('time'); legend('y(1)','y(2)');
subplot(1,3,3);plot(y(:,1),y(:,2)); xlabel('y(1)'); ylabel('y(2)');
```



Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

Analogamente quando abbiamo sistemi di equazioni!
Ad esempio:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + x_1 + x_2 = 0 \\ \dfrac{dx_2}{dt} - x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

isoliamo i termini con l'ordine di derivata più alta,
e riorganizziamo in forma matriciale

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

chiamiamo M la matrice dei coefficienti
e supponiamo note le C.I. per x_1 e x_2

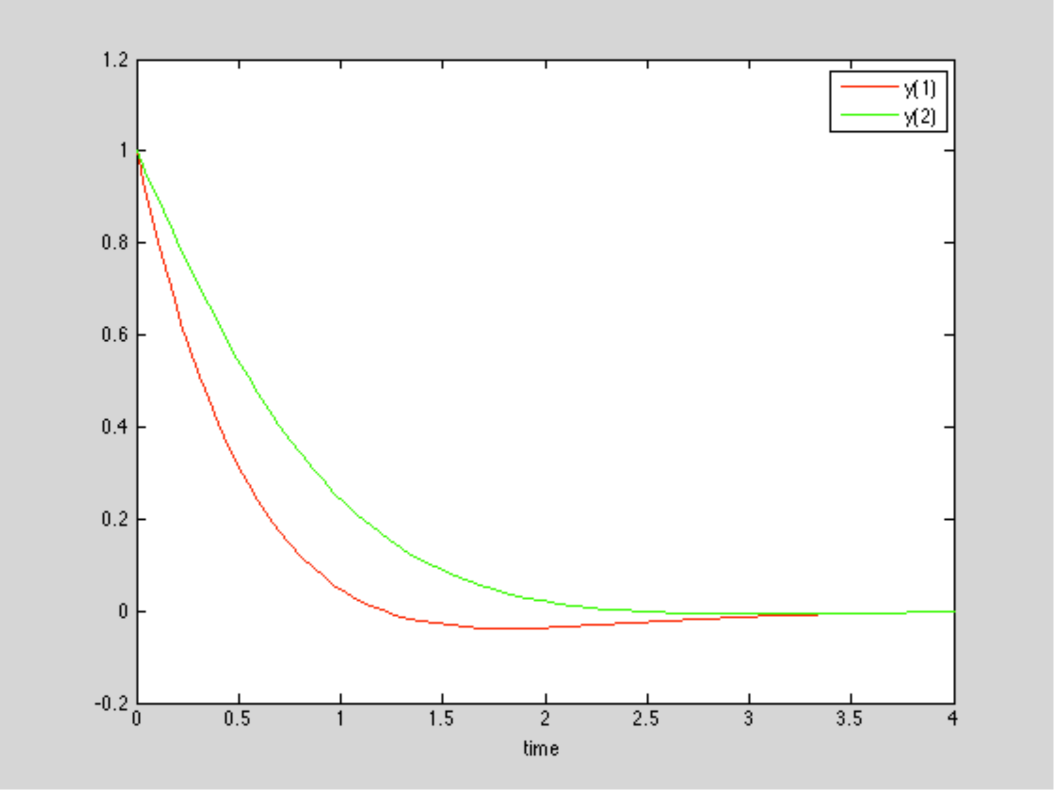
$$[M] == \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzo Matlab per risoluzione ODE

creiamo la funzione del sistema.. $dy\_dt = @(t,y)[M*y];$

$$[t,y] = ode45(dy\_dt,[0\ \ 4],[1.0\ \ ,1.0],odeopt);$$

NB in questo caso le condizioni iniziali sono
separate da una virgola perché sono in colonna!..



cut and paste in Matlab

```
M = [-1,-1;...
        1,-2];
yinit = [1.0,1.0];

dy_dt = @(t,y) [M*y];
odeopt = odeset ('RelTol', 0.00001, 'AbsTol', 0.00001,'InitialStep',0.5,'MaxStep',0.5);
[t,y] = ode45(dy_dt,[0 4], yinit,odeopt);
plot(t,y(:,1),'r-',t,y(:,2),'g-'); xlabel('time'); legend('y(1)','y(2)');
```

Soluzioni con la funzione di trasferimento

Una volta scritte le equazioni differenziali del moto, $[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$
bisogna risolverle.. trovare il legame tra
la risposta del sistema e la forzante applicata.

Questa soluzione solitamente viene ricercata nel dominio della frequenza piuttosto che nel dominio del tempo perché risulta computazionalmente più facili.

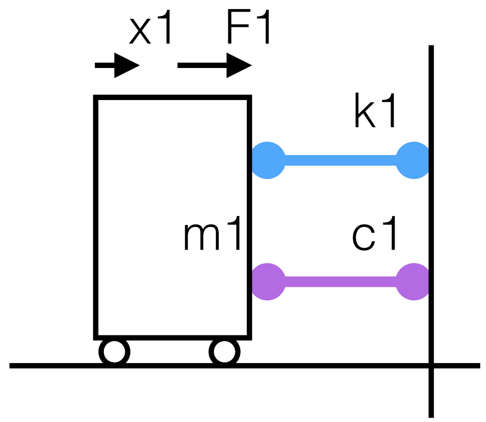
(proprietà della trasformata di Fourier
un prodotto nel dominio della f <> convoluzione nel dominio del tempo)

Si parte solitamente dalla trasformata integrale di Laplace che trasforma un equazione differenziale ordinaria un una equazione algebrica ..
con l'attenzione è che l'equazione di partenza è in termini reali quella trasformata è un equazione in termini complessi!

$$A(s) = \int_0^\infty a(t)e^{-st}dt$$

s complesso

Esempio soluzione con la funzione di trasferimento:



Sistema SDOF
1 Grado di Libertà

Scritta l'equazione del moto in coordinate fisiche (1equazione):

$$m_1\ddot{x}_1(t) + c_1\dot{x}_1(t) + k_1x_1(t) = f_1(t)$$

si applica la trasformata di Laplace all'equazione..

per la derivata di ordine 2 > $L\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) + sX(0) + \dot{X}(0)$

per la derivata di ordine 1 > $L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) + X(0)$

ipotizzando che le condizioni iniziali siano nulle ($X(0)=0 \quad \dot{X}(0)=0$),
si ottiene:

$$m_1s^2X(s) + c_1sX(s) + k_1X(s) = F(s)$$ raccogliendo X(s)

$$(m_1 s^2 + c_1 s + k_1)X(s) = F(s)$$

$$Z(s)X(s) = F(s) \qquad \text{con} \qquad Z(s) = (m_1 s^2 + c_1 s + k)$$

$$Z(s) = \frac{F(s)}{X(s)}$$

Z(s) rigidezza dinamica
(contiene rigidezza ma anche inerzia e smorzamento)

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

H(s) funzione di trasferimento
(NB può essere tra qualsiasi risposta e qualsiasi eccitazione)

Ricordandoo che s è una quantità complessa,
e quindi anche Z(s) e H(s) saranno complesse (ampiezza+fase oppure reale+immaginaria)

se s=jω, la funzione di trasferimento di chiama
Funzione di Risposta in Frequenza (FRF) (sezione della funzione di trasferimento)

Funzione di trasferimento
VS
Funzione di risposta in frequenza

$$H(s)=\frac{X(s)}{F(s)}$$

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(m_1 s^2+c_1 s+k_1\right)}$$

Ad esempio se
m=1kg, c=.1N/(m/s), k=100N/m
la funzione di trasferimento diventa:

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(s^2+0.1s+100\right)}$$

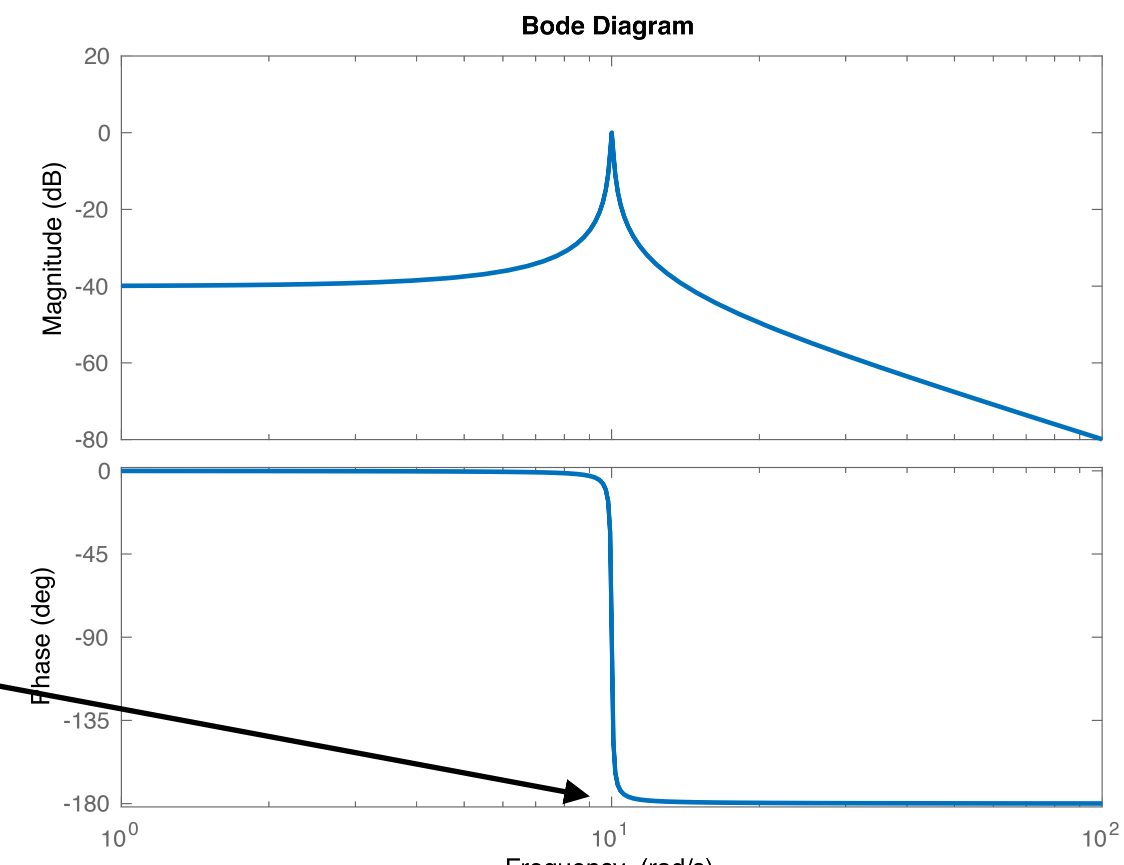
le radici sono
s_1=-.05+j*9.999
s_2=-.05-j*9.999

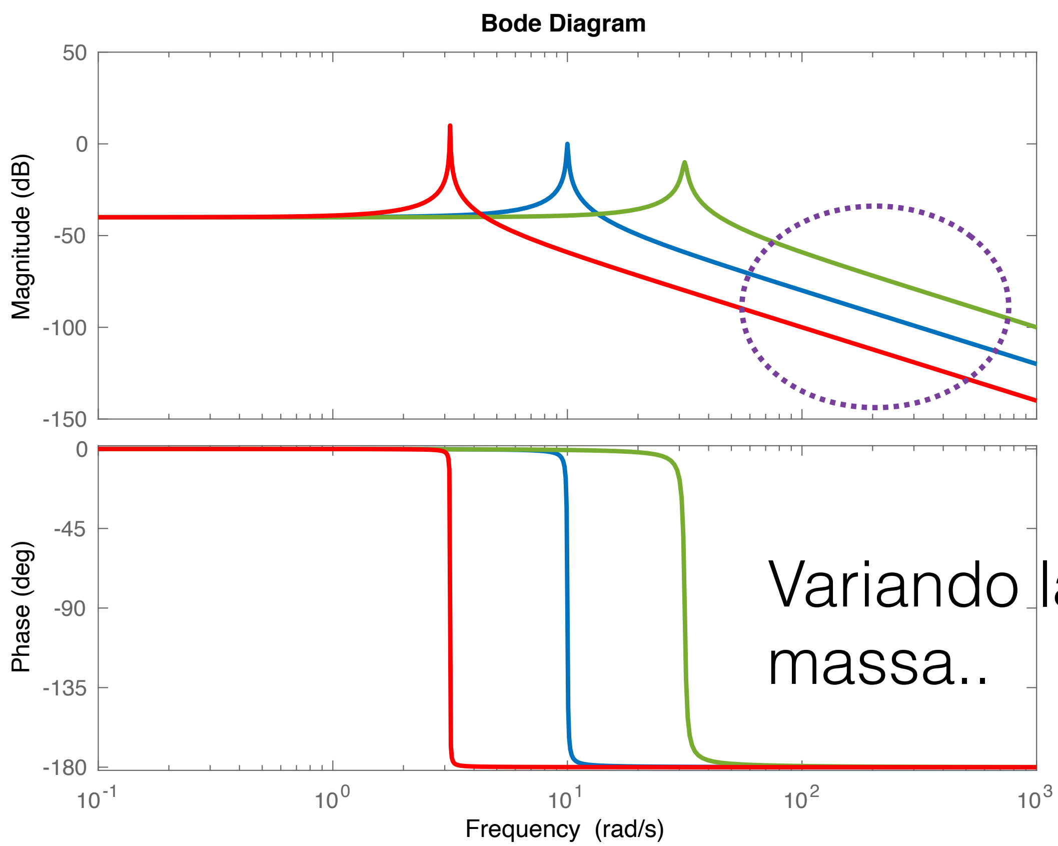
..nel caso specifico si osserva che:

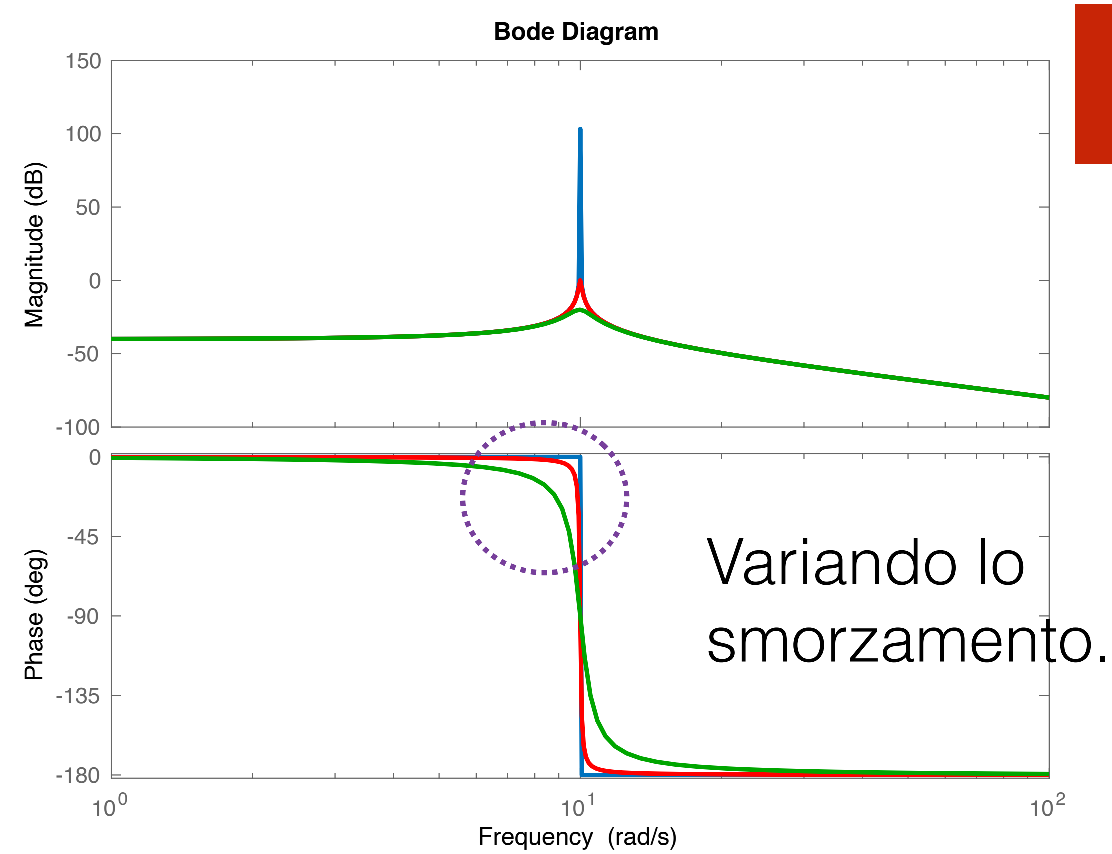
* $H_{1,1}$ rapporto tra la risposta della coordinata 1 all'eccitazione nella coordinata1

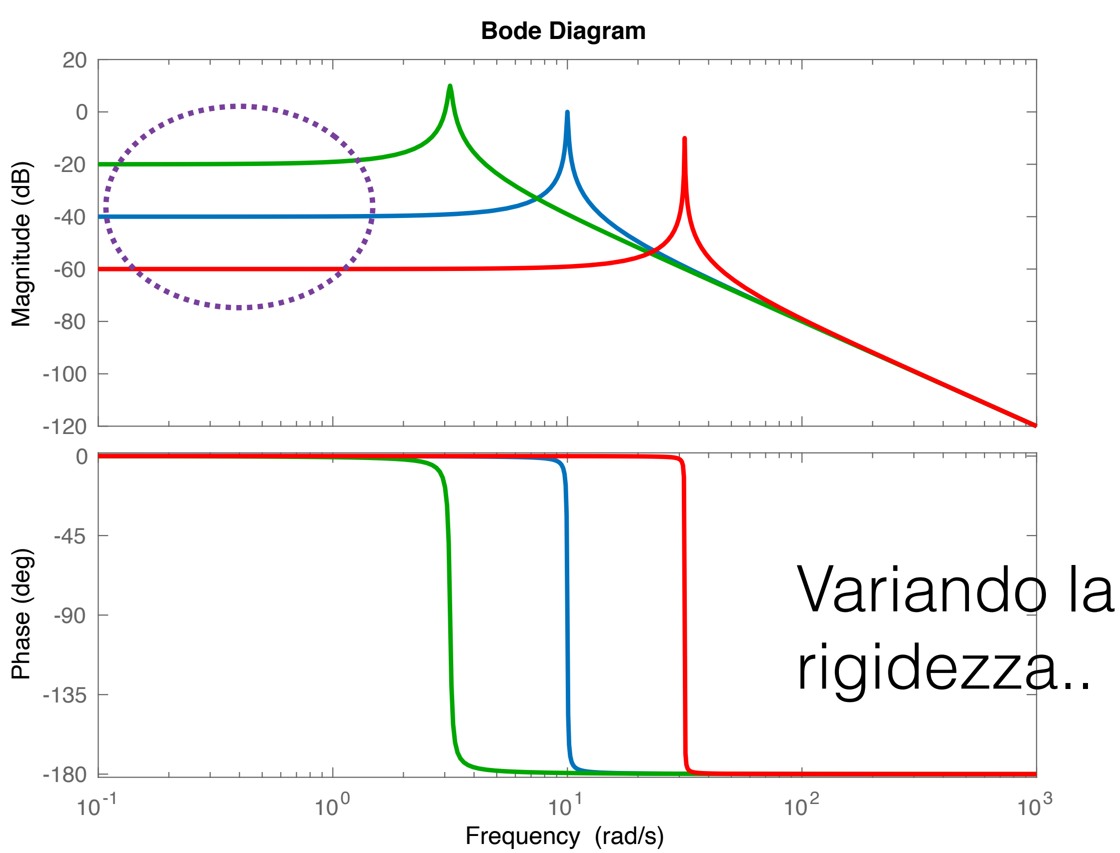
* esistono valori di s che sono le radici dell'equazione caratteristica

Tali radici s si chiamano **Poli**
a questi valori H tende all'infinto..
> **risonanza**







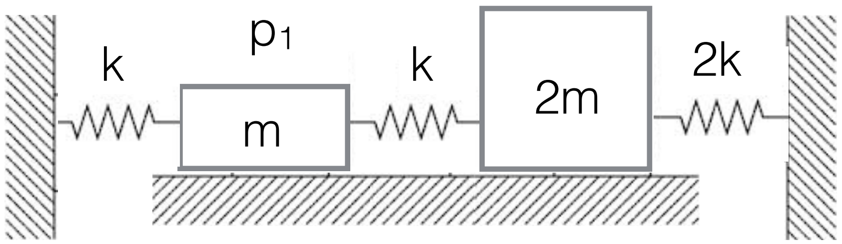


Con il modello matematico è facile vedere l'effetto che le variazioni delle caratteristiche del sistema hanno sulla funzione i risposta. Gli effetti sono molto diversi ..

Esempio soluzione con la funzione di trasferimento: sistema MDOF

Supponiamo di applicare una forzate armonica $p_1 = p_o \cos \Omega t$ a un grado di libertà del sistema

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$



$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \Omega t$$

Con l'usuale tecnica si calcola la matrice di rigidezza dinamica..

$$\left[k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \Omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \Omega^2 m & -k \\ -k & 3k - \Omega^2 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow [A]\{X\} = \{P\}$$

La soluzione.. $\{X\} = [A]^{-1}\{P\}$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-\Omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\Omega^2 2m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matrice aggiunta

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 3k-\Omega^2 2m & k \\ k & 2k-\Omega^2 m \end{bmatrix}}{\Delta} \begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determinante

$$\Delta = \left(2k-\Omega^2 m\right)\left(3k-\Omega^2 2m\right)+k^2$$
$$= 2m^2\Omega^4 - 7mk\Omega^2 + 5k^2$$

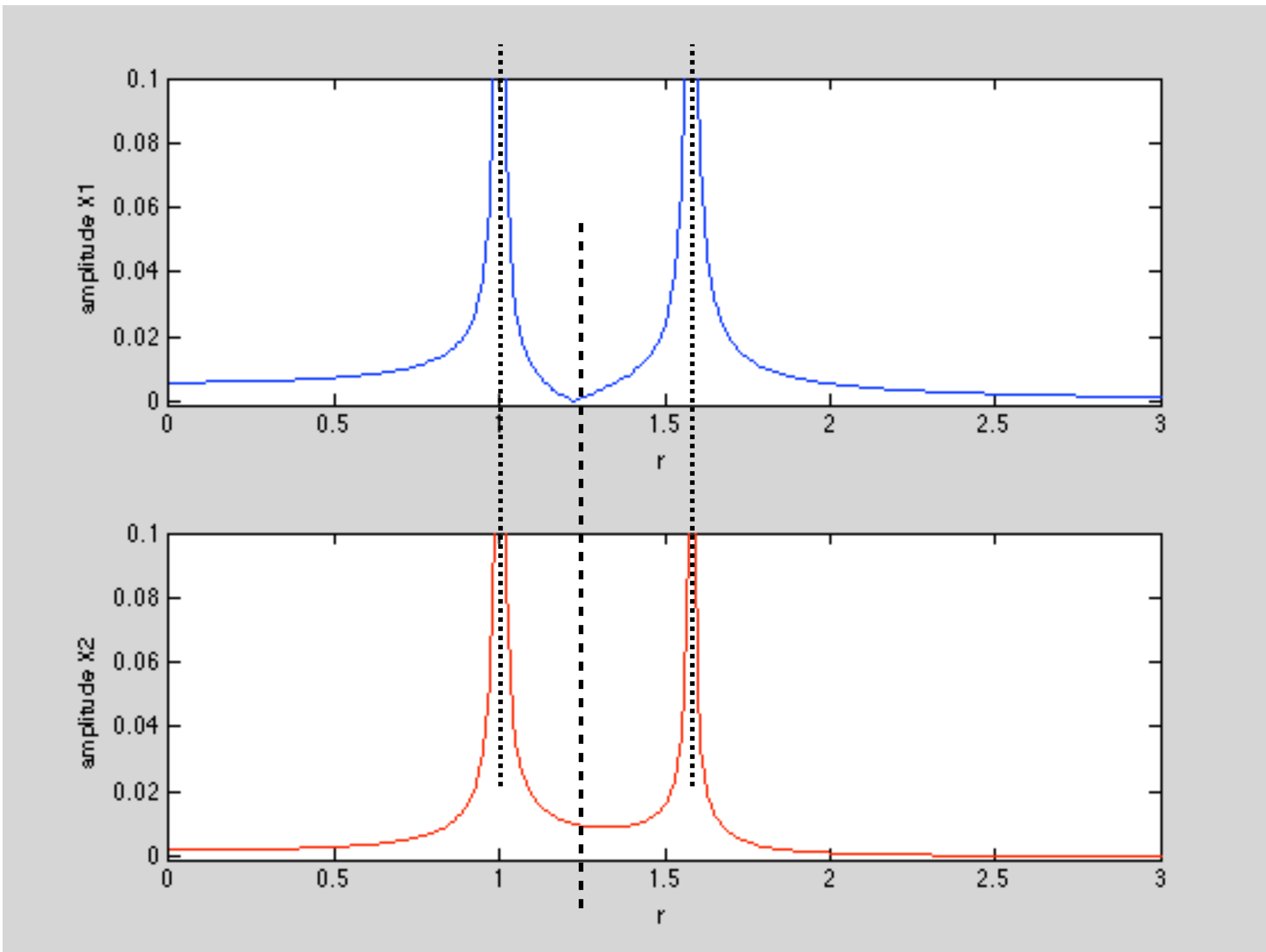
$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\left(3k-\Omega^2 2m\right)p_0}{\Delta} \\ X_2 = \dfrac{kp_0}{\Delta} \end{cases}$$

per specifici valori di Ω, il numeratore va a zero
> antirisonanza

per specifici valori di Ω, il denominatore va a zero
> risonanza

Luigi BREGANT
bregant@units.it

$$
\begin{cases}
X_1 = \dfrac{\left(3k - \Omega^2 2m\right) p_0}{\Delta} \\[2ex]
X_2 = \dfrac{k p_0}{\Delta}
\end{cases}
$$



E' possibile plottare gli andamenti degli spostamenti del sistema in funzione del rapporto r

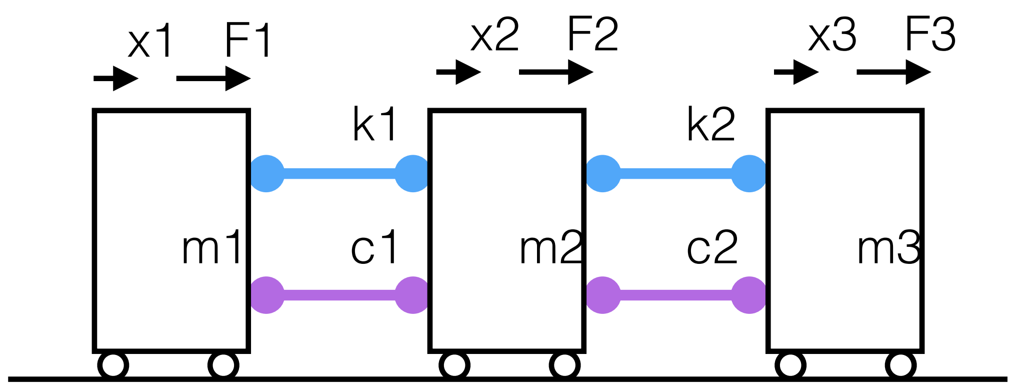
$$r = \frac{\Omega}{\omega}$$

per alcuni valori di Ω, il numeratore va a zero > **antirisonanza**, risposta va a zero, massa 1 non si muove!! anche se c'è p_1
zeri del sistema

per alcuni valori di Ω, il denominatore va a zero > **risonanza**, risposta va all'infinito (c=0)
poli del sistema

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Esempio soluzione con la funzione di trasferimento:



Sistema MDOF
a 3 Gradi di Libertà

Si parte sempre dalle equazioni del moto in coordinate fisiche (sistema di equazioni):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = f_2 \\ m_3\ddot{x}_3 + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2(x_3 - x_2) = f_3 \end{cases}$$

bisogna trovare un soluzione che soddisfa tutte e
tre le equazioni contemporaneamente perché sono tra loro accoppiate!
(nella stessa equazione coordinate differenti)

Inciso sulle eq. di sistemi MDOF

Le equazioni riscritte in forma matriciale :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

ricalcano la struttura generale delle equazioni del moto :

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$

Scritte le equazioni del moto, verificare che: :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

tutti i termini sulla diagonale principale sono positivi
le matrici di massa, smorzamento e rigidezza sono simmetriche
(energia potenziale e cinetica >0, vale il principio di reciprocità)

..mentre i termini diversi da zero fuori dalla diagonale principale rappresentano l'accoppiamento delle equazioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Inoltre si osservi che
- se aumentano/diminuiscono i gradi di libertà..
  il metodo di scrittura delle equazioni e la struttura del sistema non cambiano..
- se si considerano sistemi torsionali..
  il metodo/struttura non cambiano..
- se si considerano sistemi misti (traslazionali e torsionali)..
  il metodo/struttura non cambia..

Fine inciso sulle eq. di sistemi MDOF

Applicata la trasformata di Laplace alle equazioni di moto (nel dominio del t)..

per la derivata di ordine 2 > $L\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) + sX(0) + \dot{X}(0)$

per la derivata di ordine 1 > $L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) + X(0)$

con condizioni iniziali nulle ($X(0)=0 \quad \dot{X}(0)=0$), si ottiene:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s^2X_1 \\ s^2X_2 \\ s^2X_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Raggruppando X(s):

$$\begin{bmatrix} m_1s^2+sc_1+k_1 & -sc_1-k_1 & 0 \\ -sc_1-k_1 & m_2s^2+s(c_1+c_2)+k_1+k_2 & -sc_2-k_2 \\ 0 & -sc_2-k_2 & m_3s^2+sc_2+k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$[Z(s)]\{X(s)\} = \{F(s)\}$ [Z(s)] matrice di rigidezza dinamica

Nel caso specifico
[Z] matrice 3x3

$$[Z(s)]\{X(s)\}=\{F(s)\}$$

$$[Z(s)]=\{F(s)\}\{X(s)\}^{-1}$$ ..se MDOF

$$[Z(s)]=\frac{\{F(s)\}}{\{X(s)\}}$$ ..se SDOF

l'inversa della matrice di rigidezza dinamica [Z(s)],
è una matrice delle stesse dimensioni e si chiama matrice di trasferimento [H(s)]

$$[H(s)]=[Z(s)]^{-1}=\{X(s)\}\{F(s)\}^{-1}$$

$$[H(s)]=\frac{\{X(s)\}}{\{F(s)\}}$$ ..se SDOF

$$[H(s)]=[Z(s)]^{-1}=\frac{adj[Z(s)]}{\det[Z(s)]}$$

Nel caso specifico
[H] matrice 3x3

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
[H(s)]= & \begin{bmatrix} \dfrac{X_1(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_1(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_1(s)}{F_3(s)} \\ \dfrac{X_2(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_2(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_2(s)}{F_3(s)} \\ \dfrac{X_3(s)}{F_1(s)} & \dfrac{X_3(s)}{F_2(s)} & \dfrac{X_3(s)}{F_3(s)} \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \leftarrow X_1 \\ \\ \leftarrow X_2 \\ \\ \leftarrow X_3 \end{array}$$

$$[H(s)]=[Z(s)]^{-1}=\frac{adj\left[Z(s)\right]}{\det\left[Z(s)\right]}$$

Rapporto tra matrice aggiunta (variabile) e determinante (unico)…

matrice aggiunta= matrice trasposta coniugata

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[\begin{array}{c} s^4 m_1 m_2 m_3 + s^3\left(m_2 m_3 c_1 + m_1 m_3 c_1 + m_1 m_2 c_2 + m_1 m_3 c_2\right) \\ +s^2\left(m_1 m_3 k_1 + m_1 m_3 k_2 + m_1 m_2 k_2 + m_2 m_3 k_1 + m_2 c_1 c_2 + m_3 c_1 c_2 + m_1 c_1 c_2\right) \\ +s\left(m_3 c_1 k_2 + m_2 c_2 k_1 + m_1 c_2 k_1 + m_1 c_1 k_2 + m_3 c_2 k_1 + m_2 c_1 k_2\right) \\ +\left(m_1 c_1 k_2 + m_2 k_1 k_2 + m_3 k_1 k_2\right) \end{array}\right]$$

Se masse, smorzamenti e rigidezze sono uguali per ogni indice “i” il determinante si semplifica:

$m_1=m_2=m_3=m$

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[s^4\left(m^3\right)+\boxed{s^3\left(4m^2c\right)}+s^2\left(4m^2k+3mc^2\right)+\boxed{s\left(6mck\right)}+3mk^2\right]$$

See lo smorzamento è nullo (ci=c=0)

termini dispari

$$Det\left[Z(s)\right]=s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]$$

solo termini pari

$$Det\left[Z(s)\right] = s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]$$

Il determinante risulta essere un polinomio in “s” , detto equazione caratteristica

Le radici (solo termini in s pari >reali , termini in s pari e dispari >complesse) dell’equazione caratteristica sono detti **Poli** del sistema!

In corrispondenza dei **Poli** del sistema,
la funzione di trasferimento va all’infinito (divisione per 0)
la risposta del sistema va all’infinito > **risonanza**

$$\frac{X_i}{F_j} = \frac{f(m,c,k)}{0} \rightarrow \infty$$

Anche la matrice aggiunta risulta essere un polinomio in “s”
le sue radici sono dette **Zeri** del sistema!

In corrispondenza degli **Zeri** del sistema,
la funzione di trasferimento va a zero
la risposta del sistema va a zero > **anti-risonanza**

$$\frac{X_i}{F_j} = \frac{0}{f(m,c,k)} \rightarrow 0$$

$$\left[H(s)\right] = \left[Z(s)\right]^{-1} = \frac{adj\left[Z(s)\right]}{\det\left[Z(s)\right]}$$

$adj\left[Z(s)\right]$ → **Zeri** → **Anti-risonanze**

$\det\left[Z(s)\right]$ → **Poli** → **Risonanze**

$$[H(s)] = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F_1(s)} & \frac{X_1(s)}{F_2(s)} & \frac{X_1(s)}{F_3(s)} \\ \frac{X_2(s)}{F_1(s)} & \frac{X_2(s)}{F_2(s)} & \frac{X_2(s)}{F_3(s)} \\ \frac{X_3(s)}{F_1(s)} & \frac{X_3(s)}{F_2(s)} & \frac{X_3(s)}{F_3(s)} \end{bmatrix}$$

Dirette

Le funzioni di trasferimento vengono dette "dirette" se i=j

$$[H_{i,j}(s)] = \frac{\{X_i(s)\}}{\{F_j(s)\}}$$

altrimenti vengono dette "di trasferimento" se i≠j

Quante funzioni di trasferimento diverse ci sono in una matrice?

Le matrici di massa smorzamento e rigidezza simmetriche, (vale reciprocità), la matrice delle funzioni di risposta è simmetrica! Se N sono i GDL del sistema le funzioni di trasferimento diverse non sono N*N bensì N(N-1)

$$[H_{2,1}(s)] = [H_{1,2}(s)]$$

es N=3, frf diverse 6, invece che 9
N=100, frf diverse 990, invece che 10.000

Poli (uguali per tutte le FRF)

$$s_{1,2} = 0$$
$$s_{3,4} = \pm j$$
$$s_{5,6} = \pm j\sqrt{3}$$

$$\frac{X_1}{F_1} = \frac{s^4 m^2 + s^2 3mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_2} = \frac{s^4 m^2 + s^2 2mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_3}{F_3} = \frac{s^4 m^2 + s^2 3mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_1}{F_2} = \frac{X_2}{F_1} = \frac{s^2 mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_1}{F_3} = \frac{X_3}{F_1} = \frac{k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_3} = \frac{X_3}{F_2} = \ldots$$

$$z_{1,2} = \pm j0.618$$
$$z_{3,4} = \pm j1.618$$

$$z_{1,2} = \pm j$$

$$z_{1,2} = /$$

Zeri (dipendenti dall'FRF)

Nell'esempio supponiamo che m=1 c=0 k=1

$$\frac{X_1}{F_1}=\frac{s^4m^2+s^2 3mk+k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right)+s^2\left(4m^2k\right)+3mk^2\right]}$$

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{adj\left[Z_{1,1}(s)\right]}{\det\left[Z(s)\right]}=\frac{s^4+3s^2+k^2}{s^2\left[s^4+4s^2+3\right]}$$

rapporto di due polinomi..

radici del numeratore> **Zeri**

```
>>num= [1 0 3 0 1];
>>roots(num)
ans =
  -0.0000 + 1.6180i
  -0.0000 - 1.6180i
  -0.0000 + 0.6180i
  -0.0000 - 0.6180i
>>
```

$[1s^4+0s^3+3s^2+0s^1+1]$

4 radici, puramente immaginarie (smorzamento nullo), a due a due complesse coniugate
> **anti-risonanze** (di quella specifica funzione H)

radici del denominatore> **Poli**

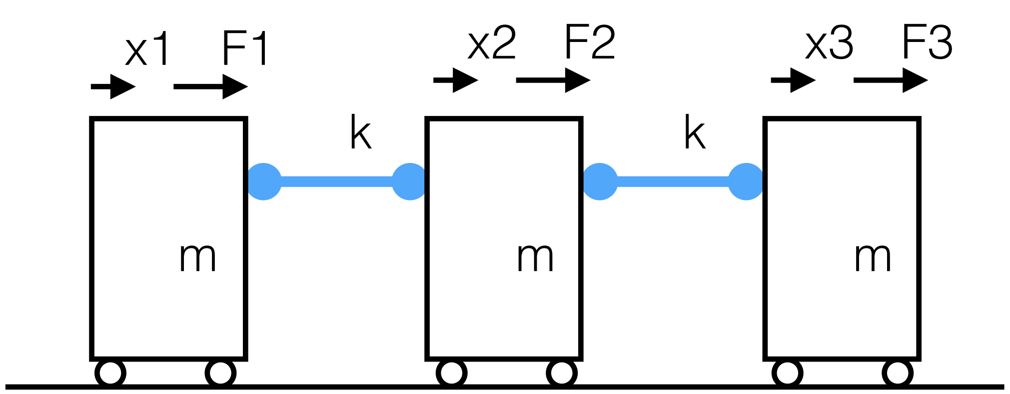
```
>> den=[1 0 4 0 3 0 0];
>>roots(den)
ans =
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.7321i
   0.0000 - 1.7321i
   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
>>
```

$[1s^6+0s^5+4s^4+0s^3+3s^2+0s^1+0]$

6 radici, puramente immaginarie,(smorzamento nullo)
a due a due complesse coniugate
> **risonanze** (per tutte le funzione di H)

Particolarità: la prima radice è nulla…
frequenza di risonanza nulla…
periodo di risonanza infinito

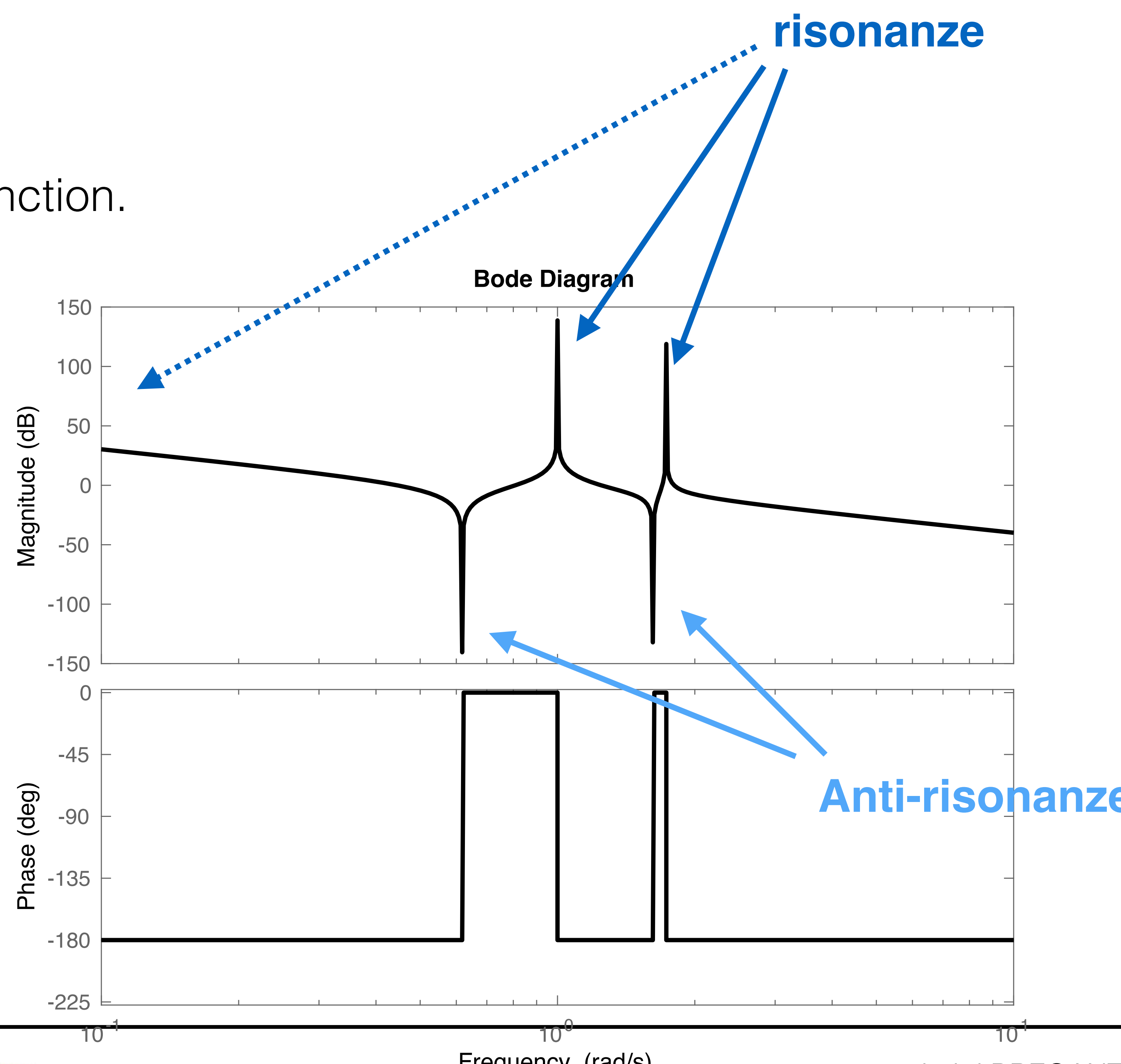
> spostamento rigido
(non c'è deformazione elastica del sistema)
> nessun vincolo con il mondo esterno

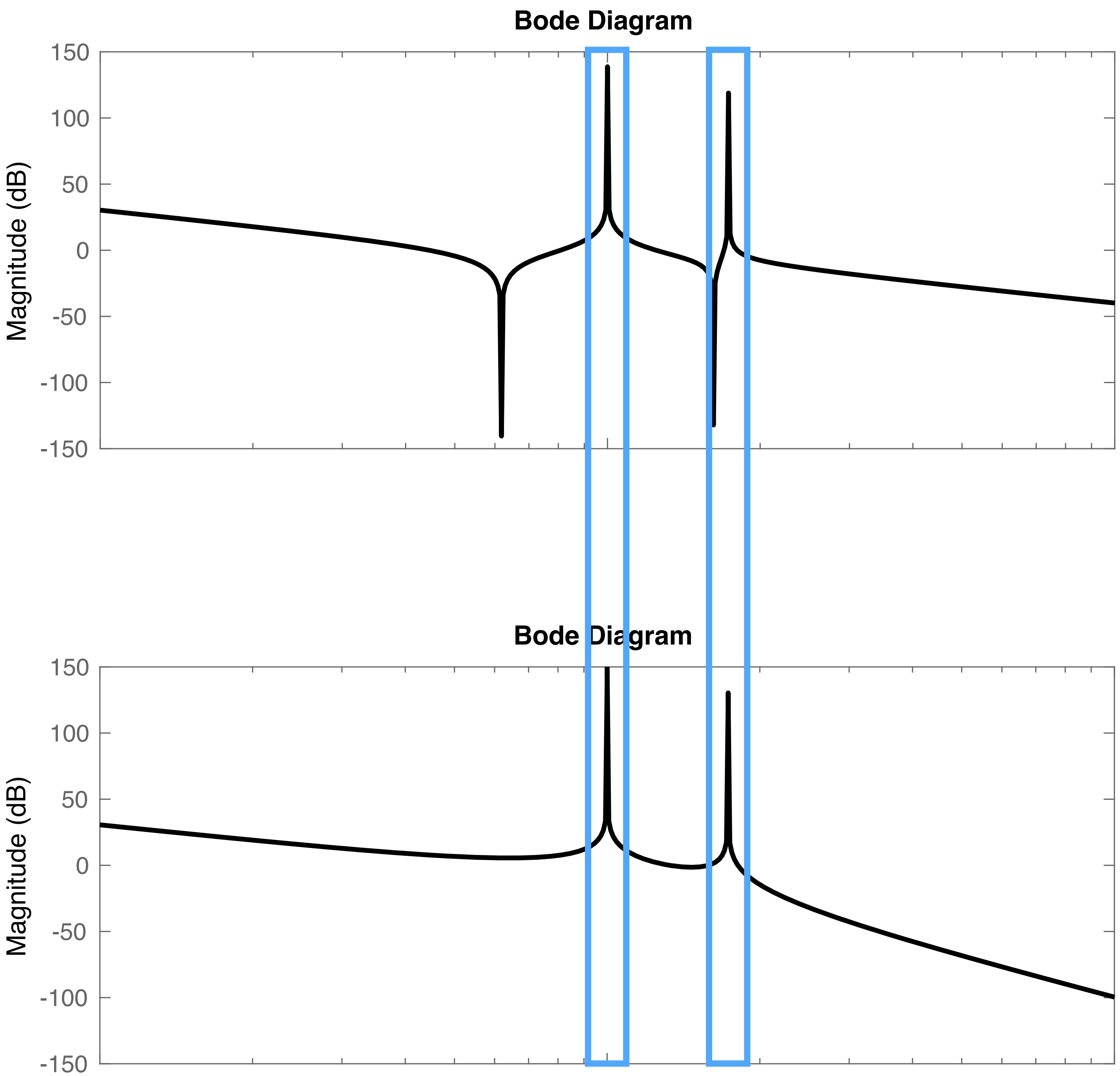


```
>>sys=tf(num,den)
sys =

    s^4 + 3 s^2 + 1
  -------------------
  s^6 + 4 s^4 + 3 s^2

Continuous-time transfer function.
>> bode(sys)
```



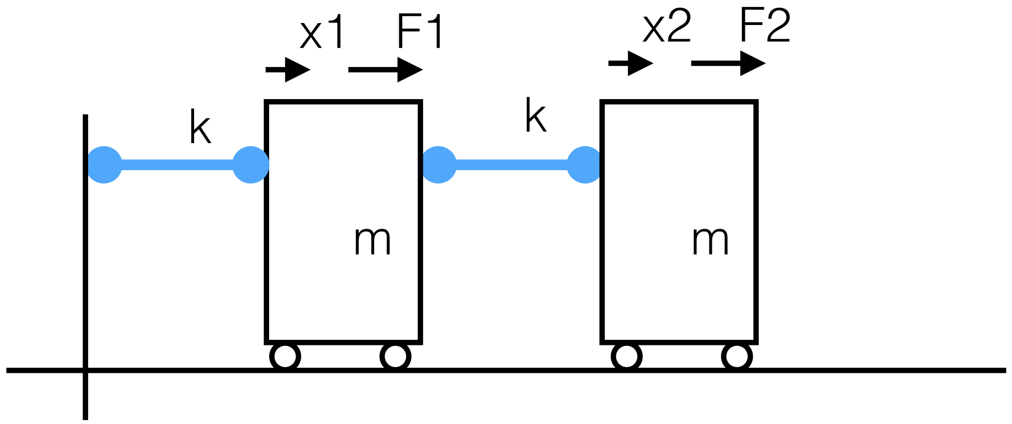


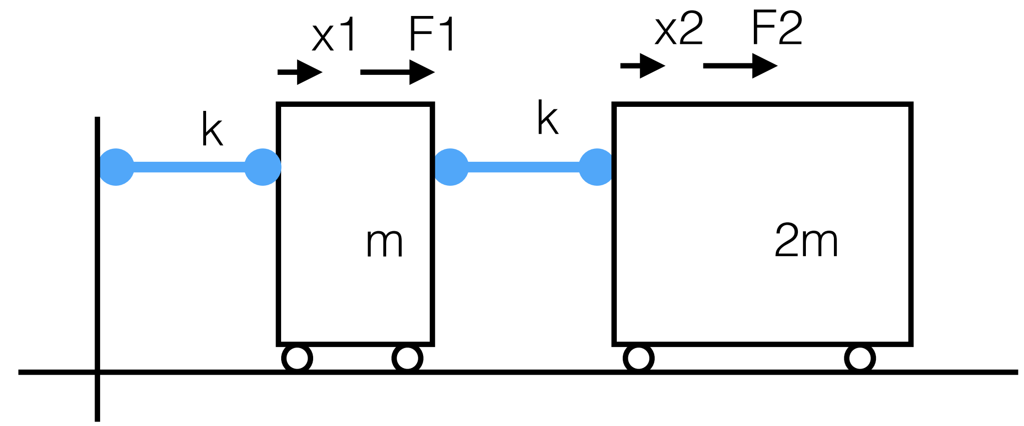
$H_{1,1}$, funzione di trasferimento diretta

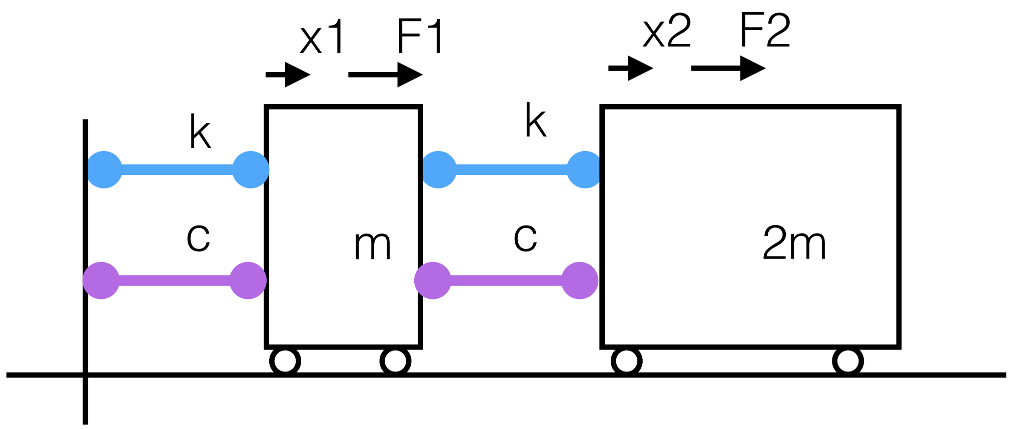
$H_{1,2}$, funzione di trasferimento

..la posizione delle risonanze non cambia, quella delle anti risonanze si!

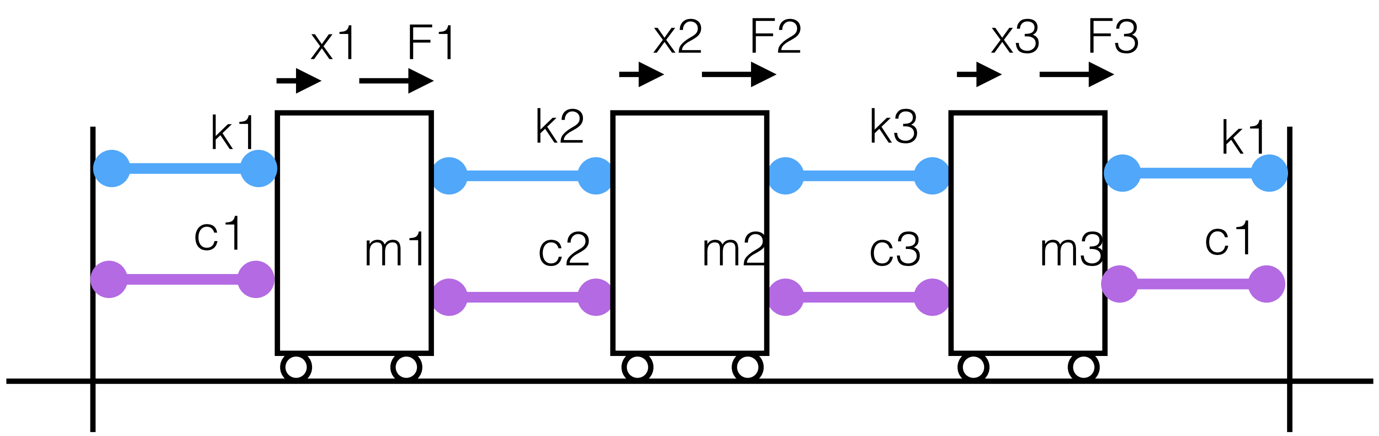
Per esercizio provate a studiare i seguenti sistemi..







..e tutte le variazioni che vi vengono in mente..



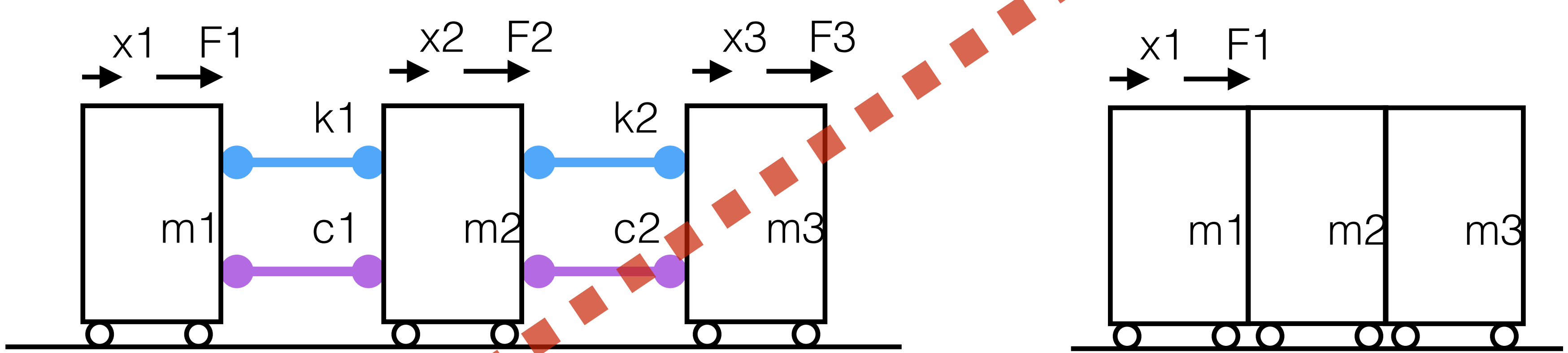
Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF

..tracciamento delle funzioni di risposta..

andamento asintotico..
verso frequenza nulla, .. verso frequenza infinita, ..poli, ..zeri

Verso la frequenza nulla il sistema si comporta come un corpo rigido
* sia che sia vincolato > cedimento statico
funzione della rigidezza e della forza applicata
* sia che sia libero > guadagno rispetto alla forza applicata



$$3m\ddot{x} = F$$

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{s^2 3m}$$

..se ci mettiamo a 0.1 rad/s
(circa 1/10 di s_1)

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{(j\omega)^2 3m} = \frac{1}{(j0.1)^2 3m} = -\frac{100}{3} = -33.3$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF

$$dB = 20\log_{10}\left(\left|\frac{X}{F}\right|\right) \qquad \left|\frac{X}{F}\right| = 33.3 \qquad dB = 30.45$$

..a 0.1 rad/s, lo spostamento è 33.3 volte la forza applicata..

l'andamento dipenderà dalla funzione di risposta che si considera..

$$\frac{X_1}{F_1} = \frac{s^4 m^2 + s^2 3mk + k^2}{s^2\left[s^4\left(m^3\right) + s^2\left(4m^2k\right) + 3mk^2\right]}$$

$$\left.\frac{X_1}{F_1}\right|_{\div m^3} = \frac{s^4 + s^2 3\omega_n^2 + \omega_n^4}{ms^2\left[s^4 + s^2\left(4\omega_n^2\right) + 3\omega_n^4\right]} = \frac{\omega^4 - \omega^2 3\omega_n^2 + \omega_n^4}{-m\omega^2\left[\omega^4 - \omega^2\left(4\omega_n^2\right) + 3\omega_n^4\right]}$$

$$\left.\frac{X_1}{F_1}\right|_{\omega \ll \omega_n} = -\frac{\omega_n^4}{m\omega^2\left[3\omega_n^4\right]} = -\frac{1}{3m\omega^2} = -\left(\frac{1}{3m}\right)\frac{1}{\omega^2}$$

Molto sotto ω_n

$$\left.\frac{X_1}{F_1}\right|_{\omega \gg \omega_n} = -\frac{\omega^4}{m\omega^2\left[\omega^4\right]} = -\frac{1}{m\omega^2} = -\left(\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\omega^2}$$

Molto sopra ω_n

Sistemi MDOF

..a bassa frequenza, il decadimento è $(-1/\omega^2)$ con un guadagno di (1/3m)..
ad alta frequenza, il decadimento è $(-1/\omega^2)$ con un guadagno di (1/m)..

..ad ogni decade di frequenza l'ampiezza diminuisce di un fattore 1/100 che equivale a 40dB
(una decade è l'intervallo tra f_1 e 10^*f_1)

..ad alta frequenza la massa m1 si muove di più, (il guadagno è più grande) perché è eccitata dalla forza F1

$$\left.\frac{X_2}{F_1}\right|_{\div m^3} = \frac{-\omega^2\omega_n^2 + \omega_n^4}{-m\omega^2\left[\omega^4 - \omega^2\left(4\omega_n^2\right) + 3\omega_n^4\right]}$$

$$\left.\frac{X_3}{F_1}\right|_{\div m^3} = \frac{\omega_n^4}{-m\omega^2\left[\omega^4 - \omega^2\left(4\omega_n^2\right) + 3\omega_n^4\right]}$$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF

$$\left.\frac{X_2}{F_1}\right|_{\omega \ll \omega_n} = \left.\frac{X_3}{F_1}\right|_{\omega \ll \omega_n} = -\frac{1}{3m\omega^2} = -\left(\frac{1}{3m}\right)\frac{1}{\omega^2}$$

$$\left.\frac{X_2}{F_1}\right|_{\omega \gg \omega_n} = -\frac{\omega_n^2}{m\omega^4} = -\left(\frac{k}{m^2}\right)\frac{1}{\omega^4}$$

..ad ogni decade di frequenza l'ampiezza diminuisce di un fattore 1/10000 che equivale a 80dB

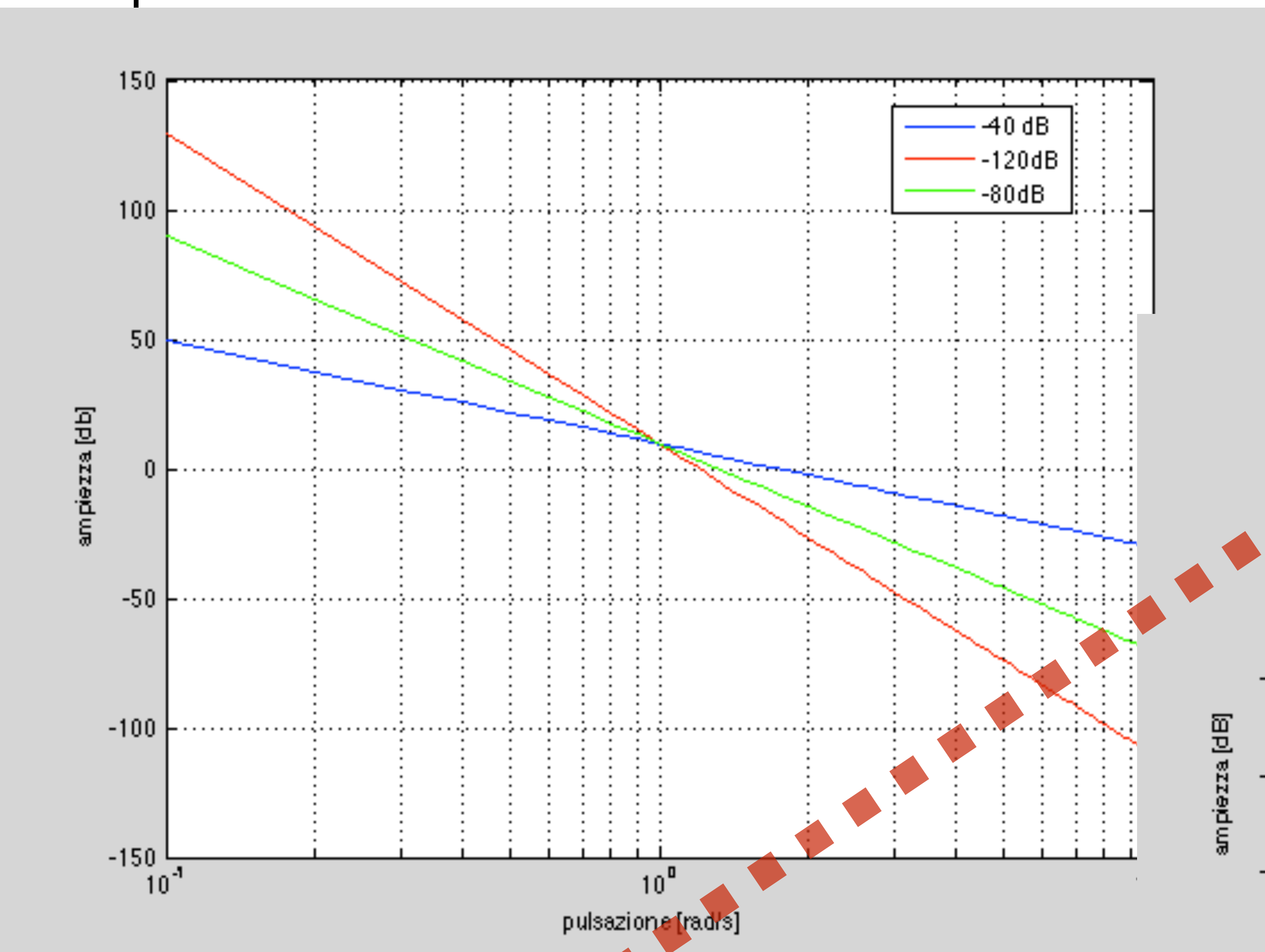
$$\left.\frac{X_3}{F_1}\right|_{\omega \gg \omega_n} = -\frac{\omega_n^4}{m\omega^6} = -\left(\frac{k^2}{m^3}\right)\frac{1}{\omega^6}$$

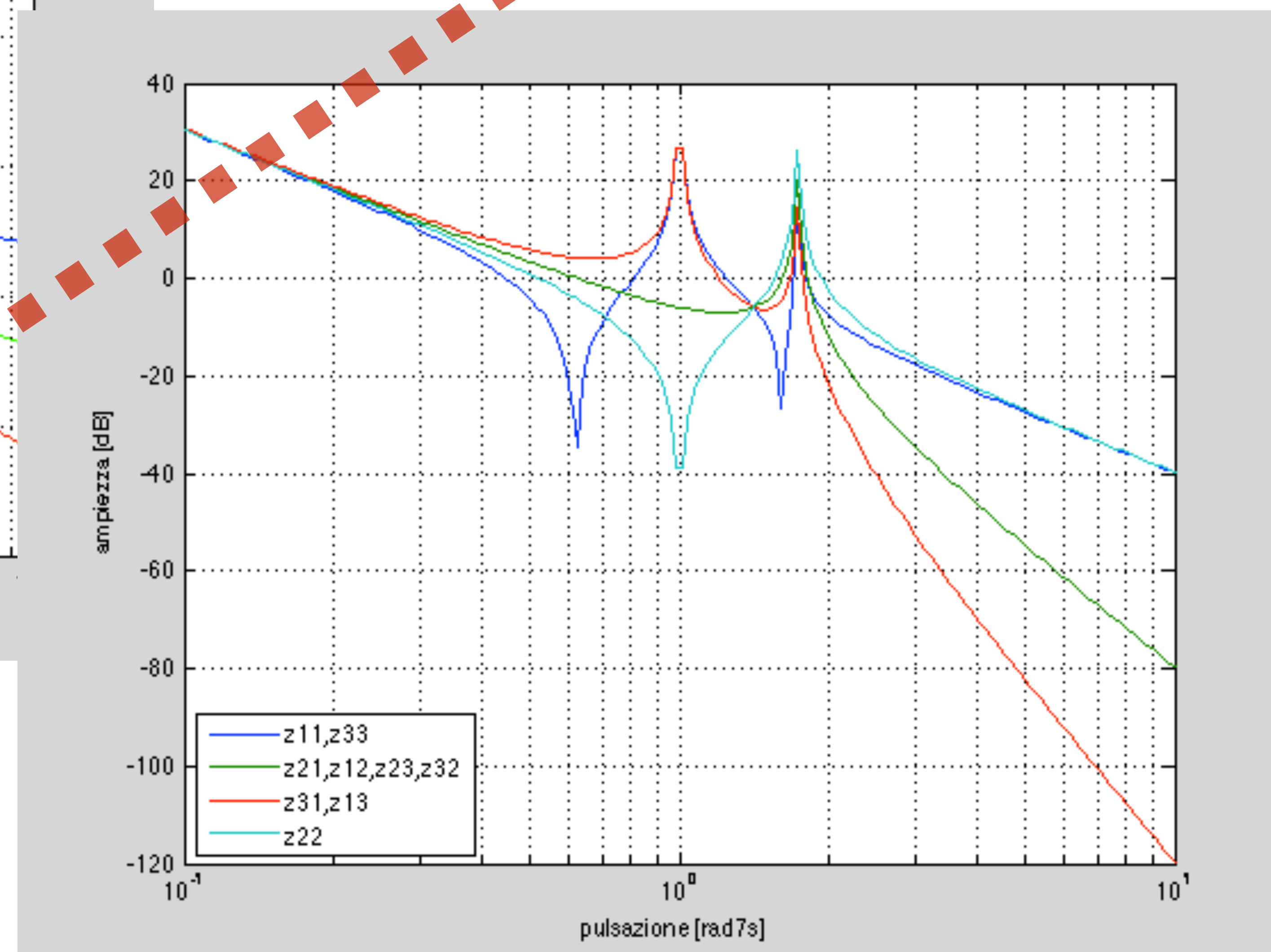
..ad ogni decade di frequenza l'ampiezza diminuisce di un fattore 1/1000000 che equivale a 120dB

..da cui si vede che e masse più "distanti" da quella sulla quale è applicata la forzante, si muovono sempre meno!!

..a voi le altre..

Sistemi MDOF





Le funzioni di trasferimento H(s) se vengono calcolate per s=jω vengono chiamate funzioni di risposta in frequenza H(ω)

La rappresentazione della dinamica del sistema con le funzioni di trasferimento può essere modificata, utilizzando la notazione ZPK (zero, pole, gain), oppure la notazione con i Residui (Ar)

$$H_{p,q}(s) = \frac{X_p(s)}{F_q(s)} = \frac{adj\left[Z_{p,q}(s)\right]}{\det\left[Z(s)\right]}$$

polynomials

polynomials

zeros

$$H_{p,q}(s) = \frac{X_p(s)}{F_q(s)} = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

gain

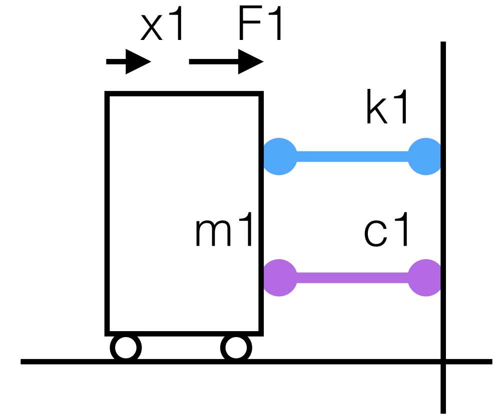
poles

$$H_{p,q}(s) = \frac{X_p(s)}{F_q(s)} = \sum_{r=1}^{n}\frac{A_{p,q,r}}{(s-p_r)} + \frac{A^*_{p,q,r}}{(s-p^*_r)}$$

residues

…a seconda del tipo di analisi che si intende condurre

..un esempio.. (SDOF)



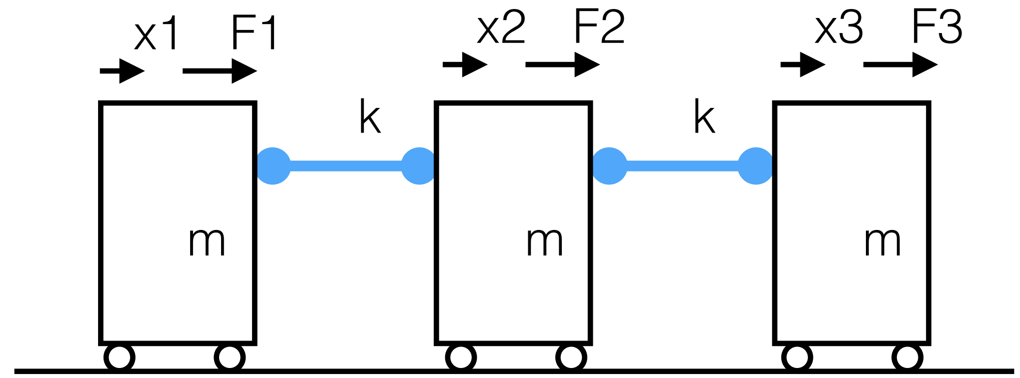
$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(m_1s^2+c_1s+k_1\right)}=\frac{1}{\left(s^2+.1s+100\right)}$$

```
>>den=[1 .1 100]
>>roots(den)
  -0.0500 + 9.9999i
  -0.0500 - 9.9999i
```

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{1}{\left(s+\underbrace{0.05-j*9.999}_{p_1}\right)\left(s+\underbrace{0.05+j*9.999}_{p_1^*}\right)}$$

$$H_{1,1}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{-j*0.05}{(s+\underbrace{0.5-j*9.999}_{p_1})}+\frac{+j*.005}{(s+\underbrace{0.5+j*9.999}_{p_1^*})}$$

..un esempio.. (MDOF)



m=1 c=0 k=1

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^2\left[s^4 + 4s^2 + 3\right]}$$

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{(s + j*1.618)(s - j*1.618)(s + j*0.618)(s - j*0.618)}{s^2(s + j*1.732)(s - j*1.732)(s + j)(s - j)}$$

$$H_{1,1}(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{-j*0.0481}{(s + j*1.732)} + \frac{j*0.0481}{(s - j*1.732)} + \frac{-j*0.25}{(s + j)} + \frac{j*0.25}{(s - j)} + \frac{0.33}{s}$$

Soluzioni con trasformazione modale

Nei sistemi MODF le equazioni del moto sono frequentemente accoppiate..
> bisogna risolvere le equazioni simultaneamente!!

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Esiste però una trasformazione di coordinate che consente di disaccoppiare il sistema e rendere ciascuna equazione indipendente..

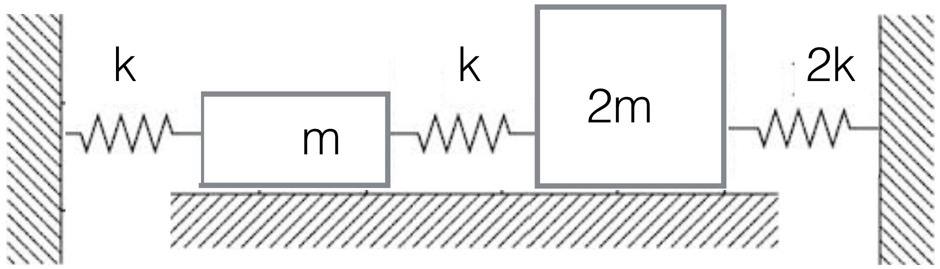
Trasformazione MODALE $\{x\} = [\phi]\{q\}$

Coordinate Fisiche

Matrice Modale
(ogni colonna contiene
una deformata modale)

Coordinate Modali
(non sono fisiche)

Vediamo cos'è una deformata modale (o un modo di vibrare)..
con un esempio..



sistema 2dof non smorzato,
non forzato

$$m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

..scritte le equazioni del moto..

$$\begin{cases} x_1 = X_1\cos(\omega t-\alpha)\\ x_2 = X_2\cos(\omega t-\alpha)\end{cases}$$

$$\left[k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-\omega^2 m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\{0\}$$

..con la soluzione di primo tentativo..

diventa un problema agli auto-valori e auto-vettori..

$$\big[[A]-\lambda[I]\big]\{X\}=\{0\}$$

$$\big[[k]-\omega^2[m]\big]\{X\}=0$$

$$\big[[m]^{-1}[k]-\Omega^2[I]\big]\{X\}=\{0\}$$

$$\left[[k]^{-1}[m]-\frac{1}{\Omega^2}[I]\right]\{X\}=\{0\}$$

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\{X\}=0$$

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]=0$$

Non interessa la soluzione {X}=0 (tutto fermo) bensì trovare gli Ω che soddisfano:

che equivale a trovare gli zeri del determinate

$$\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0$$

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 3k-\omega^2 2m \end{vmatrix}=0$$

$$(2k-\omega^2 m)(3k-\omega^2 2m)-(-k)(-k)=0$$

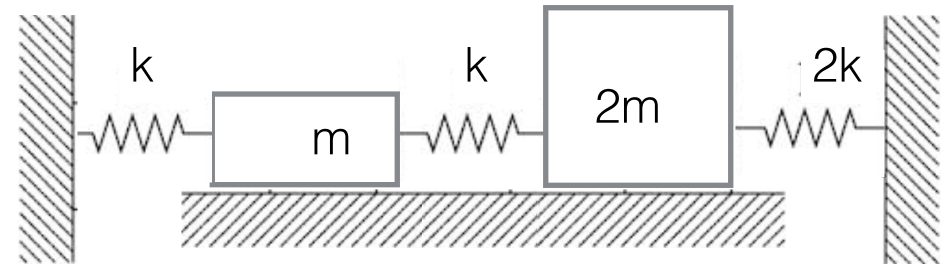
ipotizziamo m=1, k=1..

$$2\omega^4-7\omega^2+5=0$$

trovate autovalori e autovettori… con Matlab..

```
>> k=[2 -1; -1 3];
>> m=[1 0; 0 2];
>> [eig_vettori,eig_valori]=eig(k,m)
eig_vettori =
  -0.5774   -0.8165
  -0.5774    0.4082
eig_valori
   1.0000        0
        0    2.500
>>
```

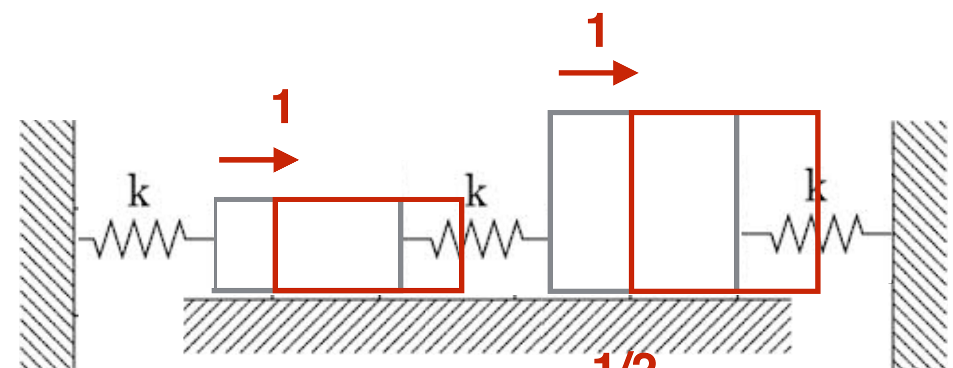
Gli auto-valori rappresentano
le pulsazioni di risonanza del sistema



Gli auto-vettori rappresentano
le deformate del sistema in risonanza

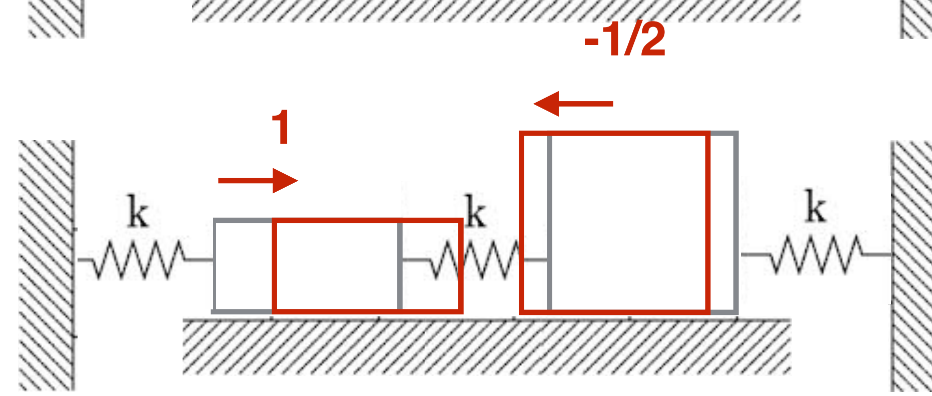
@ 1rad/s

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



@ 2.5rad/s

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\tfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$



(ricordiamo
che il sistema ha 2DOF >due pulsazioni naturali e due modi di vibrare
la pulsazione ha unità di misura, il modo di vibrare, no!)

La matrice modale raccoglie in ogni colonna
una forma modale

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

trovate autovalori e autovettori… “a mano”..

$$\left[k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix} - \omega^2 m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix} = \{0\}$$

radici dell’eq. caratterisica > autovalori $2\omega^4 - 7\omega^2 + 2 = 0$ → $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = 2{,}5$

sostituisco l’autovalore ω_i nell’equazione del moto (es la prima)

$$\begin{bmatrix}2-\omega_i^2 & -1\\ -1 & 3-\omega_i^2 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$(2-\omega_i^2)X_1 - X_2 = 0$$

Rapporto di scala

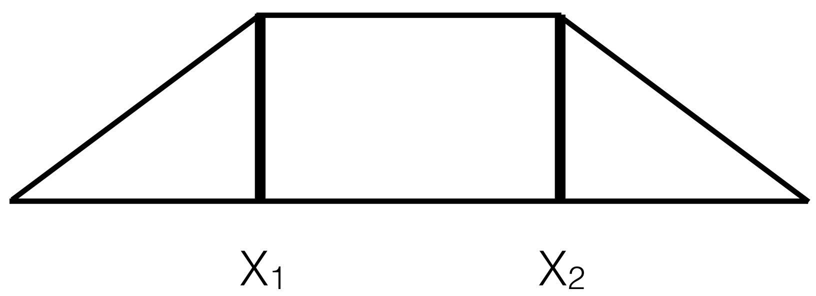
$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = (2-\omega_i^2)$$

$$\beta_1 = \frac{X_2}{X_1} = (2-1) = 1$$

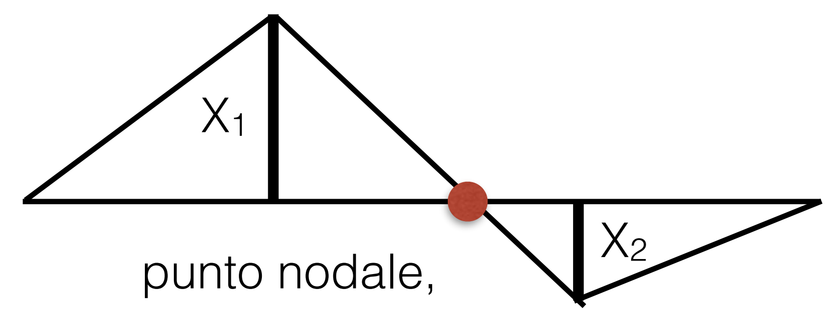
$$\beta_2 = \frac{X_2}{X_1} = (2-2.5) = -0.5$$

Per calcolare l'autovettore assegno
un valore a X_1 e bon β_i calcolo il valore di X_2

$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



$$X_1 = 1 \quad X_2 = \beta_2 X_1 = -0.5 * 1 = -0.5$$



NB gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa!!

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} -1000 \\ -1000 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.34589 \\ 0.34589 \end{Bmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{271} \\ -\frac{3}{271} \end{Bmatrix}$$

..rappresentano tutti lo stesso autovetture.
Per comodità si scalano..in vari modi come vedremo

Con le forme modali è possibile calcolare le vibrazioni del sistema!

I modi rappresentano una base (ortonormale) che descrive lo spazio di tutte le deformate possibili del sistema.

Bisogna conoscere le condizioni iniziali per scalare opportunamente i modi!

Con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \\ x_2(0) = X_0 \end{cases}$$

e ricordando:

rapporto di scala

$$\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = -0.5 \end{cases}$$

soluzione generica

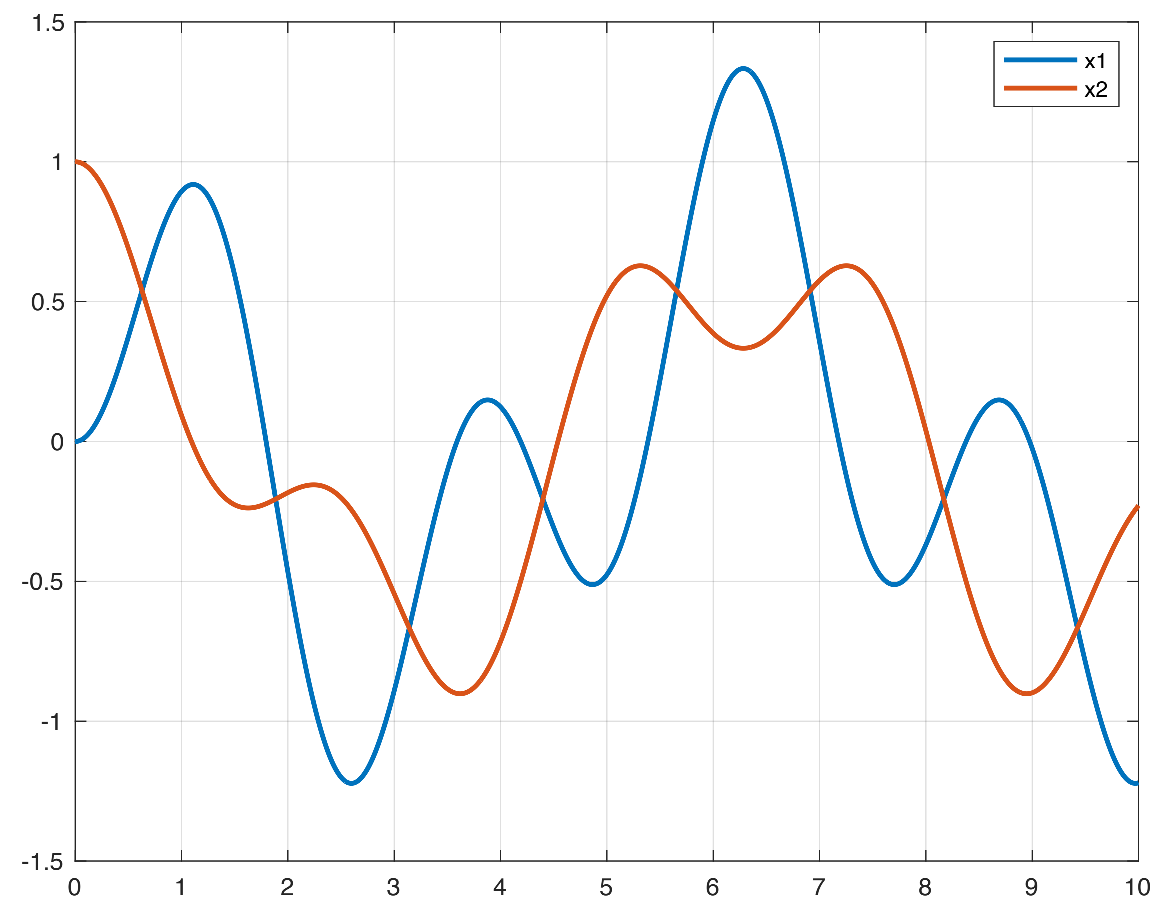
$$\begin{cases} x_1 = A_1 cos(\omega_1 t) + B_1 sen(\omega_1 t) + A_2 cos(\omega_2 t) + B_2 sin(\omega_2 t) \\ x_2 = \beta_1 A_1 cos(\omega_1 t) + \beta_1 B_1 sen(\omega_1 t) + \beta_2 A_2 cos(\omega_2 t) + \beta_2 B_2 sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 + A_2 = 0 \\ x_2 = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 = X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = B_1\omega_1 + B_2\omega_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \beta_1 B_1\omega_1 + \beta_2 B_2\omega_2 = 0 \end{cases}$$

risolvendo il sistema:

$$A_1 = \frac{2}{3} \qquad A_2 = -\frac{2}{3} \qquad B_1 = 0 \qquad B_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}cos(\omega_1 t) - \frac{2}{3}cos(\omega_2 t) \\ x_2 = \frac{2}{3}cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\cos(\omega_2 t) \end{cases}$$



NB
cambiando m e k,
cambiaerann le frequenza naturali ω_i
cambiano le condizioni iniziali
cambieranno i valori di A_i e B_i:

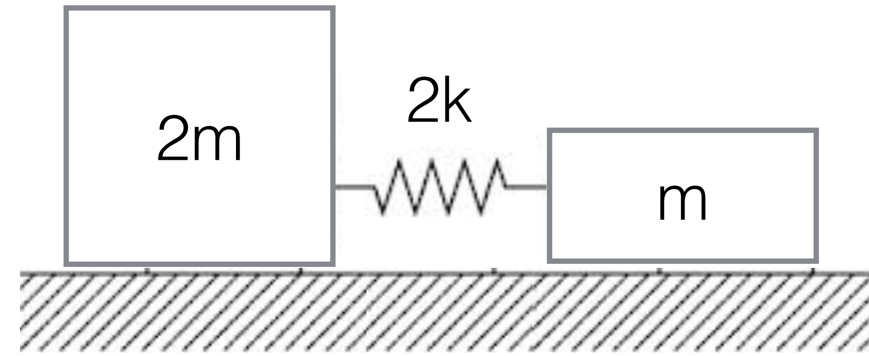
Luigi BREGANT
bregant@units.it

Un altro esempio..

sistema 2dof non smorzato, non forzato

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

..sistema svincolato..



$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_i^2 2m & -2k \\ -2k & 2k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_i^2 m\left(2m\omega_i^2 - 6k\right) = 0 \qquad \omega_i^2 = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

Nel caso in cui non ci sia vincolo del sistema con il mondo esterno, ci saranno radici ω_i nulle!
(f=0, T=inf)

$$\left(2k - \omega_i^2 2m\right)X_1 - 2kX_2 = 0$$

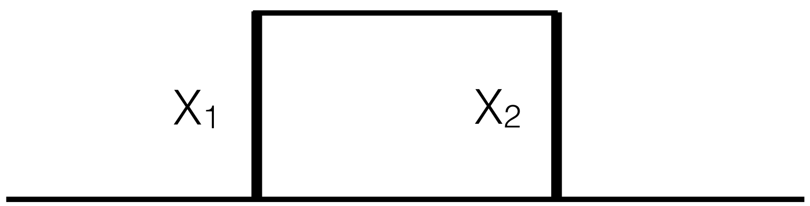
Con gli autovalori,si possono calcolare i rapporti di scala e…

$$\beta_i = \frac{X_2}{X_1} = \frac{2k - 2\omega_i^2 m}{2k} = 1 - \frac{\omega_i^2 m}{k} \qquad \beta_i = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

..gli autovettori, fissando l'ampiezza del primo gdl

modo 1

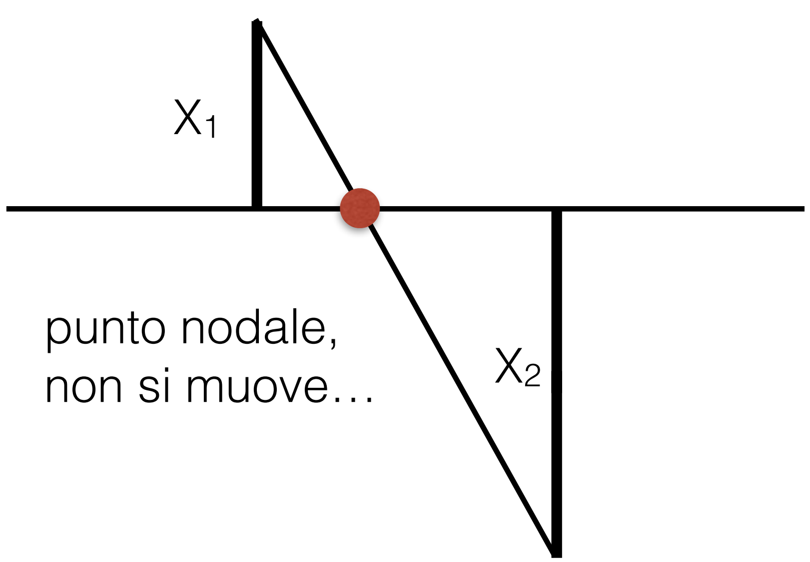
$$X_1 = 1 \qquad X_2 = \beta_1 X_1 = 1 * 1 = 1$$



non c'è deformazione elastica
della molla!

modo 2

$$X_1 = 1 \quad X_2 = \beta_2 X_1 = -2 * 1 = -2$$



La matrice modale in
questo caso sarà: $[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Con la matrice modale cosi calcolata
è possibile fare la trasformazione
di coordinate che disaccoppiai le equazioni
del sistema !

$$[m]\{\ddot{x}\}+[c]\{\dot{x}\}+[k]\{x\}=\{f\}$$ Partendo dall'equazione del moto..

$$\{x\}=[\phi]\{q\}$$ ..si effettua la trasformazione di coordinate..

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[c][\phi]\{\dot{q}\}+[k][\phi]\{q\}=\{f\}$$

..ed una pre-moltiplicazione per $[\phi]^t$..

$$[\phi]^t[m][\phi]\{\ddot{q}\}+[\phi]^t[c][\phi]\{\dot{q}\}+[\phi]^t[k][\phi]\{q\}=[\phi]^t\{f\}$$

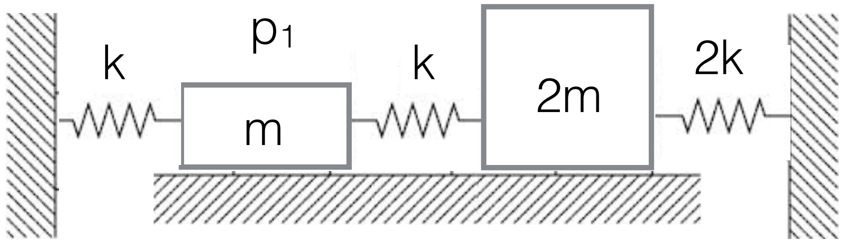
ottenendo una nuova equazione del moto, in coordinate modali

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{F\}$$ ..ove

$[\phi]^t[m][\phi]=[M]$	$[\phi]^t[c][\phi]=[C]$	$[\phi]^t[k][\phi]=[K]$	$[\phi]^t\{f\}=\{F\}$
massa modale	smorzamento modale	rigidezza modale	forzante modale

le matrici M,C,K modali sono tutte diagonali!!

Consideriamo l'esempio precedente..



termini di accoppiamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le equazione del moto (coordinate fisiche) son accoppiate..(termini fuori dia. principale diversi da 0)

$$\{x\}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\{q\}$$

Conoscendo la matrice modale si può effettuare la trasformazione di coordinate ..(da fisiche a modali)

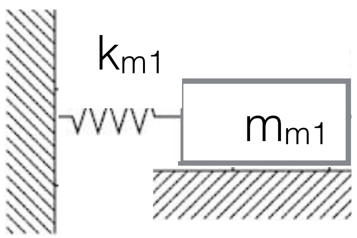
Pre-moltiplico tutto con la matrice modale trasposta $[\Phi]^T$

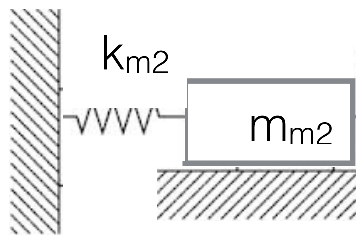
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ottenendo le equazione del moto modali) disaccoppiate.. (coordinate modali)

Avendo disaccoppiato le equazioni, e come aver a che fare con due sistemi disgiunti ad 1 DOF, caratterizzati da parametri modali di massa m_{mi} e di rigidezza k_{mi}.



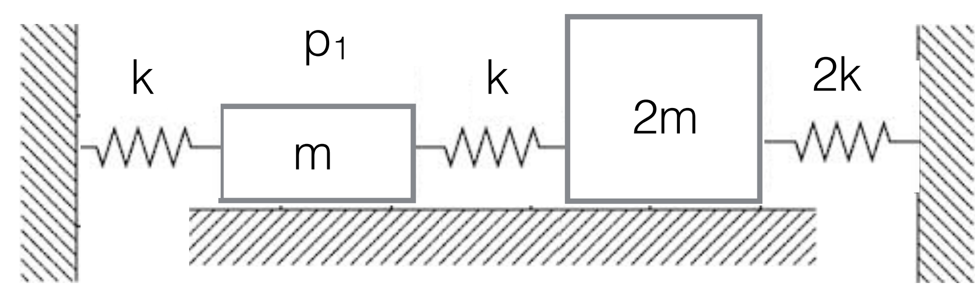


m_{m1} $\qquad$ k_{m1}

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

m_{m2} $\qquad$ k_{m2}

La trasformazione modale funziona che nel caso in cui ci siano forzanti..



$$m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

Con la trasformazione di coordinate, e premoltiplicando tutto per $[\Phi]^T$..

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{p\}$$

$$[m][\phi]\{\ddot{q}\} + [c][\phi]\{\dot{q}\} + [k][\phi]\{q\} = \{p\}$$

$$[\phi]^T[m][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^T[c][\phi]\{\dot{q}\} + [\phi]^T[k][\phi]\{q\} = [\phi]^T\{p\}$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}$$ matrici modali DIAGONALI!

$$m\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$k\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

$$m\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15/4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0 \\ p_0 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

La risposta del sistema originale si ottiene com CL delle risposte dei sistemi a 1GDL risolti nelle coordinate modali!

$$\begin{cases} 3m\ddot{q}_1 + 3kq_1 = p_0 \cos \Omega t \\ \frac{3}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{15}{4}kq_2 = p_0 \cos \Omega t \end{cases}$$

..le soluzioni per sistemi SDOF sono note!!
…usuale soluzione armonica..

$$q_i = Y_i \cos \Omega t$$

$$\begin{cases} \left(3k - 3m\Omega^2\right)Y_1 = p_0 \\ \left(\frac{15}{4}k - \frac{3}{2}m\Omega^2\right)Y_2 = p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{p_0}{\left(3k - 3m\Omega^2\right)} = \dfrac{\frac{1}{3}kp_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \\ Y_2 = \dfrac{p_0}{\left(\frac{15}{4}k - \frac{3}{2}m\Omega^2\right)} = \dfrac{\frac{4}{15}kp_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

NB ci sono 2 frequenze naturali, per il modo 1 e per il modo 2

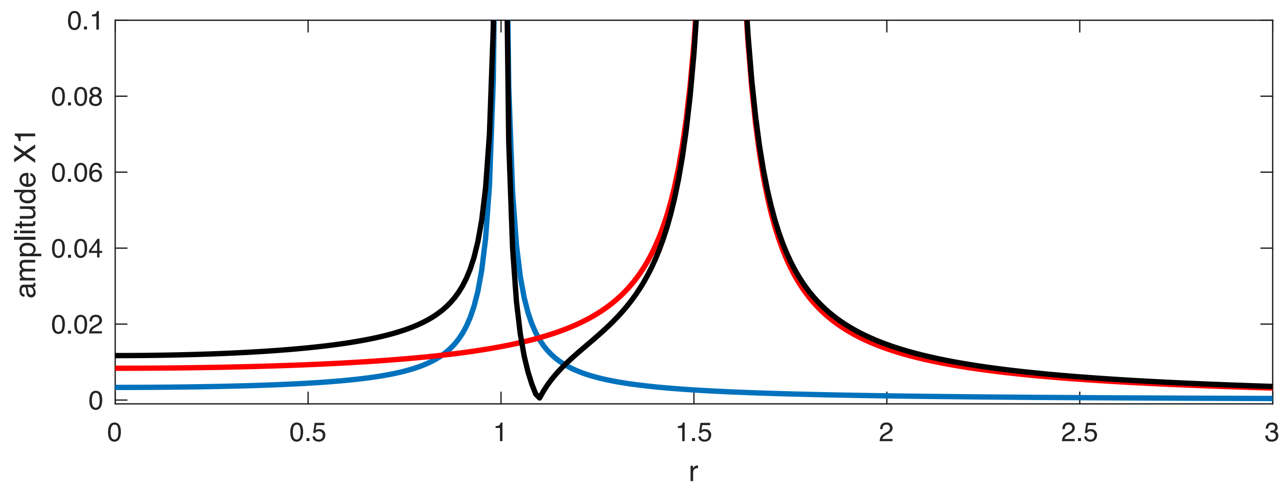
..ricordando la trasformazione modale

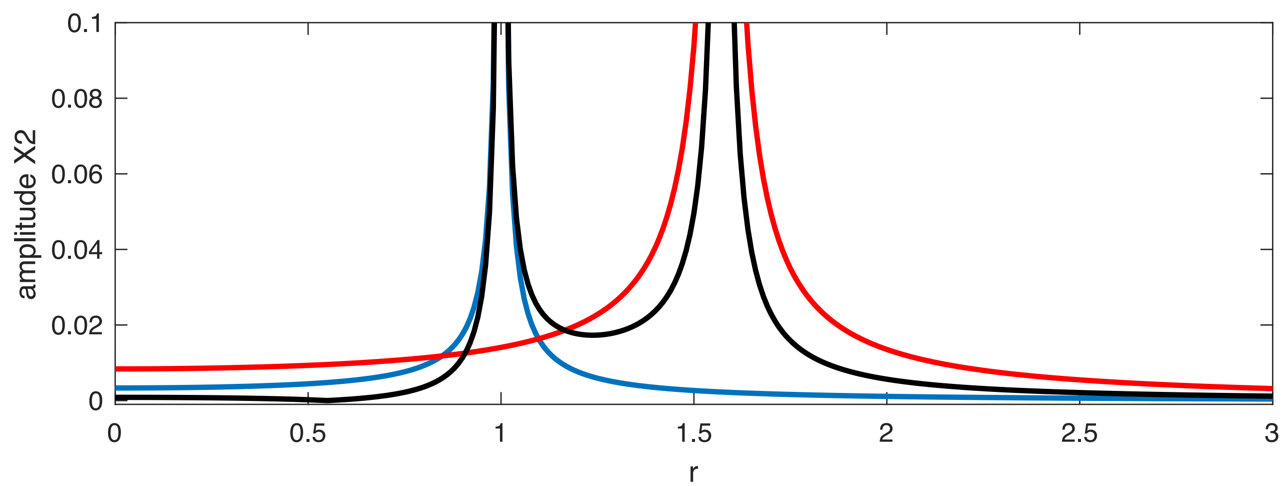
$$\{x\} = [\phi]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 + q_2 \\ q_1 - \dfrac{1}{2}q_2 \end{Bmatrix}$$

La risposta del sistema originale si ottiene com CL delle risposte dei sistemi a 1GDL risolti nelle coordinate modali!
(lo stesso risultato ottenuto con la Funzione di trasferimento, in questo caso la CL di due modi distinti!)

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\frac{1}{3} k p_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} + \dfrac{\frac{4}{15} k p_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \\[2em] X_2 = \dfrac{\frac{1}{3} k p_0}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{4}{15} k p_0}{1-\left(\dfrac{2}{5}\dfrac{\Omega}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$





..la risposta del sistema è data dalla somma di due contributi
(**due** DOF, **due** frequenze naturali, **due** forme modali…)

La trasformazione modale disaccoppia anche la matrice i smorzamento fintanto che questa è “proporzionale” alla matrice di massa e rigidezza.

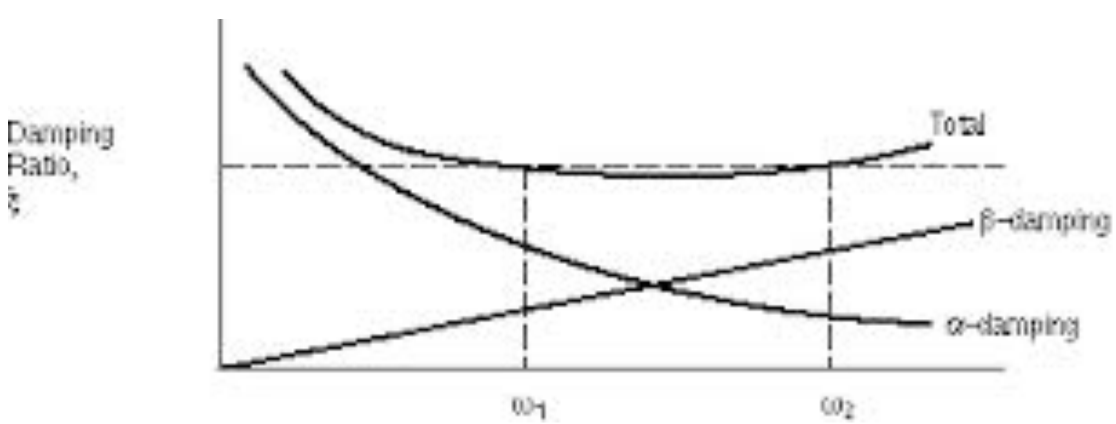
$$[c] = \alpha[m] + \beta[k]$$

$$\left[[m]^{-1}[c]\right]^{s}\left[[m]^{-1}[k]\right]^{r} = \left[[m]^{-1}[k]\right]^{r}\left[[m]^{-1}[c]\right]^{s}$$

$$[\phi]^{T}[c][\phi] = \alpha[\phi]^{T}[m][\phi] + \beta[\phi]^{T}[k][\phi]$$

$$[\phi]^{T}[c][\phi] = \alpha[M] + \beta[K] = [C]$$

matrice di smorzamento modale diagonale!



Di fatto α e β sono spesso usati nei codici FEM per definire lo smorzamento del sistema
(l’effetto di
α decresce all’aumentare dei ω
β decresce all’aumentare dei ω)

Quando lo smorzamento non è proporzionale (es concentrato in pochi DOF) si opera l'espansione di Duncan-Collar (procedura simile alla rappresentazione Stato Spazio)

Alle eq del sistema, (trasformata di Laplace) aggiungiamo un identità..

$$\left[[m]p^2+[c]p+[k]\right]\{X(p)\}=\{P(p)\}$$

$$\left[[m]p-[m]p\right]\{X(p)\}=0$$

L'equazione di sistema passa da ordine N in p^2 a..

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

un equazione di ordine 2N in p

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \quad [B]=\begin{bmatrix} [m] & 0 \\ 0 & -[k] \end{bmatrix} \quad \{Y\}=\begin{Bmatrix} p\{X\} \\ X \end{Bmatrix} \quad \{F\}=\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{P\} \end{Bmatrix}$$

L'equazione da risolvere.. è un po' più semplice essendo di grado 1
Anche in questo caso per avere la soluzione non banale ({Y}=0) (non is muove nulla) si cercano gli autovalori del sistema annullando il determinante della matrice dei coefficienti

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

$$\left|\left[p[A]-[B]\right]\right|=0$$ ..essendo di ordine 2N ci saranno 2N soluzioni complesse

Quindi 2N autovalori e 2N autovettori associati, raccolti in due matrici dalla strutturati sotto riportata:

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & \lambda_1^* & 0 & .. \\ .. & .. & .. & 0 & \lambda_2^* & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & .. & ... \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} \lambda_1\{\phi_1\} & \lambda_2\{\phi_2\} & .. & \lambda_1^*\{\phi_1^*\} & \lambda_2^*\{\phi_2^*\} & .. \\ \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & .. & \{\phi_1^*\} & \{\phi_2^*\} & .. \end{bmatrix}$$

Nel caso di smorzamento non proporzionale, eseguita la trasformazione di Duncan Collar, il cambio di coordinate da fisiche a modali, disaccoppia le equazioni del sistema! (attenzione alle dimensioni dei vettori e delle matrici)

$$\left[p[A]-[B]\right]\{Y(p)\}=\{F\}$$

$$\{Y\}=[\Phi]\{Q\}$$

Con la matrice modale si fa la solita trasformazione di coordinate..

$$\left[p[A][\Phi]-[B][\Phi]\right]\{Q\}=\{F\}$$

e premoltiplicando tutto per $[\Phi]^T$

$$\left[p[\Phi]^T[A][\Phi]-[\Phi]^T[B][\Phi]\right]\{Q\}=[\Phi]^T\{F\}$$

$$[a]=[\Phi]^T[A][\Phi]$$

..modal a..matrice diagonale

$$[b]=[\Phi]^T[B][\Phi]$$

..modal b..matrice diagonale

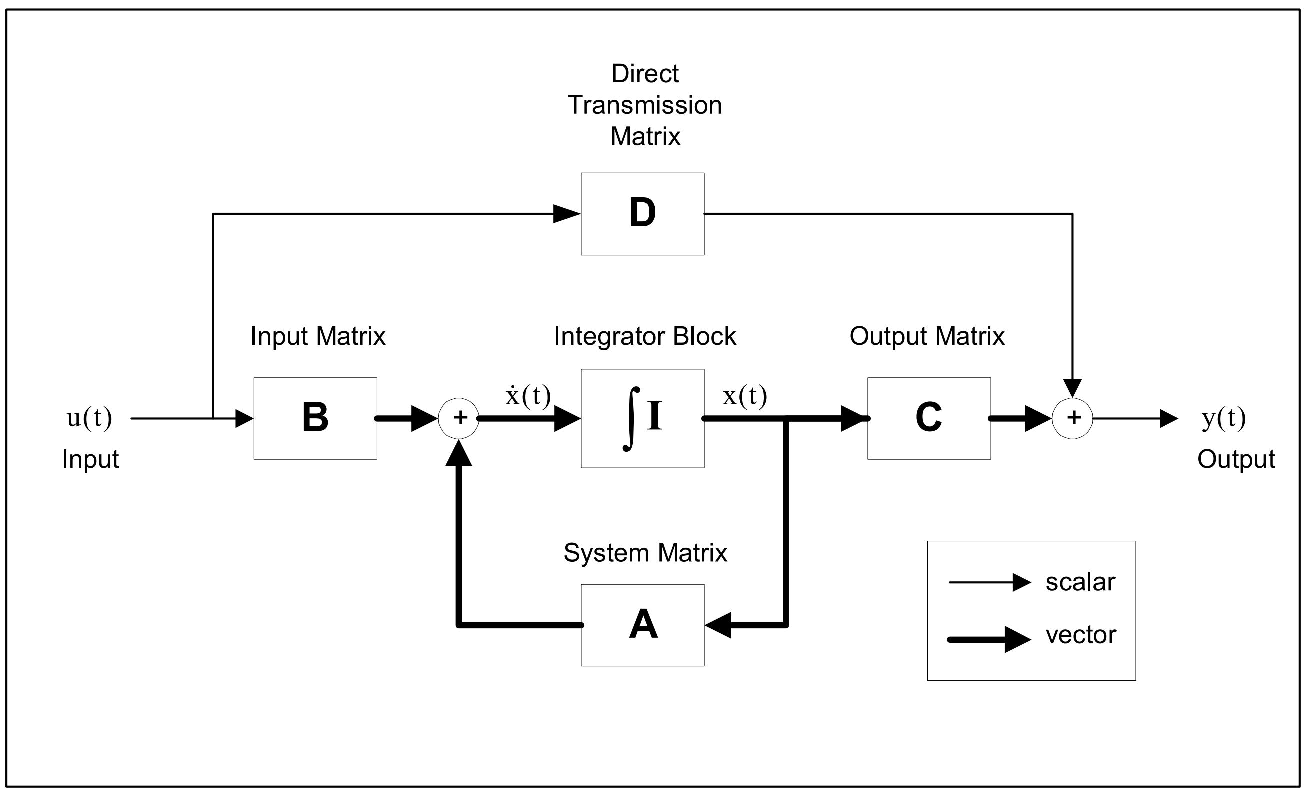
La trasformata di coordinate modale disaccoppia il sistema!
2N equazioni..2N sistemi di ordine 1..

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Rappresentazione/Risoluzione con Stato Spazio:

dal punto di vista computazionale è più facile operare con equazioni differenziali del primo ordine.

Si trasforma il sistema ad N equazioni di grado 2 ad un sistema a 2N equazioni di grado 1..

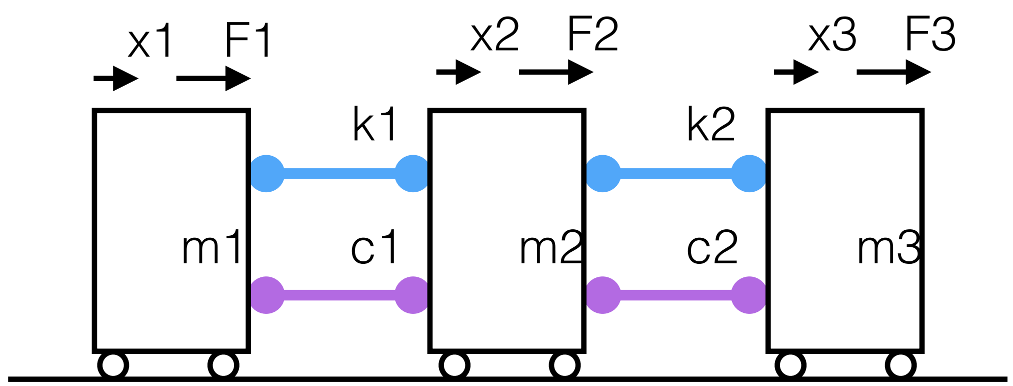


Le matrici che descrivono il sistema diventano 4
A, B, C, D!
Si controllano meglio
gli ingressi e le uscite del sistema

(es. calcolo direttamente la differenza di velocità tra due DOF)

Come della trasformazione Duncan Collar

Vediamo un esempio su un sistema MDOF:



Equazioni del moto..

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Estrazione derivata massima..

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \left(f_1 - c_1\dot{x}_1 + c_1\dot{x}_2 - k_1x_1 + k_1x_2\right)/m_1 \\ \ddot{x}_2 = \left(f_2 + c_1\dot{x}_1 - (c_1 + c_2)\dot{x}_2 + k_1x_1 - (k_1 + k_2)x_2 + k_2x_3\right)/m_2 \\ \ddot{x}_3 = \left(f_3 + c_2\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_3 + k_2x_2 - k_2x_3\right)/m_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = x_1 \\ \mathrm{x}_2 = \dot{x}_1 \\ \mathrm{x}_3 = x_2 \\ \mathrm{x}_4 = \dot{x}_2 \\ \mathrm{x}_5 = x_3 \\ \mathrm{x}_6 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

trasformazione di coordinate…

Sostituzione nelle equazioni del moto…

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = \left(f_1 - c_1 x_2 + c_1 x_4 - k_1 x_1 + k_1 x_3\right)/m_1 \\
\dot{x}_3 = x_4 \\
\dot{x}_4 = \left(f_2 + c_1 x_2 - \left(c_1 + c_2\right) x_4 + k_1 x_1 - \left(k_1 + k_2\right) x_3 + k_2 x_5\right)/m_2 \\
\dot{x}_5 = x_6 \\
\dot{x}_6 = \left(f_3 + c_2 x_4 - c_2 x_6 + k_2 x_3 - k_2 x_5\right)/m_3
\end{cases}
$$

Riordino..

$$
\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_1/m_1 & -c_1/m_1 & k_1/m_1 & c_1/m_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
k_1/m_2 & c_1/m_2 & -\left(k_1+k_2\right)/m_2 & -\left(c_1+c_2\right)/m_2 & k_2/m_2 & c_2/m_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & k_2/m_3 & c_2/m_3 & -k_2/m_3 & -c_2/m_3
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} +
\begin{bmatrix} 0 \\ f_1/m_1 \\ 0 \\ f_2/m_2 \\ 0 \\ f_3/m_3 \end{bmatrix} \{1\}
$$

La struttura generale è $\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\}$

Luigi BREGANT
bregant@units.it

$$\{\dot{x}\}=[A]\{x\}+[B]\{u\}$$

La matrice [A] è la matrice dinamica,
la [B] la matrice d'ingresso..

$$[B]=\begin{bmatrix}0\\ f_1/m_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad [B]=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ f_2/m_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad [B]=\begin{bmatrix}0\\ f_1/m_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ f_3/m_3\end{bmatrix}\quad [B]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ f_1/m_1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & f_2/m_2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

La matrice [B] può variare
se il sistema è di tipo SingleInput,
MultiInput,..

Cosa rappresentano le [B] a sinistra?

La [C] è la matrice di uscita, la [D] quella di trasmissione/legame diretto
([D] non e comune nei nostri sistemi).

$$\{y\}=[C]\{x\}+[D]\{u\}$$

Se fossimo interessati solo agli spostamenti [D] sarebbe..

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{Bmatrix}+[0]\{1\}$$

se a una loro combinazione..

$$\begin{cases}y_1=ax_1+cx_5\\ y_2=bx_1+dx_3\\ y_3=x_6\end{cases}\qquad \begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0&0&0&c&0\\ b&0&d&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{Bmatrix}+[0]\{1\}$$

La parte interessante per la dinamica è quella relativa alla matrice di sistema [A]
(che lega gli stati e le derivate degli stati)

$$\{\dot{\mathrm{x}}\}=[A]\{\mathrm{x}\}$$

La soluzione generica, $\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_{m,i} e^{\lambda_i t}$

con il vettore degli stati x_i alla frequenza i, l'autovalore λ_i e l'autovettore $x_{m,i}$

di deriva e sostituisce .. $\dot{\mathrm{x}}_i = \lambda_i \mathrm{x}_{m,i} e^{\lambda_i t}$

$$\lambda_i \mathrm{x}_{m,i} = [A]\mathrm{x}_{m,i}$$

Si elimina la dipendenza dal tempo ($e^{\lambda t}$)

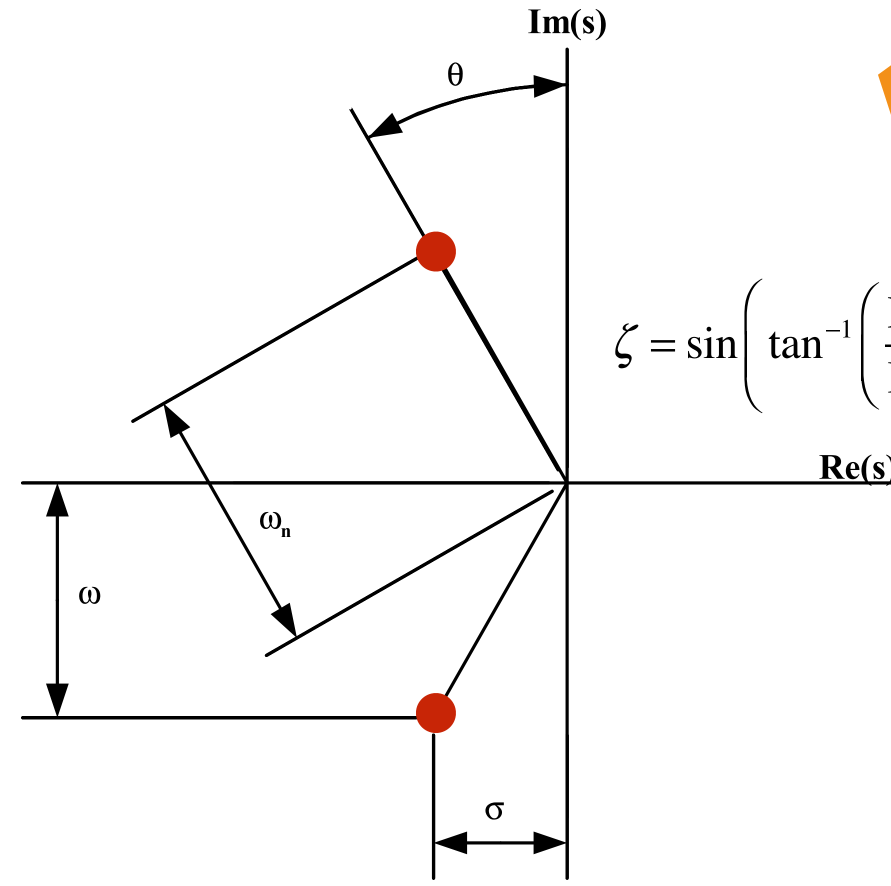
$$\left(\lambda_i [I]-[A]\right)\mathrm{x}_{m,i} = 0$$

ottenendo un problema agli autovalori ..

$$\left|\left(\lambda_i [I]-[A]\right)\right| = 0$$

..la soluzione interessante è quella in cui i valori di λ_i che annullano il con determinate!

Anche in questo caso,
la matrice [A] ha 2N equazioni, e quindi 2N soluzioni a 2 a 2 complesse coniugate..
(poli del sistema / frequenze naturali)



$$\zeta = \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{\mathrm{Im}(\lambda)}\right)\right)$$

$$\lambda_{n1} = \sigma_{n,1} + j\omega_{n1} \qquad \lambda_{n2} = \lambda^*_{n1} = \sigma_{n,1} - j\omega_{n1}$$

Dagli gli autovalori, si trovano gli autovettori (deformate del sistema) che contengono spostamenti e velocità, risolvendo l'equazione

$$\left(\lambda_i[I]-[A]\right)\mathrm{x}_{m,i} = 0$$

NB ..in corrispondenza dell'autovalore, l'ordine del sistema si abbassa da N a N-1 (perche?)..
(ne consegue che gli autovalori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa (come si seglie la costante?))

Con gli autovalori, e gli autovettori, si può determinare
la risposta del sistema per ogni modo…

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}_{n1} e^{\lambda_{n1} t} + \mathrm{x}_{n2} e^{\lambda_{n2} t}$$

$$\mathrm{x}(t) = e^{\sigma_{n1} t} \left(e^{(+j\omega_{n1})t} \mathrm{x}_{n1} + e^{(-j\omega_{n1})t} \mathrm{x}^*_{n1} \right)$$

$$\mathrm{x}(t) = e^{(\sigma_{n1} + j\omega_{n1})t} \mathrm{x}_{n1} + e^{(\sigma_{n1} - j\omega_{n1})t} \mathrm{x}^*_{n1}$$

..la somma delle componenti
di due vettori contro-rotanti

$$\mathrm{x}(t) = e^{\sigma_{n1} t}\, 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{x}_{n1})$$

Se si parte da un sistema a 3DOF, di ordine 2..
con la rappresentazione StatoSpazio..
gli autovettori calcolati avranno dimensione {6x1}
contengono..3 spostamenti e 3 velocità!

Non bisogna dimenticare di tener conto delle
condizioni iniziali!!

Dalla formulazione StatoSpazio di possono derivare le risposte in frequenza.....

$$\{\dot{x}\}=[A]\{x\}+[B]\{u\}$$

$$\{y\}=[C]\{x\}+[D]\{u\}$$

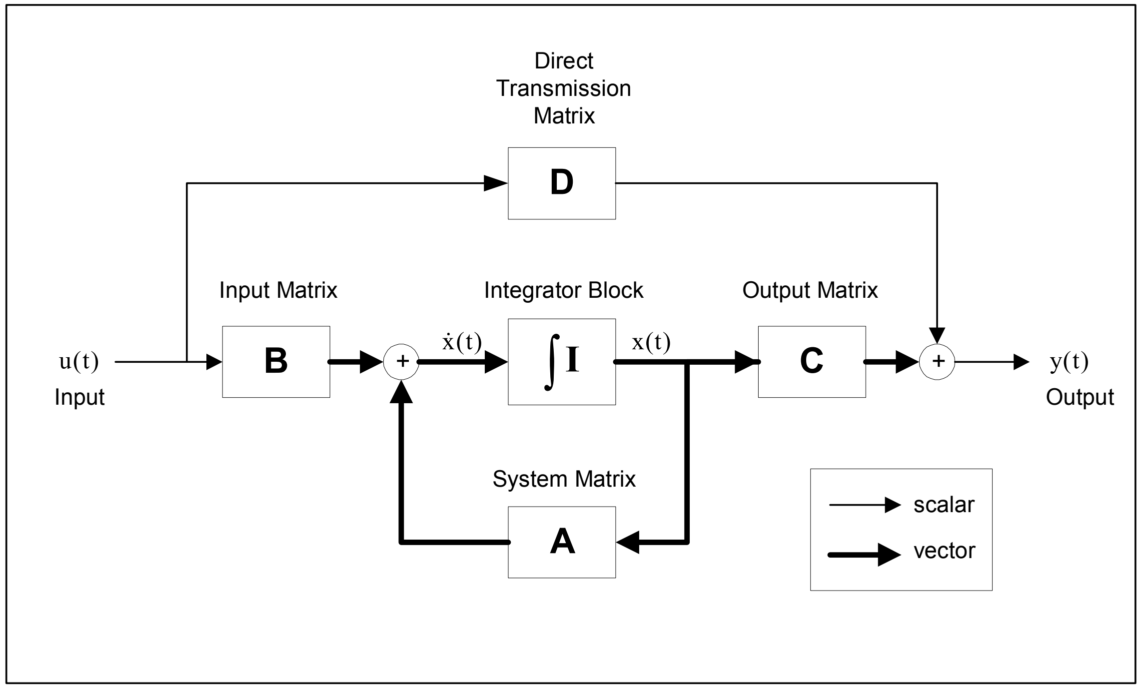
Trascurando le condizioni iniziali, e facendo la trasformata di Laplace della prima equazione..

$$s[I]\{X\}=[A]\{X\}+[B]\{U\}$$

$$(s[I]-[A])\{X\}=[B]\{U\}$$

$$\{X\}=(s[I]-[A])^{-1}[B]\{U\}$$

$$\{Y\}=[C](s[I]-[A])^{-1}[B]\{U\}+[D]\{U\}$$



$$\frac{\{Y\}}{\{U\}}=[C](s[I]-[A])^{-1}[B]+[D]$$

Quali sono le dimensioni di questi vettori e matrici?