# meccanica delle vibrazioni

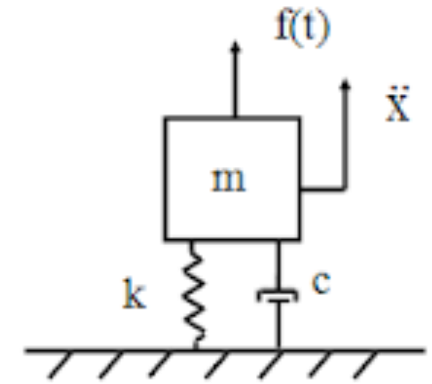
laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 3
particolarità sistemi
SDOF MDOF



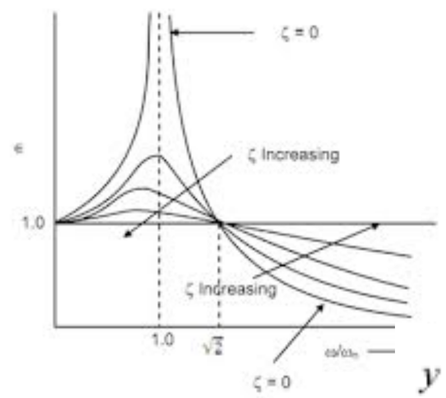

Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi SDOF



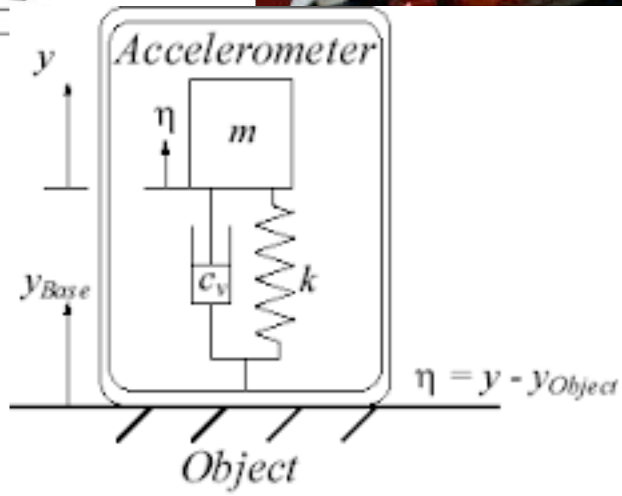

A partire dal sistema SDOF classico
si possono studiare diversi aspetti e sistemi semplificati

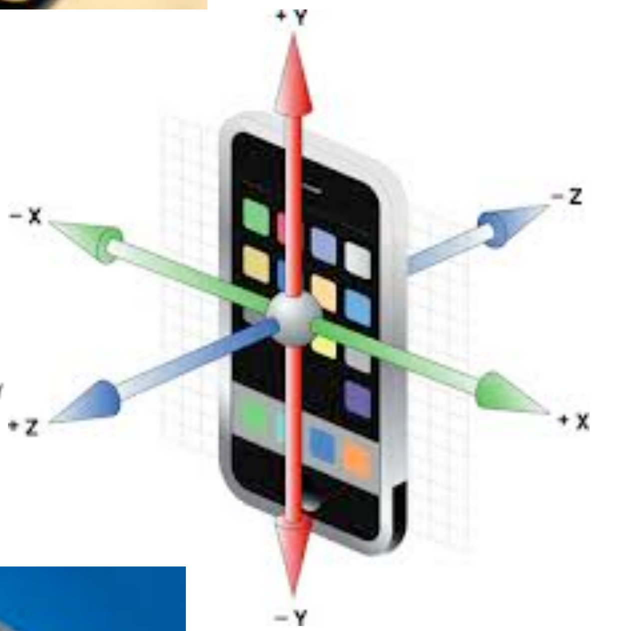
Vibrazioni indotte all base




Trasmissibilità

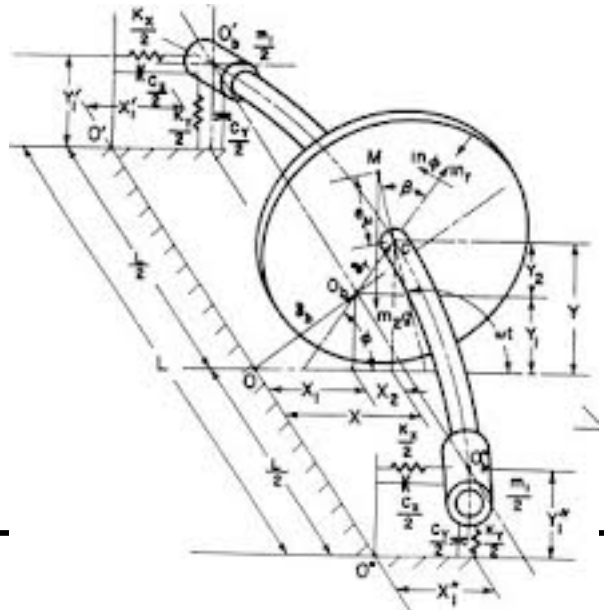
Accelerometri e Vibrometri



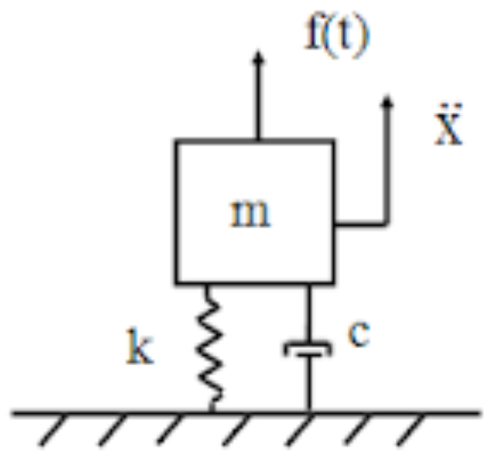




Attenuatori dinamici

Rotore di Jeffcott



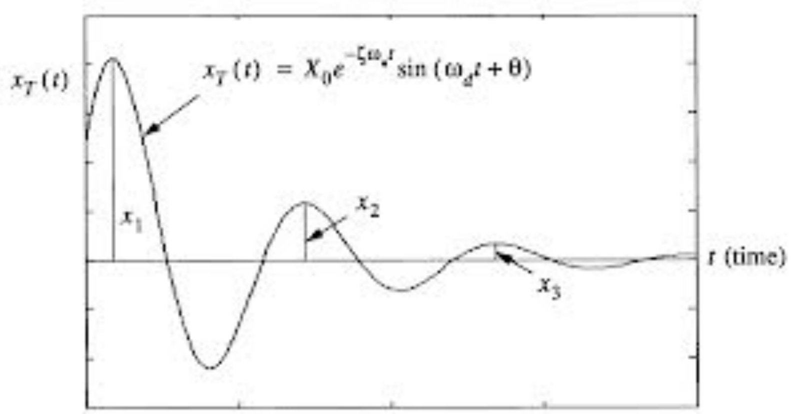
# Sistemi SDOF - decremento logaritmico




Si consideri un sistema SDOF,
con smorzatore viscoso (sub critico)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = X_o e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t + \vartheta)$$ soluzione generale




Si prendano due istanti $x_1$ e $x_2$, distanti tra loro un periodo e si faccia il rapporto tra gli spostamenti..

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{X_0 e^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 + \vartheta)}{X_0 e^{-\zeta\omega_n (t_1+T_d)}\cos(\omega_d (t_1 + T_d) + \vartheta)}$$

..si semplifica la parte armonica…

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d} \qquad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

## Sistemi SDOF - decremento logaritmico

Si definisce il decremento lograritmico δ (come si riduce l'ampiezza di vibrazione)

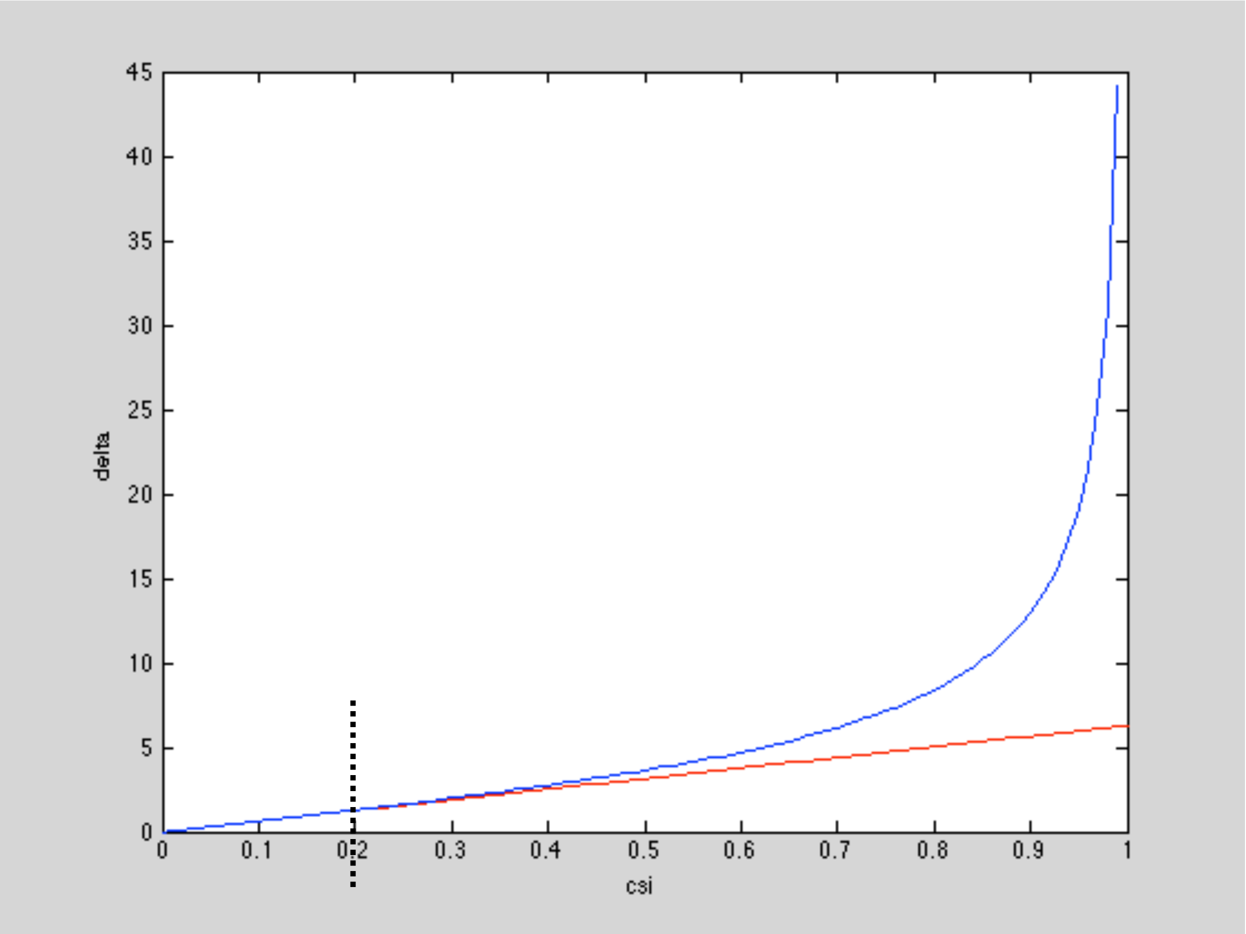
$$\delta = \ln\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right) = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$ (curva blu)

..se ζ<<1 (comunemente <.1)
si approssima con..

$$\delta \cong 2\pi\zeta$$ (retta rossa)

..se invece di un solo periodo
se ne prendono m..

$$\delta = \frac{1}{m}\ln\left(\frac{x_1(t)}{x_{m+1}(t)}\right)$$



# Sistemi SDOF - smorzamento equivalente

Meccanismi dissipativi complessi (eq diff. non lineare) possono essere sostituiti da uno smorzatore viscoso equivalente..che dissipa la stessa energia in un ciclo.
La variazione di energia nel tempo di uno smorzatore viscoso è:

$$\frac{dW}{dt} = forza * velocità = -c\dot{x} * \dot{x} = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

..immaginando un moto armonico x=Xcos($\omega_d$t)..
l'energia dissipata da tale smorzatore in un ciclo è:

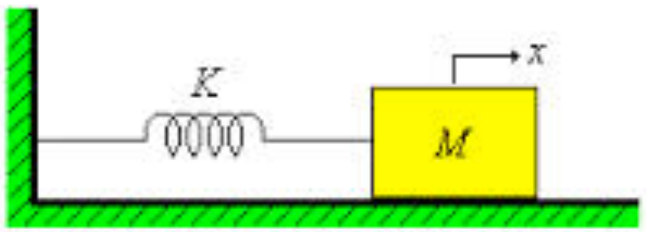
$$\Delta W = -\int_0^{2\pi/\omega_d} c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = -\int_0^{2\pi} cX^2\omega^2{}_d \sin^2(\omega_d t)\, d(\omega_d t) = -\pi c X^2 \omega_d$$

..da questa si può ricavare l'espressione dello smorzamento viscoso equivalente:

$$c_{eq} = -\frac{\Delta W}{\pi X^2 \omega_d}$$

Sistemi SDOF - smorzamento columbiano

..tipico dei fenomeni d'attrito.. (smorzatore lavatrici)




la forza di richiamo elastica $f_S = kx$
è contrastata dalla forza d'attrito fd=μMg
(si oppone al moto!)

$$m\ddot{x} + kx + \mu Mg = 0$$

$$m\ddot{x} + kx - \mu Mg = 0$$

..in un semi-periodo (massa avanza, xdot>0)
..nel successivo (massa ritorna, xdot<0)

Alla fine di ogni semi-periodo, cambia l'eq del moto… e le condizioni iniziali…

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t - \frac{\mu Mg}{k}$$

$$x(t) = A_3 \cos\omega_n t + A_4 \sin\omega_n t + \frac{\mu Mg}{k}$$

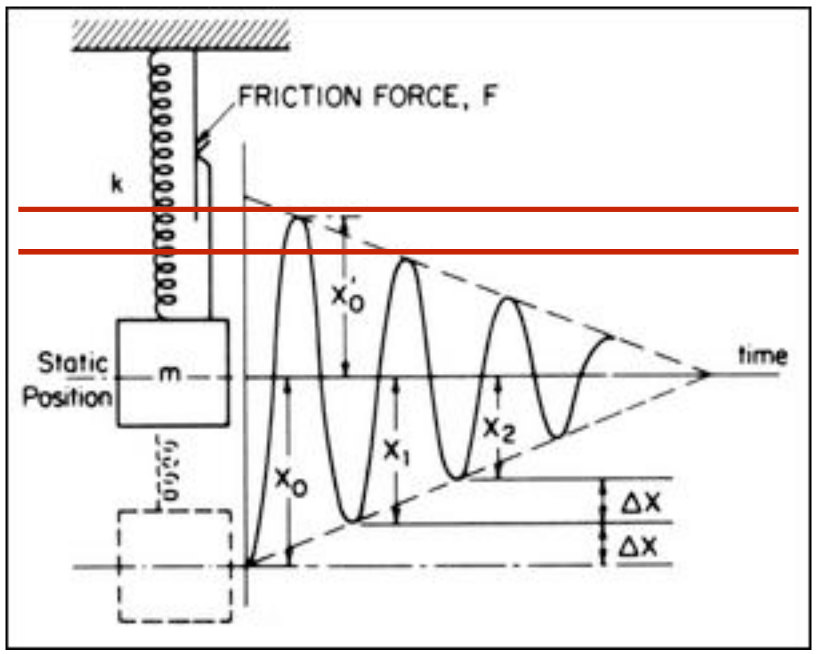
..con spostamento limite …

$$x_l = \frac{\mu Mg}{k} = \frac{\mu g}{\omega_n}$$

# Sistemi SDOF - smorzamento columbiano

$$x_l = \frac{\mu Mg}{k} = \frac{\mu g}{\omega^2_n}$$

Se lo spostamento è minore di xl,
la forza d'attrito è maggiore di quella di richiamo elastico! la massa si ferma.




Partendo da $x(0)=X_0$, e $xdot(0)=0$,
si usa l'eq(2) per il semi-periodo1…

$$A_3 = X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \quad A_4 = 0$$

$$x(t) = \left( X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu Mg}{k}$$

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -\left( X_0 - \frac{2\mu Mg}{k} \right)$$

Alla fine del semi-periodo1, avrà spostamento e velocità ch saranno le c.i. semi-periodo2,

Nel semi-periodo2, uso eq(1),

$$A_1 = -X_0 - \frac{3\mu Mg}{k} \quad A_2 = 0$$

$$x(t) = \left( X_0 - \frac{3\mu Mg}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu Mg}{k}$$

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = \left( X_0 - \frac{4\mu Mg}{k} \right)$$

fine semi-periodo2, c.i. semi-periodo3…

# Sistemi SDOF - smorzamento columbiano

per ogni ciclo completo
(semi-periodo di andata + semi-periodo di ritorno)…
si perde..

$$X_{m+1} = \left( X_m - \frac{4\mu Mg}{k} \right)$$

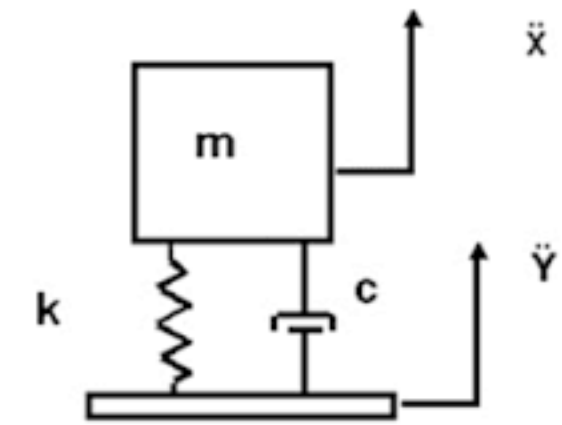
la frequenza del sistema smorzato non cambia rispetto sl caso non smorzato!!
(con smorzamento viscoso si!!) $\omega_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

con smorzamento colombiano la massa si può fermare anche in posizione diversa da quella di "equilibrio elastico", (x(∞)=0)
nel caso viscoso no!!

..provate a costruire un modello Simulink…

# Sistemi SDOF - eccitazione dalla base

Dal diagramma di corpo libero, si scrive l'equazione del moto..




$$m\ddot{x} + c\left(\dot{x} - \dot{y}\right) + k\left(x - y\right) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

$$y = Y\sin\Omega t$$

Supponendo una forzante armonica, la risposta sarà armonica con la stessa frequenza dell'eccitazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t \qquad \begin{cases} A = kY \\ B = c\Omega Y \end{cases}$$

La soluzione particolare sarà:

$$x_p = \frac{kY\sin\left(\Omega t - \vartheta\right)}{\left[\left(k - m\Omega^2\right)^2 - \left(c\Omega\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{c\Omega Y\cos\left(\Omega t - \vartheta\right)}{\left[\left(k - m\Omega^2\right)^2 - \left(c\Omega\right)^2\right]^{1/2}}$$

# Sistemi SDOF - eccitazione dalla base

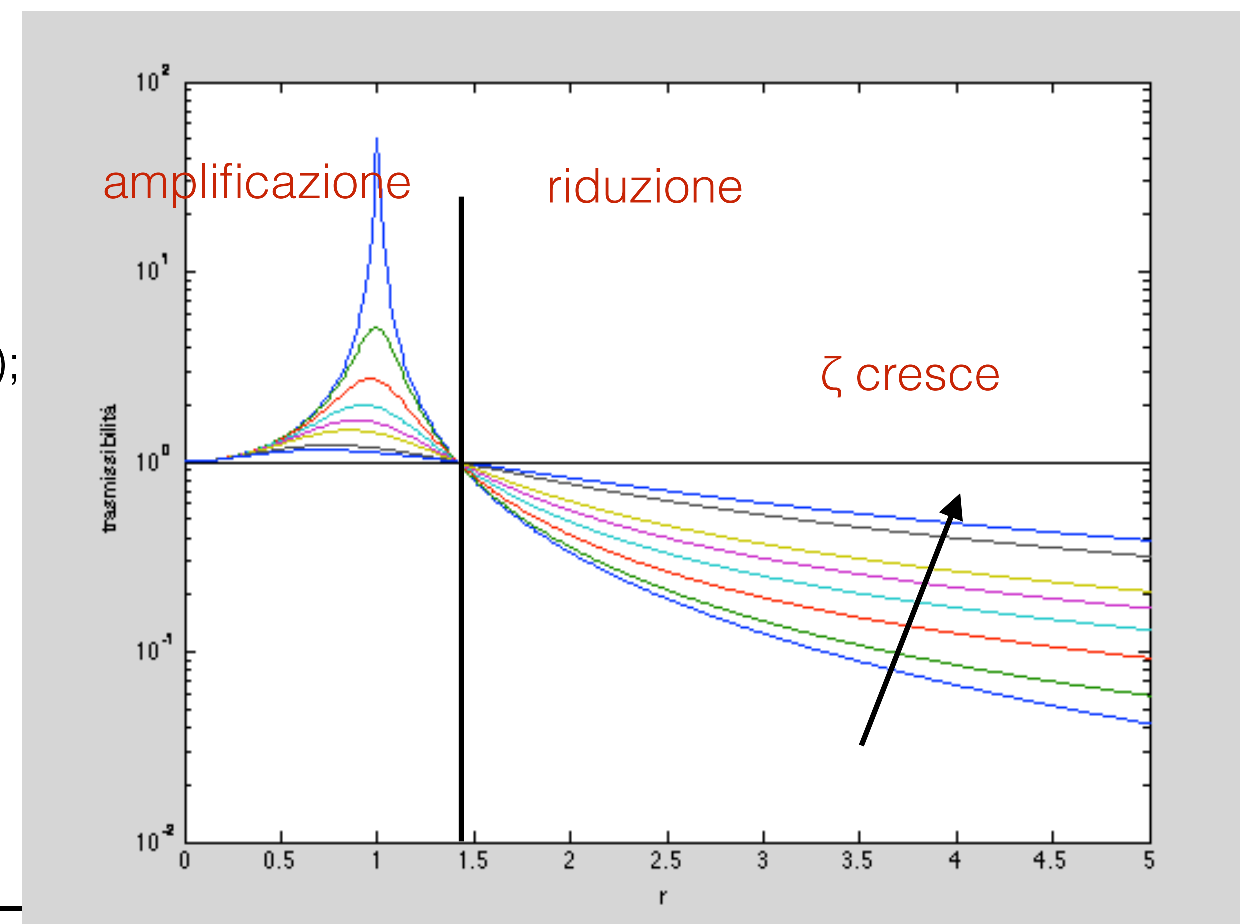
$$\frac{X}{Y}=\left[\frac{k^2+\left(c\Omega\right)}{\left(k-m\Omega^2\right)^2-\left(c\Omega\right)^2}\right]^{1/2}$$

..prendendone il modulo..
si ottiene la trasmissibilità X/Y

$$\frac{X}{Y}=\left[\frac{1+\left(2\xi r\right)^2}{\left(1-r^2\right)^2-\left(2\xi r\right)^2}\right]^{1/2}$$

..con le solite sostituzioni e con $r=\dfrac{\Omega}{\omega}$
rapporto tra la pulsazioni
di eccitazione e naturale

```
r=0:0.01:5;
csi=[0.01 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.8 1];
for i=1:size(csi,2)
tr(i,:)=sqrt((1+(2*csi(i)*r).^2)./((1-r.^2).^2+(2*csi(i)*r).^2));
end
semilogy(r,tr)
hold
un=ones(size(r,2));
semilogy(r,un,'k')
xlabel('r')
ylabel('trasmissibilità')
```



Con le stesse equazioni può poi calcolare la forza trasmessa alla base da sistema oscillante:

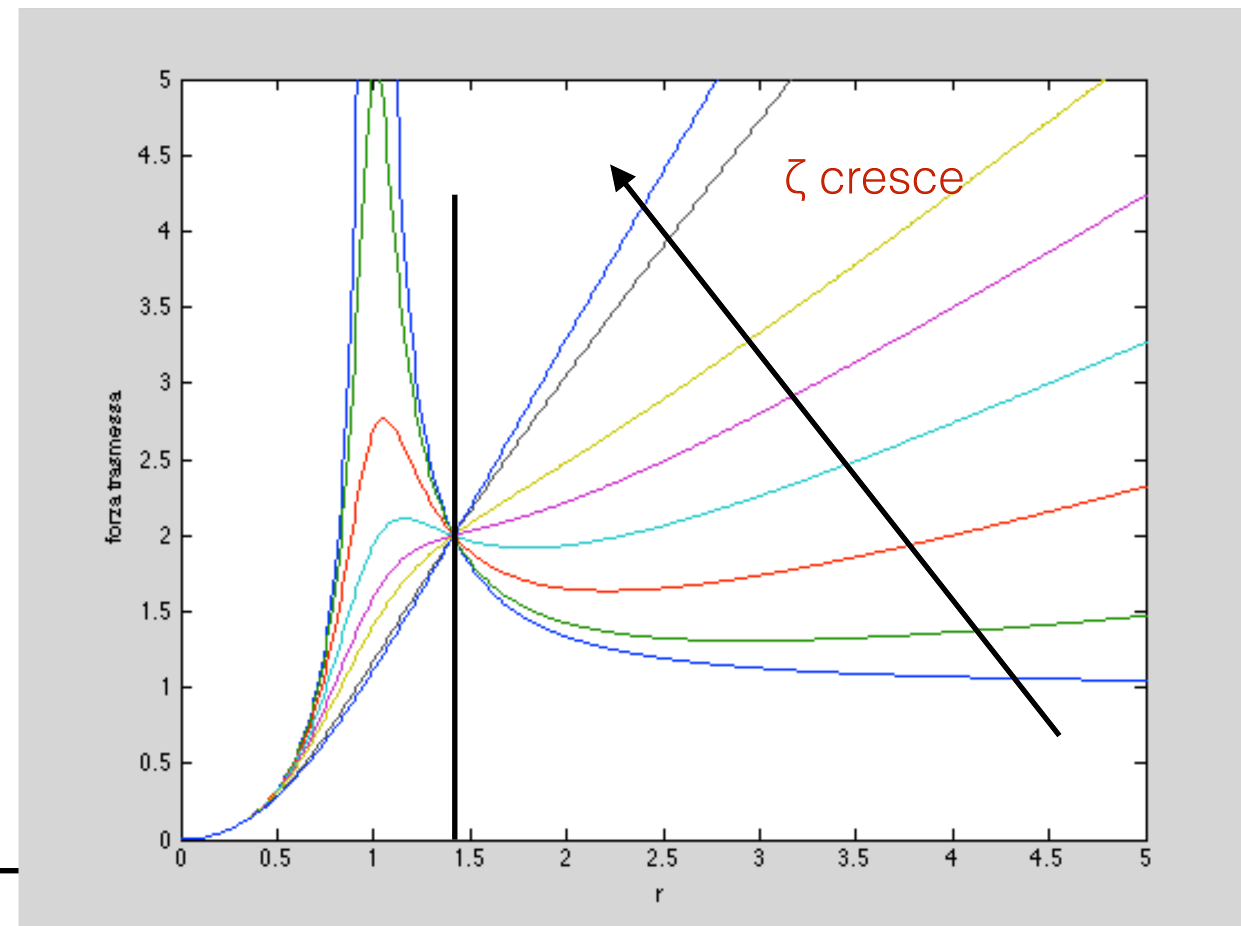
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

$$F_t = -m\ddot{x} = c\left(\dot{x} - \dot{y}\right) + k\left(x - y\right)$$

e calcola il rapporto tra la forza dinamica e il cedimento statico (coff. di amplificazione):

$$\frac{F_t}{kY} = r^2 \left[ \frac{1 + \left(2\xi r\right)^2}{\left(1 - r^2\right)^2 - \left(2\xi r\right)^2} \right]^{1/2}$$

..aumentando lo smorzamento
ed aumentando r cresce la forza trasmessa!…



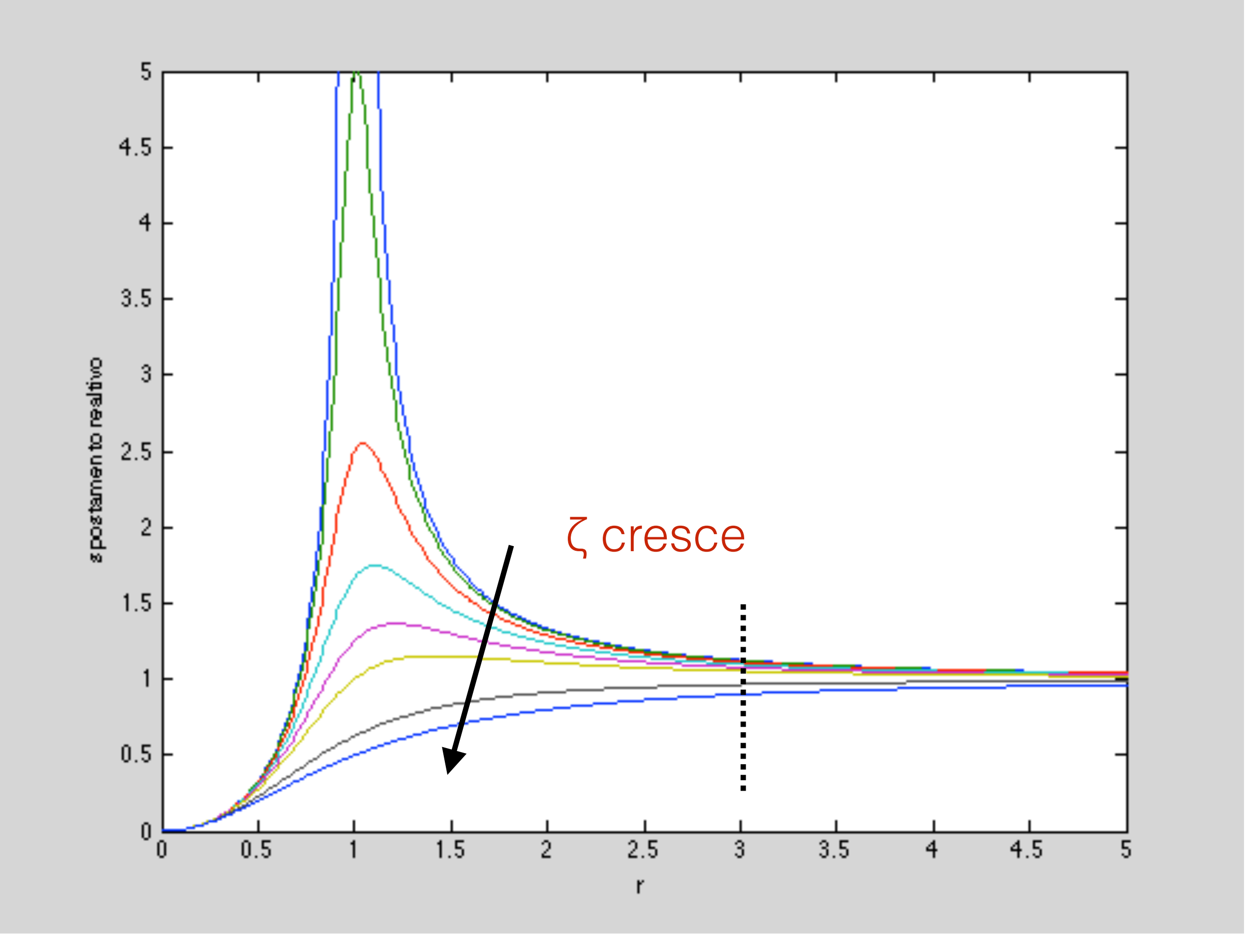
# Sistemi SDOF - eccitazione dalla base

..si può calcolare lo spostamento relativo… $z = x - y$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\Omega^2 Y \sin \Omega t$$

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 - \left(2\xi r\right)^2}}$$

..il rapporto Z/Y dice di quanto si sposta la massa rispetto alla base..
per r>3 il rapporto è pressoché unitario…
..Z=Y..
(sensore per la misura dello spostamento della base  > vibrometro!)

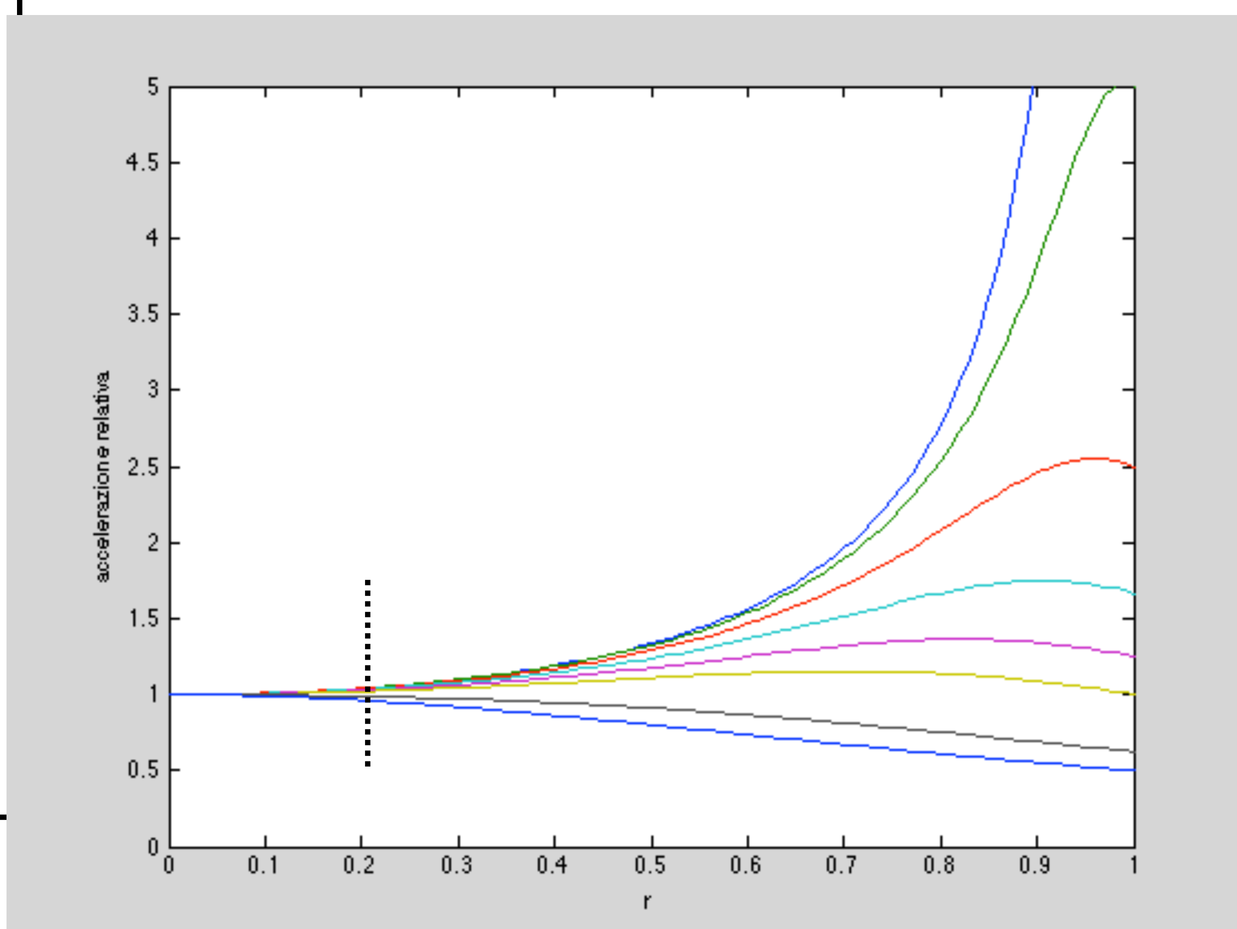


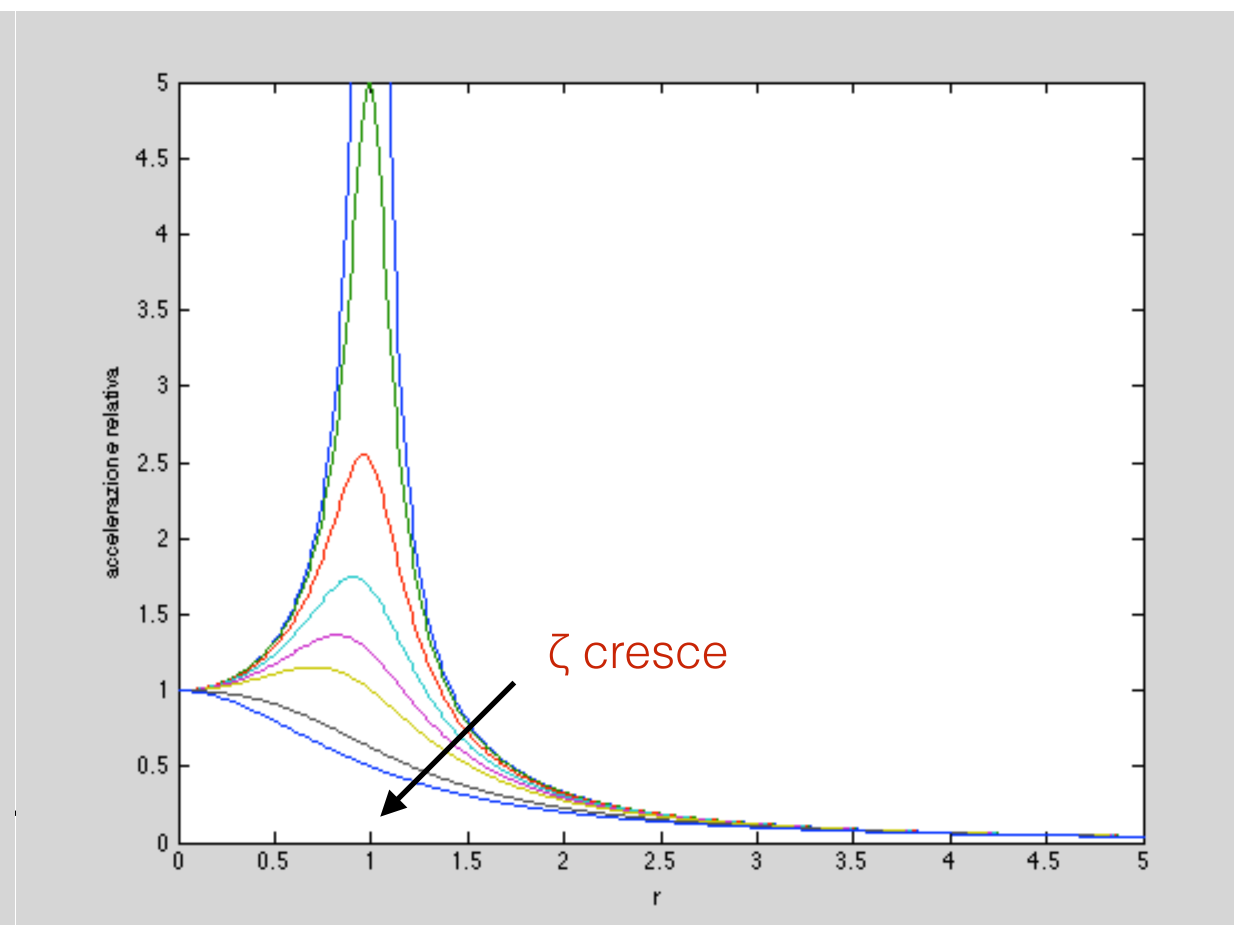
# Sistemi SDOF - eccitazione dalla base

..volendo un sensore che misuri l'accelerazione…

$$\frac{Z}{Y}=\frac{\left(\dfrac{\Omega}{\omega}\right)^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2-\left(2\xi r\right)^2}} \qquad \frac{\ddot{z}}{\ddot{y}}=\frac{\omega^2 Z}{\Omega^2 Y}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2-\left(2\xi r\right)^2}}$$

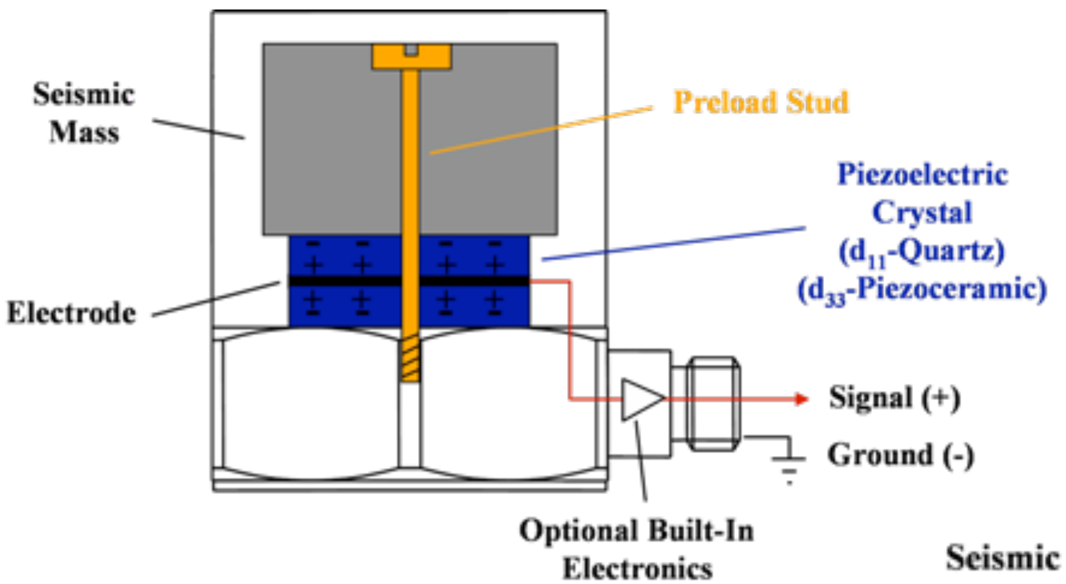
per r<0.33 il rapporto è pressoché unitario…
..Z=Y.. (sensore per la misura dell'accelerazione della base
> accelerometro!)

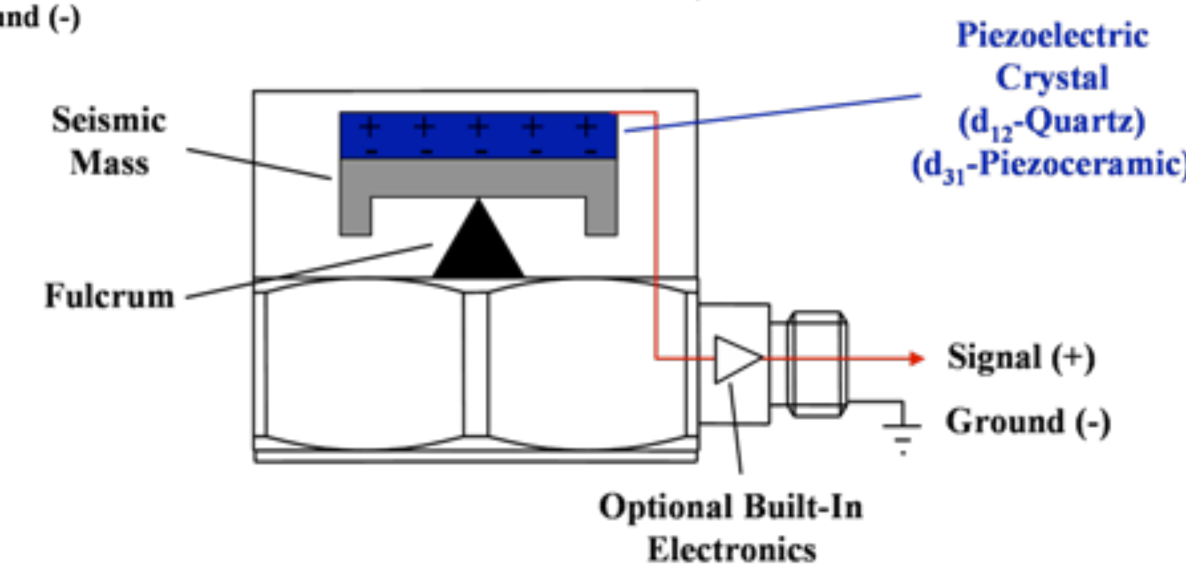


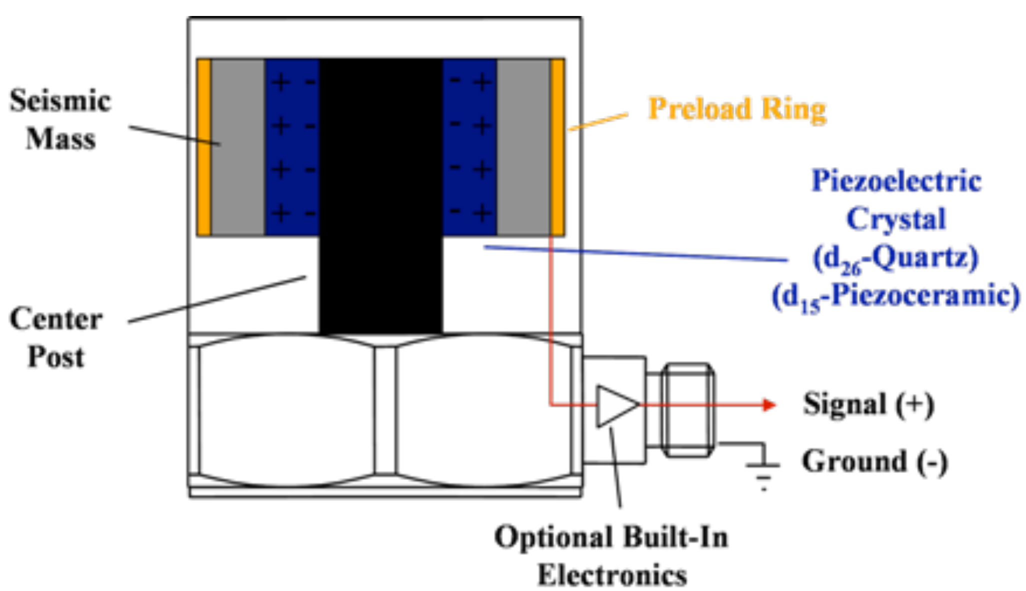



# Sistemi SDOF - eccitazione dalla base

..esempi costruzione accelerometri…



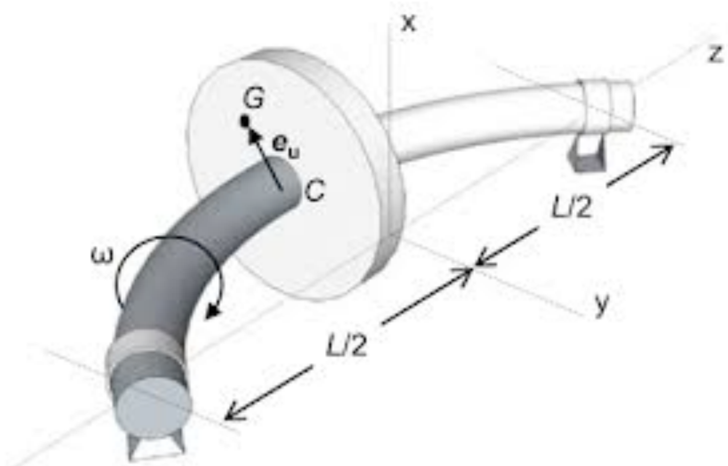




..more later on sensors

## Sistemi SDOF - rotture di Jeffcot

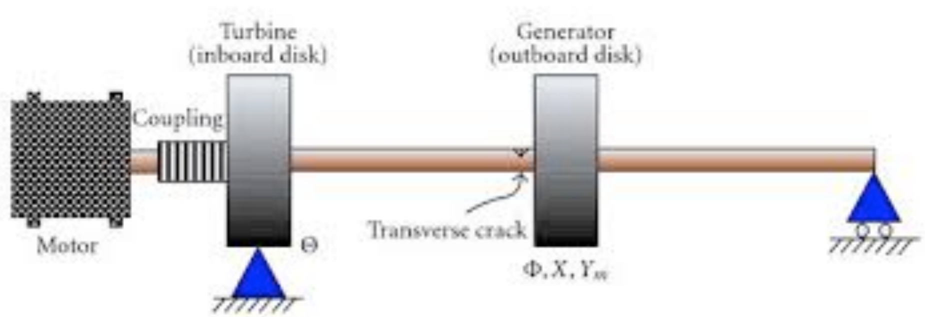
Si consideri un sistema costituito da un albero di lunghezza L vincolato alle estremità ed un disco calettato su questo a L/2, l'albero sia senza massa ed il rotore rappresentato da un disco di massa m posta ad una distanza "e" dall'asse…




Si suppone che il rotore ruoti con una certa velocità. Sarà necessario equilibrare (nel piano x e nel piano y) la forza centrifuga della massa squilibrante la forza elastica dell'albero…

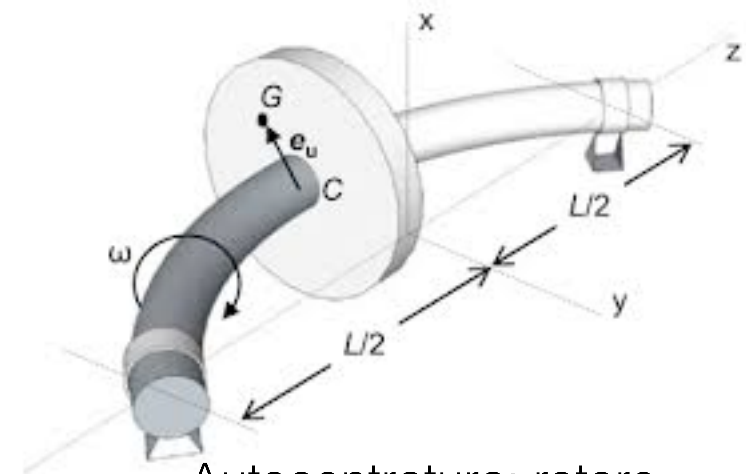
$$m\ddot{x} + kx = me\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

con la solita procedura…




$$x = \frac{em\Omega^2}{k - m\Omega^2} = e\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

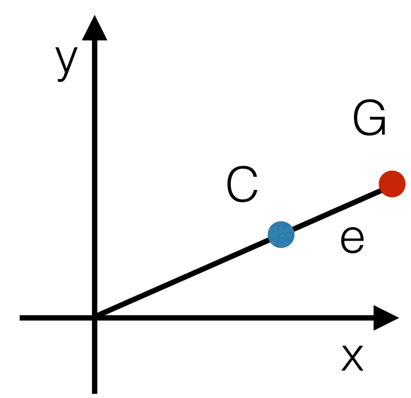
# Sistemi SDOF - rotture di Jeffcot

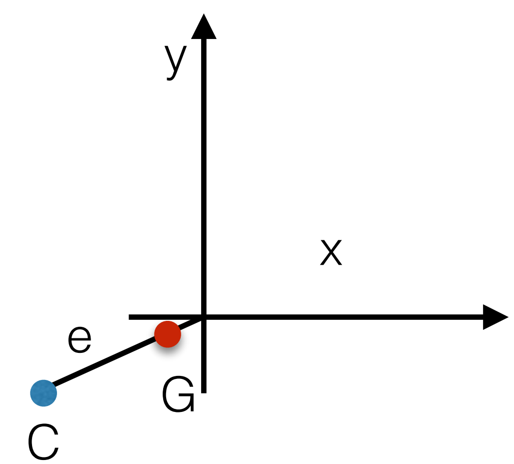


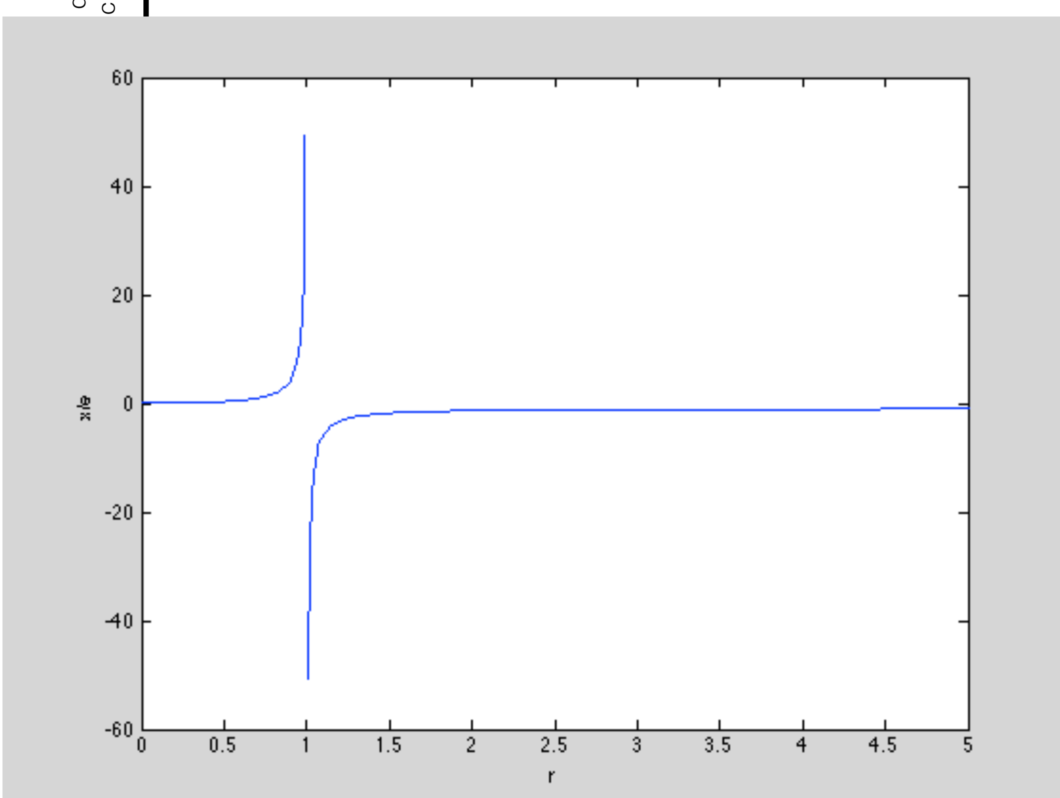

Autocentratura: rotore ruota attorno centro di massa piuttosto che centro geometrico

$$x = \frac{em\Omega^2}{k - m\Omega^2} = e\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

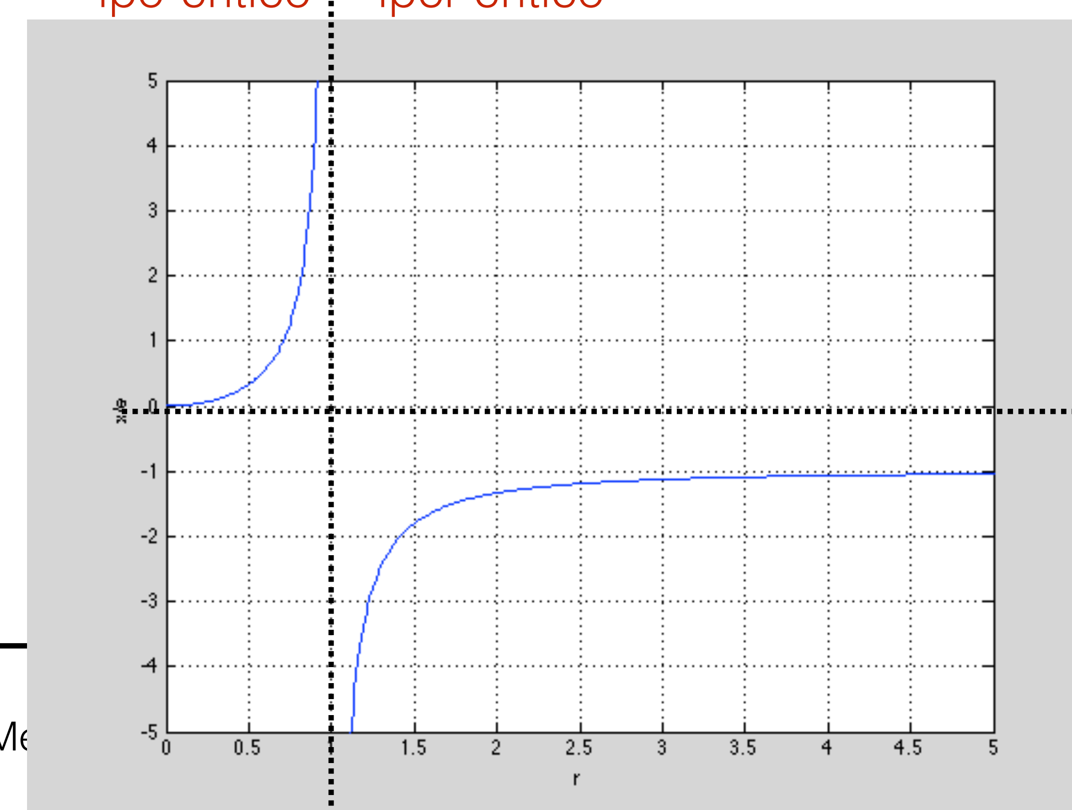
$$\frac{x}{e} = \frac{r^2}{1 - r^2}$$



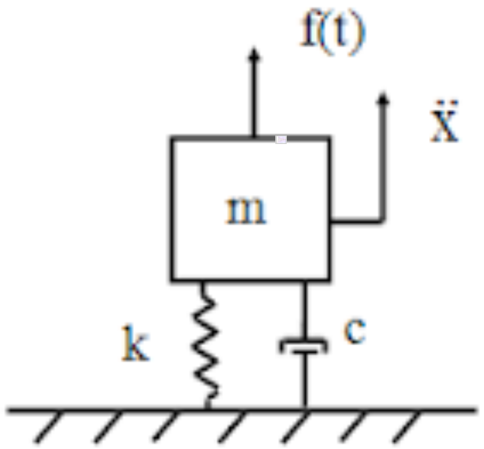




ipo-critico iper-critico



# Sistemi SDOF - risposta eccitazione generica




..se l'eccitazione non è di tipo armonico,
la soluzione particolare deve essere calcolata caso per caso ..

es. eccitazione a gradino

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_o$$

$$t \geq 0$$

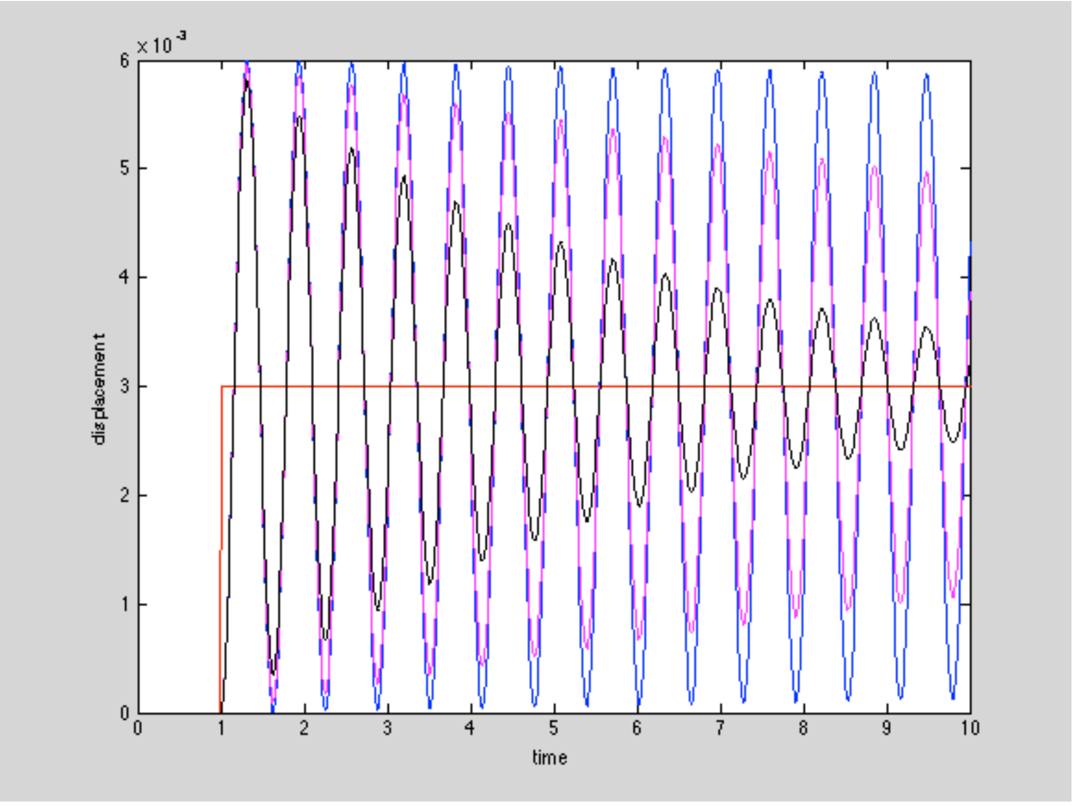
$$x_p = \frac{p_o}{k}$$

$$x = \frac{p_o}{k} + e^{-\zeta\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right)$$

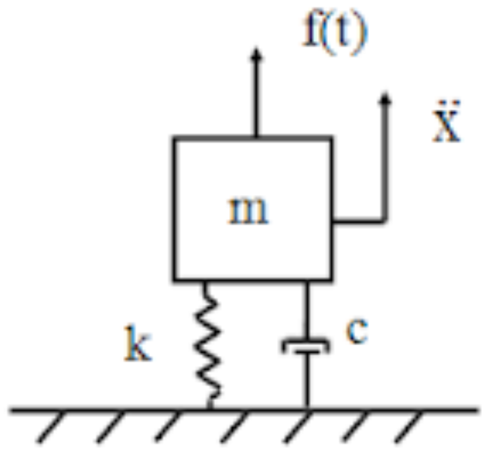
con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{p_o}{k}\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t - \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right]\right\}$$



# Sistemi SDOF - risposta eccitazione generica




es. eccitazione rampa / smorzamento nullo

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} \dfrac{t}{t_r} p_0 \\ p_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le t \le t_r \\ t_r \le t \end{cases}$$

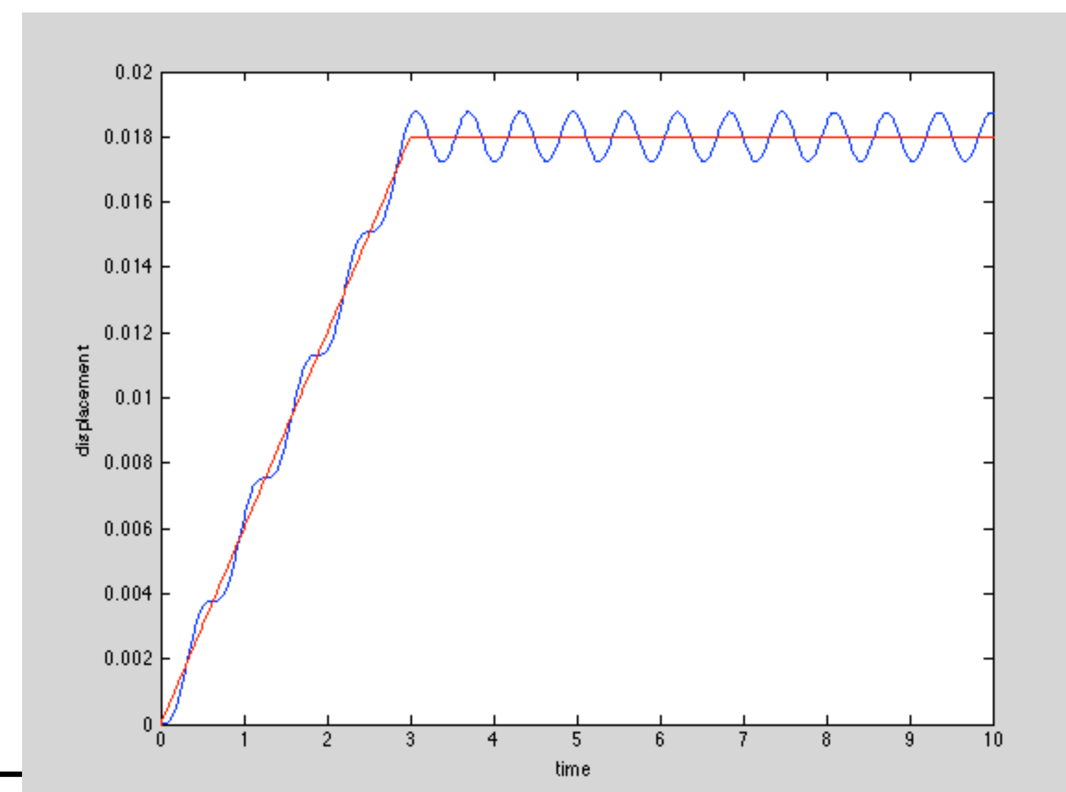
$$x_p = \left(\frac{t}{t_r}\right)\frac{p_o}{k} \qquad x = \left(\frac{t}{t_r}\right)\frac{p_o}{k} + \left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right)$$

con le condizioni al contorno

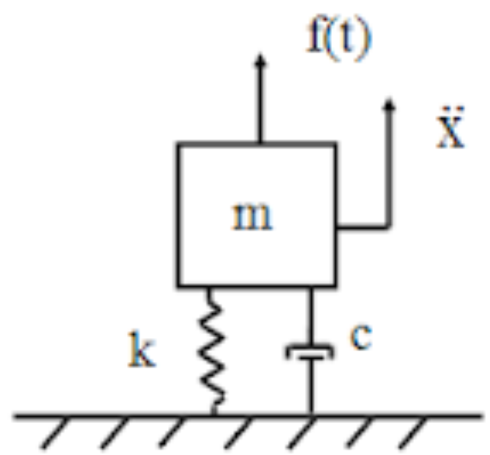
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{p_o}{k}\left\{\left(\frac{t}{t_r}\right) - \left(\frac{1}{\omega_n t_r}\right)\sin\omega_n t\right\}$$

$$x = \frac{p_o}{k}\left\{1 + \left(\frac{1}{\omega_n t_r}\right)\left[\sin\omega_n\left(t - t_r\right) - \sin\omega_n t\right]\right\}$$



## Sistemi SDOF - risposta eccitazione generica




es. eccitazione impulso unitario / smorzamento nullo

$$I = \int_o^{t_d} p(t)\,dt \qquad t_d \ll T_n$$

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} p(t) \\ 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le t \le t_d \\ t_d \le t \end{cases}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

integrando, e valutanto per $t_d$ ->0

$$m\dot{x} + kx_{av}t_d = I$$

$$m\dot{x}\left(0^+\right) = I$$

nuova condizione
al contorno...

$$\dot{x}\left(0^+\right) = \frac{I}{m}$$

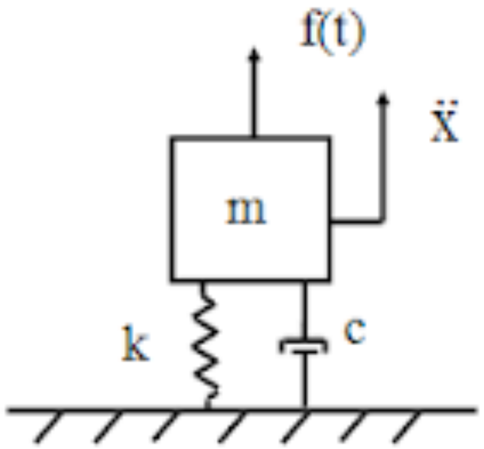
risposta all'impulso unitario

$$x(t) = \left(\frac{I}{m\omega_n}\right)\sin\omega_n t$$

con smorzamento ζ<<1

$$x(t) = \left(\frac{I}{m\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

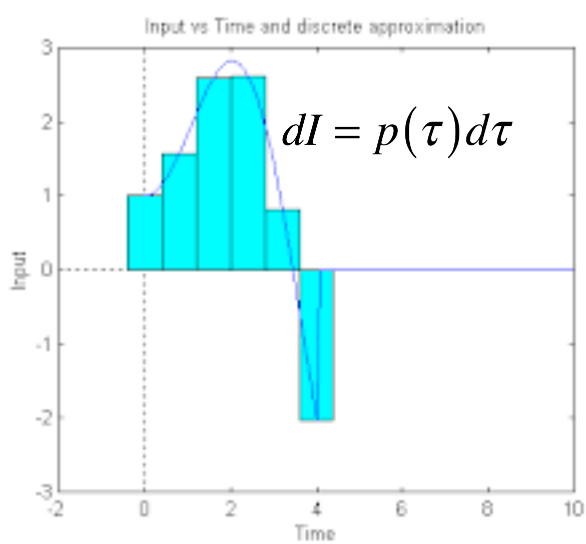
# Sistemi SDOF - risposta eccitazione generica




es. eccitazione generica / integrale Duhamel

$$x(t) = \left( \frac{I}{m\omega_n} \right) \sin \omega_n t$$ risposta all'impulso unitario

$$dx(t) = \left( \frac{dI}{m\omega_n} \right) \sin \omega_n (t - \tau)$$ risposta all'impulso infinitesimo



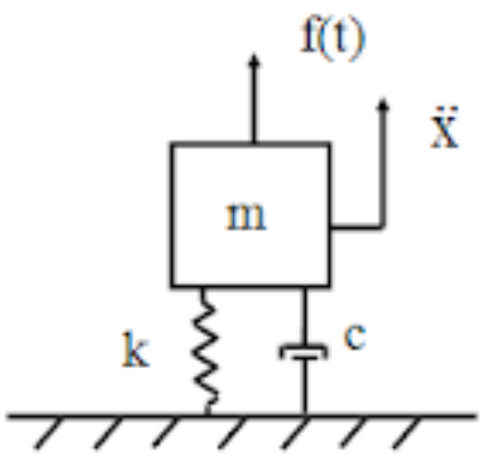

divido l'eccitazione generica in una serie di impulsi infinitesimi (scalati dal valore della funzione (p(τ))…

la risposta sarà l'integrale di tutte le risposte infinitesime…

$$x(t) = \left( \frac{I}{m\omega_n} \right) \int_0^t p(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \qquad x(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Integrale di Duhamel - Integrale di Convoluzione, tra eccitazione e risposta all'impulso

# Sistemi SDOF - risposta eccitazione generica




..se il sistema è smorzato..

$$x(t)=\left(\frac{I}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)=\left(\frac{I}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)e^{(j\omega_d-\zeta\omega_n)(t-\tau)}\,d\tau$$

..nel caso in cui il sistema avesse C. I. diverse da zero, la sol.generica sarebbe…

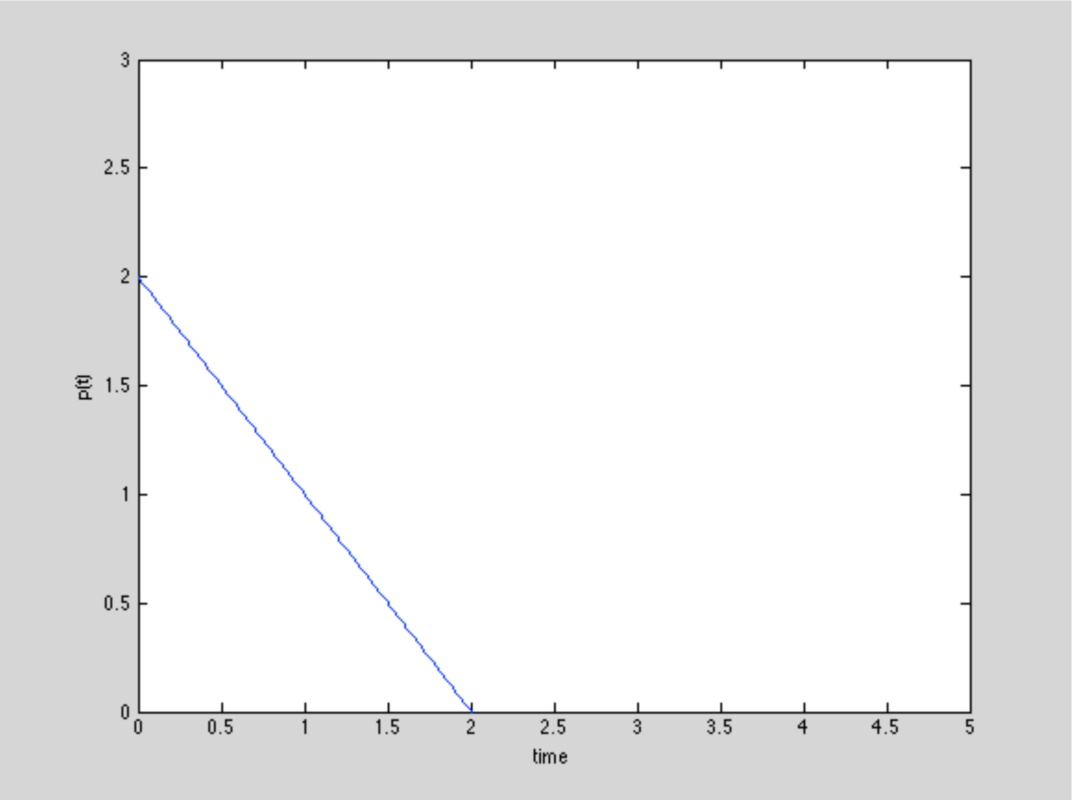
$$x(t)=\left(\frac{I}{m\omega_n}\right)\int_0^t p(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau+x_0\cos(\omega_n t)+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n t)$$

..senza smorzamento

$$x(t)=\left(\frac{I}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau+x_0e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\cos(\omega_d t)+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin(\omega_d t)$$

..con smorzamento

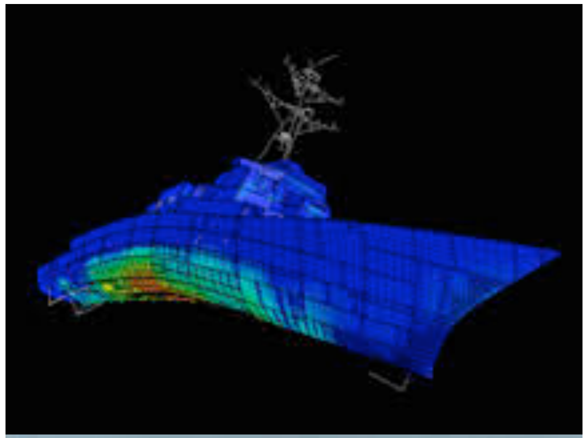
# Sistemi SDOF - risposta eccitazione generica




$$p(t)=\begin{cases} p_o\left(1-\dfrac{t}{t_d}\right) & -0\le t\le t_d \\ 0 & t_d\le t \end{cases}$$

..sistema non smorzato $0<t<t_d$

$$x(t)=\left(\frac{p_o}{k}\right)\left\{\sin\omega_n t\left[\sin\omega_n t-\left(\frac{t}{t_d}\right)\sin\omega_n t-\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right)\cos\omega_n t+\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right)\right]+\right.$$
$$\left.-\cos\omega_n t\left[-\cos\omega_n t+\left(\frac{t}{t_d}\right)\cos\omega_n t-\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t+1\right]\right\}$$



..$t_d<t$

$$x(t)=\left(\frac{p_o}{k}\right)\left\{\sin\omega_n t\left[-\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right)\cos\omega_n t+\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right)\right]+\right.$$
$$\left.-\cos\omega_n t\left[1-\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t\right]\right\}$$

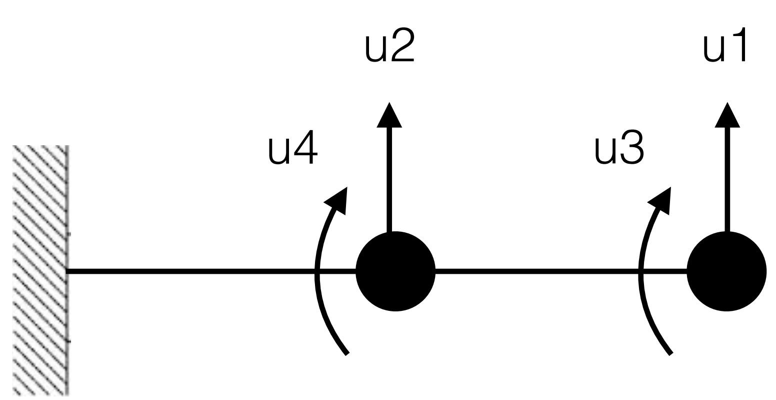
## Sistemi MDOF - modale

le matrici di massa e rigidezza sono simmetriche (teorema reciprocità Maxwell)

sono definite positive, derivano da T e V, per ogni spostamento e distribuzione di velocità diversa da 0

la matrice di rigidezza può essere semidefinita positiva
se ci sono moti rigidi (V=0) e flessibili (V>0);
det[k]=0 o se il rango<ordine… modi rigidi

se ci sono gdl senza informazioni relative all'inerzia la matrice di massa può essere semidefinita positiva det[m]=0




$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

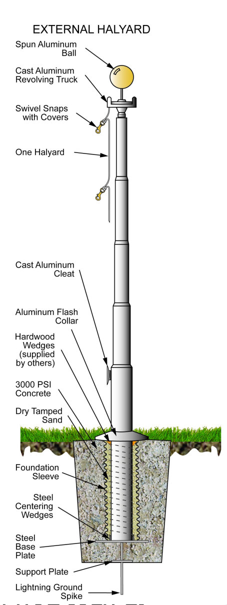
gli autovalori sono tra loro ortogonali e costituiscono una base per descrivere tutti gli spostamenti del sistema, se il sistema ha N DOF, avrà anche N autovalori

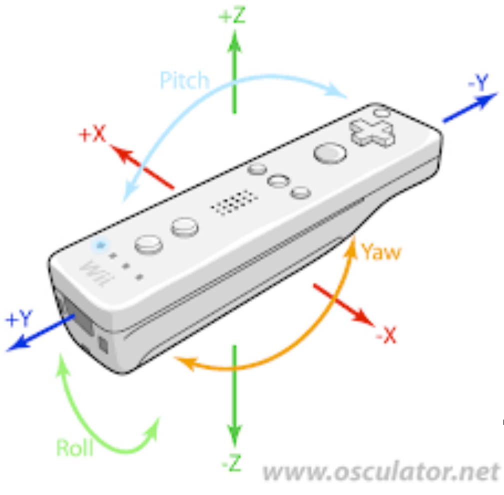
si ordinano in ordine crescente, posso essere nulli o ripetuti

$$0 \le \omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \omega_3^2 \ldots \le \omega_N^2$$

gli autovalori nulli corrispondono a moti di corpo rigido > solo a bassa frequenza max 6 moti rigidi, corpo libero nello spazio… es aereo

gli autovalori ripetuti appartengono a moti di corpo simmetrici







Luigi BREGANT
bregant@units.it

gli autovalori sono tra loro ortogonali!

prendiamo due autovalori distinti $\omega_r$, $\omega_s$ $\omega_r \neq \omega_s$
e i relativi autovettori

$$[k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$\{\phi\}_s^T [k]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$ *..moltiplico per trasposta autovetture s

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_r^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$ ..per la simmetria..

$$[k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s$$

$$\{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$ **..moltiplico per trasposta autovetture r

$$0 = \left(\omega_s^2 - \omega_r^2\right)\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s$$ ..sottraggo * a **

$$\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0 \qquad \{\phi\}_r^T [k]\{\phi\}_s = 0$$

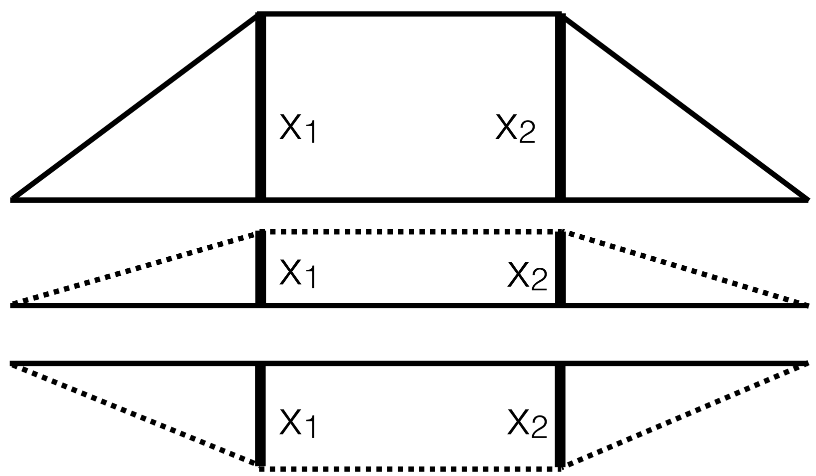
$$\{\phi_i\}_r^T [k]\{\phi_i\}_r = \omega_r^2 \{\phi_i\}_r^T [m]\{\phi_i\}_r$$

# Sistemi MDOF - modale

$$k_r = \omega_r^2 m_r$$

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$$

gli autovalori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa!
(derivano da valori di $\omega_i$ che annullano il det. matrice rigidezza dinamica!)




definito un elemento del vettore, si derivano gli altri (N-1) elementi ..

esistono diverse maniere di scalare le forme modali:

Scalo il modo r: $\{\phi_i\}_r = 1$ per una generica coordinata i

$\{\phi_i\}_r = 1$ per la coordinata con spostamento massimo i

$\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_r = M_r = 1$ la massa modale abbia un valore definito

$\left\|\phi\right\|_r = 1$ la norma (euclidea, infinito,..) dell'autovettore sia unitaria




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - modale

se gli autovalori sono distinti.. si calcolano così:

$$\left([k]-\omega^2[m]\right)\{X\}=\{0\}$$

l'equazione del moto…

$$\left([k]-\omega_r^2[m]\right)\{\phi_r\}=\{0\}$$

in risonanza…

$$\begin{array}{cc} \scriptstyle 1\times1 & \scriptstyle 1\times N-1 \\ \end{array} \quad \scriptstyle 1\times1$$

$$\begin{bmatrix} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ba}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \scriptstyle N-1\times1 & \scriptstyle N-1\times N-1 \\ \end{array} \quad \scriptstyle N-1\times1$$

partizionando opportunamente…

in risonanza det[D($\omega_r$)]=0, matrice singolare, ma $\omega_r$ è un autovalore distinto il rango di [D($\omega_r$)] sarà N-1 quindi [$D_{bb}(\omega_r)$] non è singolare ed è invertibile..

$$\underbrace{\{\phi_b\}}_{N-1\times1}=-\underbrace{\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}}_{N-1\times N-1}\underbrace{\{D_{ba}(\omega_r)\}}_{N-1\times1}$$

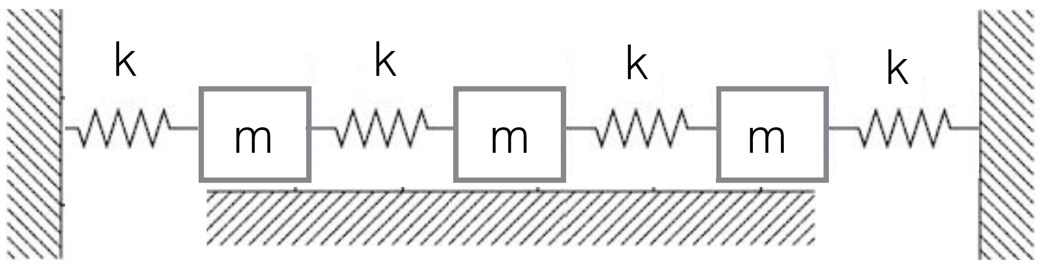
$$\{\phi_r\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}\{D_{ba}(\omega_r)\} \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

esempio…

$$[m]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

m=1
k=1



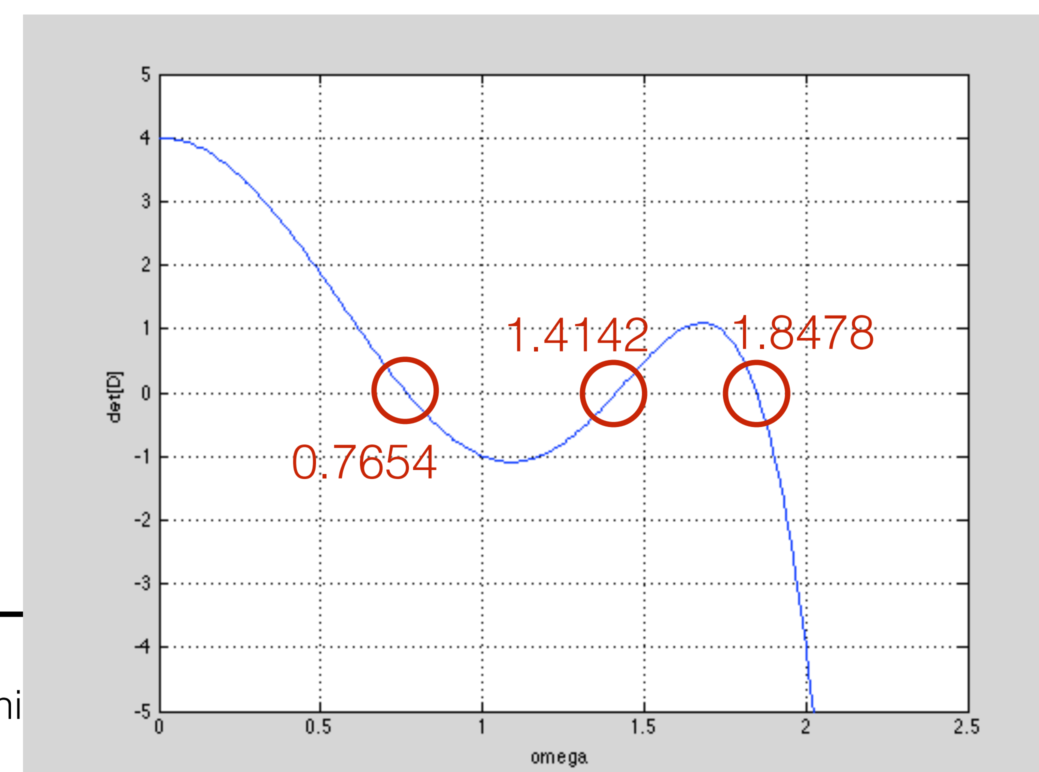

$$[k]=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\left[D(\omega)\right]=\begin{bmatrix}2-\omega^2&-1&0\\-1&2-\omega^2&-1\\0&-1&2-\omega^2\end{bmatrix}$$

$$\det\left[D(\omega)\right]=\left(2-\omega^2\right)\begin{bmatrix}2-\omega^2&-1\\-1&2-\omega^2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1&-1\\0&2-\omega^2\end{bmatrix}$$

$$\det\left[D(\omega)\right]=\left(2-\omega^2\right)\left(\omega^4-4\omega^2+2\right)$$

andamento di det[D(ω)]



# Sistemi MDOF - modale

esempio…

per $\omega_2$ calcolo l'autovettore con le formule appena viste…

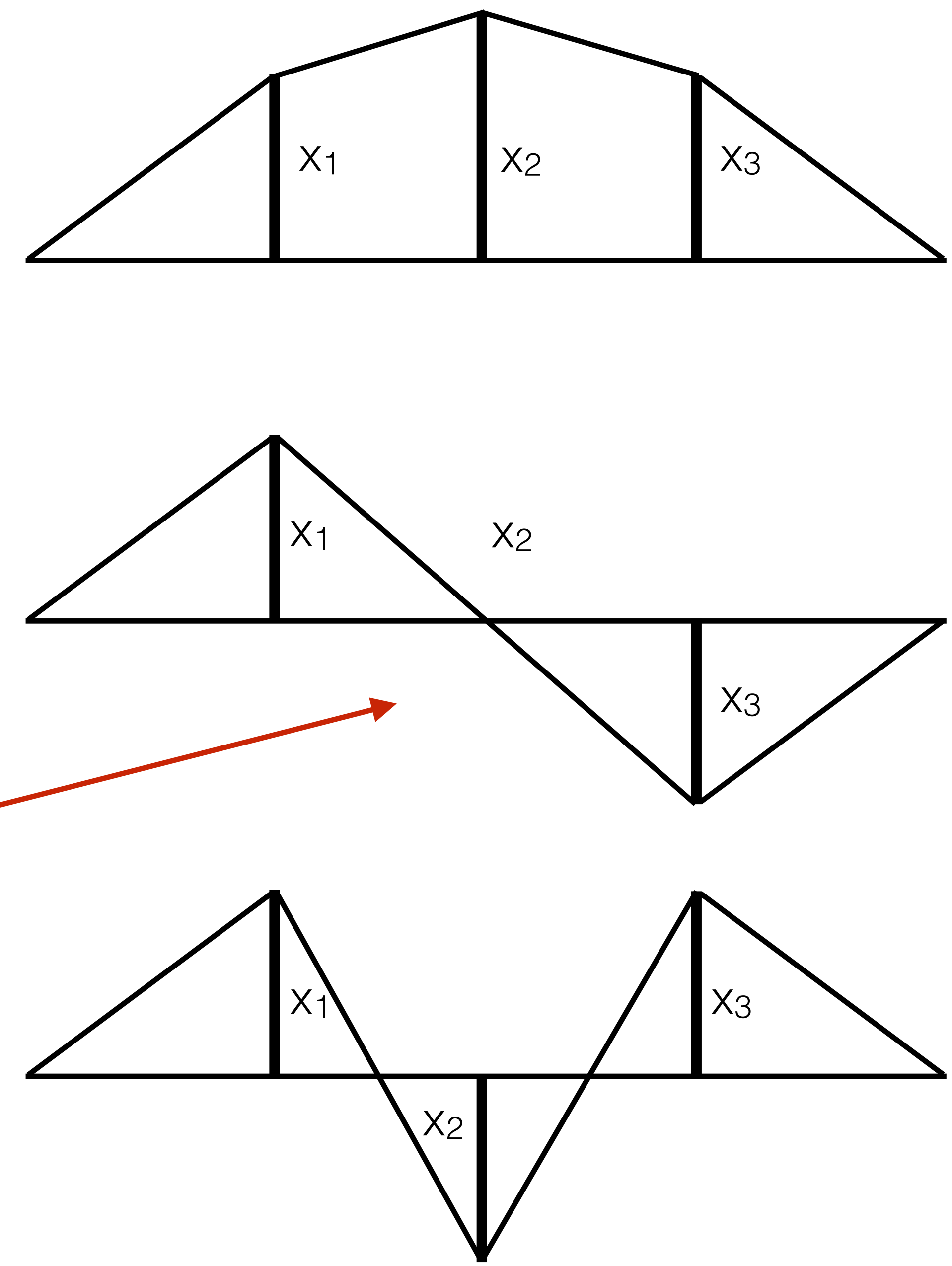
$$\left[D(\omega_2)\right]=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\phi_b\right\}=-\left[D_{bb}(\omega_r)\right]^{-1}\left\{D_{ba}(\omega_r)\right\}$$

$$\left\{\phi_b\right\}=-\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\phi_2\right\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

```
ave =
   1.0000    1.0000    1.0000
    1.4142   -0.0000   -1.4142
    1.0000   -1.0000    1.0000
```



# Sistemi MDOF - modale

esempio…

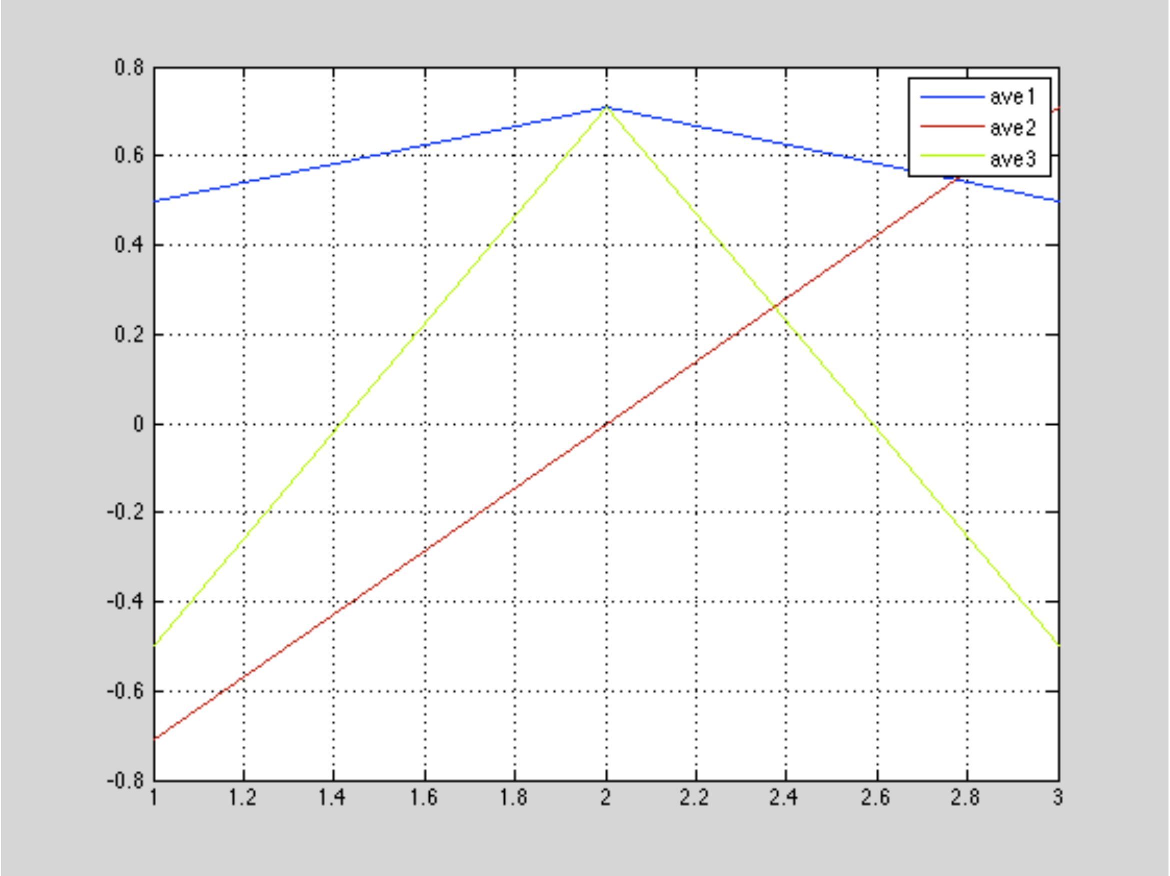
```
>> m=
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> k=
     2    -1     0
    -1     2    -1
     0    -1     2

>> [ave,ava]=eig(k,m)

ave =
    0.5000   -0.7071   -0.5000
    0.7071    0.0000    0.7071
    0.5000    0.7071   -0.5000

ava =
    0.5858         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    3.4142
```



esempio…

se scalo la matrice in modo che il primo elemento del vettore sia unitario……

ave =

| | | |
|---|---|---|
| 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 1.4142 | -0.0000 | -1.4142 |
| 1.0000 | -1.0000 | 1.0000 |

se scalo la matrice in modo che l'elemento massimo del vettore sia unitario……

ave =

| | | |
|---|---|---|
| 0.7071 | -1.0000 | -0.7071 |
| 1.0000 | 0.0000 | 1.0000 |
| 0.7071 | 1.0000 | -0.7071 |

ave'*m*ave=

| | | |
|---|---|---|
| 2.0000 | 0.0000 | -0.0000 |
| 0.0000 | 2.0000 | 0.0000 |
| -0.0000 | 0.0000 | 2.0000 |

# Sistemi MDOF - modale

se gli autovalori sono ripetuti (Δω<1%) .. si calcolano così:

immaginiamo l'ordine di ripetizione sia p, il rango di [D(ω)] sarà N-p, si potrà scrivere allora similmente a prima

$$\begin{array}{cc|c} \text{pxp} & \text{pxN-p} & \text{px1} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ba}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} \text{N-pxp} & \text{N-pxN-p} & \text{N-px1} \end{array}$$

$$\underset{\text{N-px1}}{\{\phi_b\}} = -\underset{\text{N-pxN-p}}{[D_{bb}(\omega_r)]^{-1}} \underset{\text{N-pxp}}{[D_{ba}(\omega_r)]} \underset{\text{px1}}{\{\phi_a\}}$$

il termine $\phi_a$ deve essere definito con p vettori indipendenti!

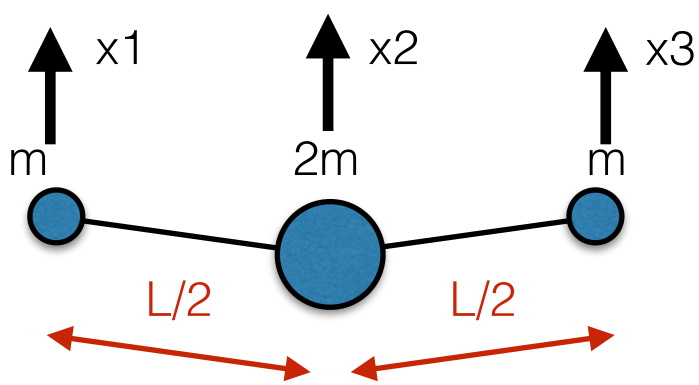
$$\{\phi_a\}_r = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ .. \\ \phi_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{\phi_a\}_{r+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dots \qquad \{\phi_a\}_{r+p-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

..espansione > sovrapposizione modale

..se i modi rappresentano una base del sistema, ogni deformazione di questo si può esprimere come una CL di forme modali…

$$\{x\} = \sum_{r=1}^{N} c_r \{\phi\}_r \qquad \text{..con…} \qquad c_r = \frac{1}{M_r}\{\phi\}_r^T [m]\{x\}$$




$$[\phi] = \left[ \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}_3 \right]$$

..se vogliamo rappresentare un modo simmetrico..
il termine $c_1$ della CL deve essere nullo…(il modo 1 è assimmetrico)

$$c_1 = \frac{\{\phi\}_1^T [m]\{x\}}{\{\phi\}_1^T [m]\{\phi\}_1} \qquad c_1 = \frac{\boxed{\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ a \end{Bmatrix}}}{\{\phi\}_1^T [m]\{\phi\}_1}$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ma \\ 2mb \\ ma \end{Bmatrix} = 0$$




Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF - modale

..condizioni iniziali

..partendo dalla soluzione di primo tentativo..

$$\{x\}=\{X\}\cos(\omega t-\alpha)$$

..considerando il modo r..

$$\{x\}_r=c_r\phi_r\cos(\omega_r t-\alpha_r)$$

..estendendo a tutti i modi..

$$\{x\}=\sum_{r=1}^{N}c_r\phi_r\cos(\omega_r t-\alpha_r)=\sum_{r=1}^{N}\phi_r\left[A_r\cos(\omega_r t)+B_r\sin(\omega_r t)\right]$$

..con i 2N coefficienti da determinare in base alle CI

$$\{x(0)\}=\sum_{r=1}^{N}\{\phi_r\}a_r$$

$$\{\dot{x}(0)\}=\sum_{r=1}^{N}\{\phi_r\}\omega_r b_r$$

..moltiplicando per

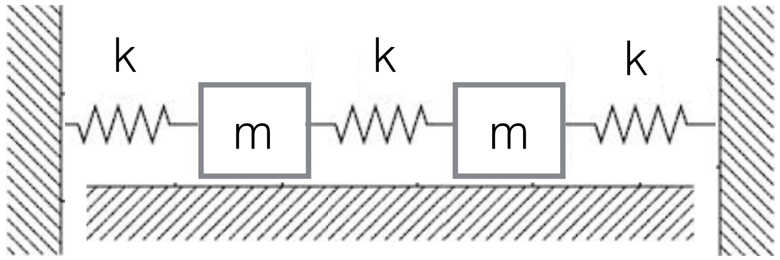
$$\{\phi\}_s^T[m]$$

$$a_r=\frac{\{\phi_r\}^T[m]\{x(0)\}}{M_r}$$

$$b_r=\frac{\{\phi_r\}^T[m]\{\dot{x}(0)\}}{\omega_r M_r}$$

## Sistemi MDOF - modale

..esempio




$$[m]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad [k]=\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad [\phi]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

..con le seguenti CI $\quad \{\dot{x}(0)\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{x(0)\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ X_0 \end{Bmatrix}$

$$[M]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

..calcolo le masse modali

$$[m]\{x(0)\}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ X_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}$$

$$[m]\{\dot{x}(0)\}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..calcolo l'influenza delle CI

# Sistemi MDOF - modale

..esempio

$$a_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m]\{x(0)\}}{M_r}$$

$$b_r = \frac{\{\phi_r\}^T [m]\{\dot{x}(0)\}}{\omega_r M_r}$$

..sostituendo quanto appena calcolato…

$$a_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}}{2m} = \frac{X_0}{2}$$

$$b_1 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{2m} = 0$$

$$a_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ mX_0 \end{Bmatrix}}{2m} = -\frac{X_0}{2}$$

$$b_2 = \frac{\begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{2m} = 0$$

..si ottiene la soluzione già vista..

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2} a_r \{\phi_r\}\cos(\omega_r t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{X_0}{2}\begin{Bmatrix} \cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

vediamo cosa succede alle funzioni di trasferimento nel caso MDOF

$$\left[Z(p)\right]=\left[p^2[m]+p[c]+[k]\right]$$

Partiamo dalla matrice di rigidezza dinamica è di dimensioni N*N, la sua inversa è la matrice delle funzioni di trasferimento

$$\left[H(p)\right]=\left[Z(p)\right]^{-1}$$

$$\left[H(\omega)\right]=\left[H(p)\right]\Big|_{j\omega}$$

Queste valutate per p=jω si chiamo Funzioni di Risposta in Frequenza (FRF) (sempre N*N)

$$H_{ij}(\omega)=\frac{X_i(\omega)}{F_j(\omega)}$$

Il generico termine $H_{ij}(\omega)$ è il rapporto tra la trasformata della risposta $X_i$, sulla trasformata dell'eccitazione $F_j$.

$$H_{ij}(\omega)=H_{ji}(\omega)$$

Per la simmetria delle matrici di partenza, la matrici [H] è simmetrica!

# Sistemi MDOF - modale

$$\left[H(\omega)\right]=\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\frac{adj\left[Z(\omega)\right]}{\det\left[Z(\omega)\right]}$$

$$\left[H(\omega)\right]=\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}=\sum_{r=1}^{N}\frac{A_i}{B_i}$$

Come nel caso SDOF anche nel caso MDOF ci sono diverse rappresentazioni

* come rapporto di polinomi
* come somma di residui (frazioni parziali)

(vedi parte 2)

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega-z_1)(j\omega-z_2)\ldots(j\omega-z_p)}{(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_2)\ldots\ldots(j\omega-\lambda_{2N})}$$

..prodotto di p zeri
..prodotto di 2N poli

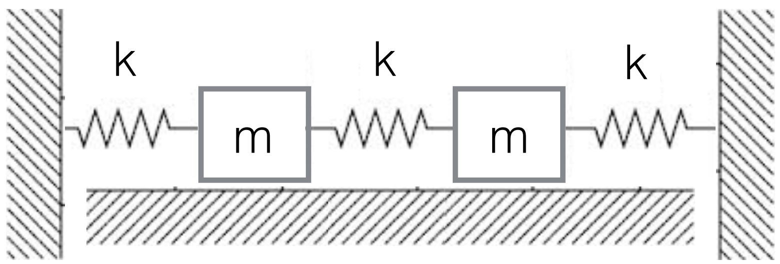
$$\left[H(j\omega)\right]=\sum_{r=1}^{N}\frac{\left[A_r\right]}{(j\omega-\lambda_r)}+\frac{\left[A_r^*\right]}{(j\omega-\lambda_r^*)}$$

..somma di N modi
(ciascuno con 2 contributi
traloro complessi coniugati)

$$H_{pq}(j\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{A_{pqr}}{(j\omega-\lambda_r)}+\frac{A_{pqr}^*}{(j\omega-\lambda_r^*)}$$

# Sistemi MDOF - modale

..esempio




$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left[Z(\omega)\right]=\begin{bmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} \\ k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} \end{bmatrix}$$

..matrice di rigidezza dinamica

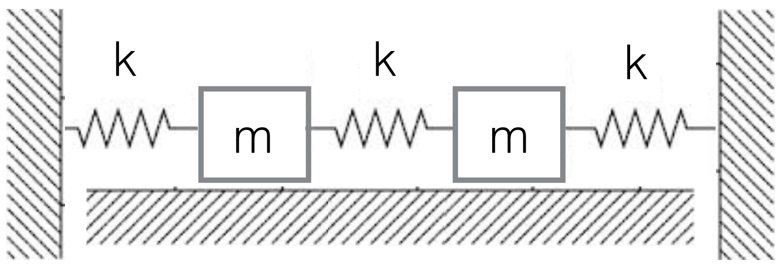
$$\left[H(\omega)\right]=\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} k_{22}-\omega^2 m_{22} & -\left(k_{21}-\omega^2 m_{21}\right) \\ -\left(k_{12}-\omega^2 m_{12}\right) & k_{11}-\omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{\left(k_{11}-\omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22}-\omega^2 m_{22}\right)-\left(k_{12}-\omega^2 m_{12}\right)\left(k_{21}-\omega^2 m_{21}\right)}$$

$$\left(k_{11}-\omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22}-\omega^2 m_{22}\right)-\left(k_{12}-\omega^2 m_{12}\right)\left(k_{21}-\omega^2 m_{21}\right)=$$
$$\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)$$

..note che siano le radici dell'eq.caratteristica, o poli

## Sistemi MDOF - modale

..esempio




$$\left[H(\omega)\right]=\left[Z(\omega)\right]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} k_{22}-\omega^2 m_{22} & k_{21}-\omega^2 m_{21} \\ k_{12}-\omega^2 m_{12} & k_{11}-\omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{\left(k_{11}-\omega^2 m_{11}\right)\left(k_{22}-\omega^2 m_{22}\right)-\left(k_{12}-\omega^2 m_{12}\right)\left(k_{21}-\omega^2 m_{21}\right)}$$

$$H_{11}(\omega)=\frac{k_{22}-\omega^2 m_{22}}{\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)}$$

..le 4 FRF del sistema a 2 DOF..

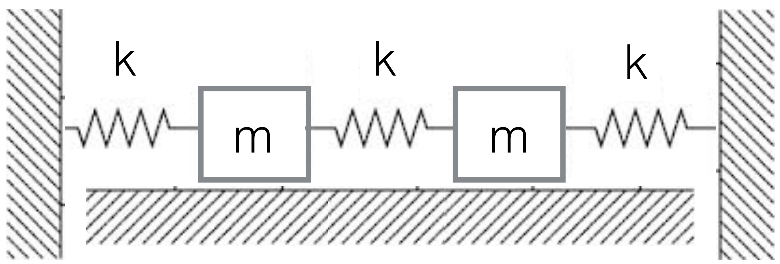
$$H_{12}(\omega)=H_{21}(\omega)=\frac{k_{12}-\omega^2 m_{12}}{\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)}$$

$$H_{22}(\omega)=\frac{k_{11}-\omega^2 m_{11}}{\left(j\omega-\lambda_1\right)\left(j\omega-\lambda_1^*\right)\left(j\omega-\lambda_2\right)\left(j\omega-\lambda_2^*\right)}$$

..le N*N FRF del sistema a N DOF..

# Sistemi MDOF - modale

..esempio




..analogamente al caso SDOF si cerca la rappresentazione a frazioni parziali

$$H_{11}(\omega)=\frac{k_{22}-\omega^2 m_{22}}{(j\omega-\lambda_1)(j\omega-\lambda_1^*)(j\omega-\lambda_2)(j\omega-\lambda_2^*)}$$

$$=\frac{c_1}{(j\omega-\lambda_1)}+\frac{c_2}{(j\omega-\lambda_2^*)}+\frac{c_3}{(j\omega-\lambda_2)}+\frac{c_4}{(j\omega-\lambda_2^*)}$$

**..moltiplico per ($j\omega-\lambda_1$)..**

$$c_1=\frac{k_{22}-\lambda_1^2 m_{22}}{(\lambda_1-\lambda_1^*)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2^*)}=A_{111}$$

..valuto per $j\omega=\lambda_1$..

..e analogamente gli altri residui

$$c_2=\frac{k_{22}-\lambda *_1^2\, m_{22}}{(\lambda_1^*-\lambda_1)(\lambda_1^*-\lambda_2)(\lambda_1^*-\lambda_2^*)}=A_{111}^* \qquad c_3=\frac{k_{22}-\lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1^*)(\lambda_2-\lambda_2^*)}=A_{112} \qquad c_4=\frac{k_{22}-\lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2^*-\lambda_1)(\lambda_2^*-\lambda_1^*)(\lambda_2^*-\lambda_2)}=A_{112}^*$$

# Sistemi MDOF - modale

..esempio

$$\left[H(j\omega)\right]=\sum_{r=1}^{N}\frac{\left[A_r\right]}{\left(j\omega-\lambda_r\right)}+\frac{\left[A_r^*\right]}{\left(j\omega-\lambda_r^*\right)}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\begin{bmatrix} A_{11r} & A_{12r} \\ A_{21r} & A_{22r} \end{bmatrix}}{\left(j\omega-\lambda_r\right)}+\frac{\begin{bmatrix} A_{11r}{}^* & A_{12r}{}^* \\ A_{21r}{}^* & A_{22r}{}^* \end{bmatrix}}{\left(j\omega-\lambda_r^*\right)}$$

Tanti contributi così quanti sono i modi (N)

..in realtà non serve calcolare tutte le matrici dei residui,
perché queste sono complesse coniugate a due a due..

..in realtà non serve calcolare tutti gli elementi delle matrici dei residui,
perché queste sono simmetriche..

## Sistemi MDOF - modale

La matrice dei residui $A_r$ è proporzionale alla forma modale $\phi_r$

$$[A_r]=Q_r\{\phi\}_r\{\phi\}_r^T=Q_r\begin{bmatrix}\phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N\end{bmatrix}$$

..vediamo come, partendo dalla matrice di rigidezza dinamica..

$$[Z(\omega)][Z(\omega)]^{-1}=[I] \qquad [Z(\omega)]^{-1}=\frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$[Z(\omega)]\frac{adj[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}=[I]$$

$$[Z(\omega)]adj[Z(\omega)]=\det[Z(\omega)][I]$$

..valutiamola per $\lambda_r$.. $\det[Z(\lambda_r)]=0$

$$[Z(\lambda_r)]adj[Z(\lambda_r)]=\{0\}$$

..prendiamo la i-esima colonna




Luigi BREGANT
bregant@units.it

# Sistemi MDOF - modale

$$\left[Z(\lambda_r)\right]\left\{Z(\lambda_r)\right\}_i^A = \{0\}$$

$$\Updownarrow$$

..ricordiamo la definizione di [Z(ω)]..

$$\left[Z(\lambda_r)\right]\{X\}_{\lambda_r} = \left[Z(\lambda_r)\right]\{\phi\}_r = \{0\}$$

$$\{\phi_r\} = \beta_{ir}\left\{Z(\lambda_r)\right\}_i^A$$

..da cui la menzionata proporzionalità..

..essendo m e k matrici simmetriche, anche adj[Z($\lambda_r$)] sarà simmetrica..
..lo stesso discorso vale per le righe e per le colonne…

$$adj\left[Z(\lambda_r)\right] = Q_r\{\phi\}_r\{\phi\}_r^T = Q_r\begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix} = \left[A_r\right]$$

..sfruttiamo la proprietà appena vista per sintetizzare le FRF ..

Un sistema a N DOF ha potenzialmente N*N FRF,
è improponibile calcolarle/misurarle tutte!
Ci si limita ad un set discreto (un paio di righe o di colonne complete)
ed eventualmente si sintetizzano quelle mancanti d'interesse!

..ricordiamo..

$$\left[H(\omega)\right]=\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

..prendiamo la k-esima colonna..

.. k-esima colonna della matrice dei residui..

$$\begin{Bmatrix} H_{1k}(\omega) \\ H_{2k}(\omega) \\ \dots \\ H_{Nk}(\omega) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{A_r\}_k}{j\omega-\lambda_r} + \frac{\{A_r\}_r^*}{j\omega-\lambda_r^*}$$

# Sistemi MDOF - modale

$$[A_r] = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \cdots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \cdots & \phi_2\phi_N \\ .. & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_1\phi_N & \phi_N\phi_2 & \cdots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

..prendiamo la k-esima colonna..

$$\begin{Bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \cdots \\ A_{Nk} \end{Bmatrix}_r = Q_r \begin{Bmatrix} \phi_1\phi_k \\ \phi_2\phi_k \\ \cdots \\ \phi_N\phi_k \end{Bmatrix}_r = Q_r\phi_{kr} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r$$

..da cui deriviamo l'espressione per il generico termine dalla matrice dei residui..

$$A_{pqr} = Q_r\phi_{pr}\phi_{qr}$$

..e da questa l'espressione per la sintesi:

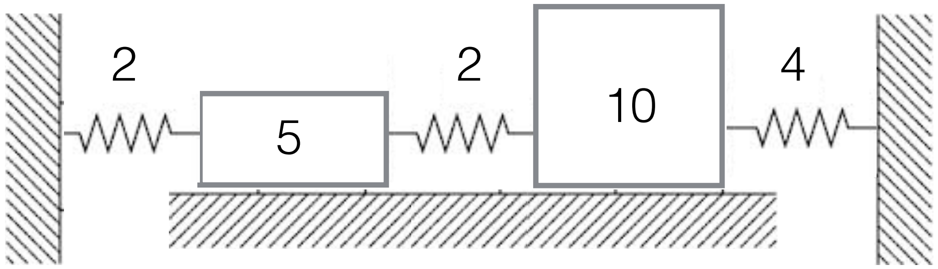
$$A_{pqr} = \frac{A_{kpr}A_{kqr}}{A_{kkr}} = \frac{Q_r\phi_{kr}\phi_{pr}Q_r\phi_{kr}\phi_{qr}}{Q_r\phi_{kr}\phi_{kr}}$$

.. serve conoscere il termine diretto $A_{kkr}$!!!

..schemino..

## Sistemi MDOF - modale

..esempio..




$$[m]=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad [k]=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

..senza smorzamento..

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

..problema autovalori

$$\left\|\left[[k]+s^2[m]\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left\|\left[[m]^{-1}[k]+s^2[I]\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left\|\left[\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left\|\left[[k]^{-1}[m]+\frac{1}{s^2}[I]\right]\right\|=\{0\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}+\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\{0\}$$

## Sistemi MDOF - modale

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2+\frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad [*]$$

..per la soluzione non banale..

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2+\frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{s^2}\right)\left(2+\frac{1}{s^2}\right)-\frac{1}{2}=0 \qquad \alpha=\frac{1}{s^2} \qquad \alpha^2+\frac{7}{2}\alpha+\frac{5}{2}=0 \qquad \alpha_{1,2}=\begin{cases} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}}=\begin{cases} \pm j\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \pm j \end{cases}$$

..i poli del sistema sono puramente immaginari !! c=0..

sostituisco $\lambda_1 = \pm j\sqrt{\frac{2}{5}}$ in [*] per valutare l'autovettore $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \{0\}$

## Sistemi MDOF - modale

$$-X_1 + X_2 = \{0\} \qquad \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

sostituisco $\lambda_1 = \pm j$ in [*] per valutare l'autovettore 2

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \{0\}$$

$$\frac{1}{2}X_1 + X_2 = \{0\} \qquad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{1}{2}X_1 \end{Bmatrix}$$

da cui la matrice modale che deve essere scalata opportunamente!!

$$[\phi] = \left[\{\phi\}_1 \{\phi\}_2\right] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

X1 può assumere qualsiasi valore…
ma si può fare in modo che la matrice
di massa modale sia unitaria….

## Sistemi MDOF - modale

$$[\phi]^T[m][\phi]=\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

si ottengono due equazioni.. per le due masse modali (unitarie)…

$$5X_1^2+10X_1^2=1$$

$$5X_1^2+\frac{5}{2}X_1^2=1$$

da cui i due termini di scalaggio

$$X_{11}=\pm\sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$X_{12}=\pm\sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}$$

matrice modale scalata!

# Sistemi MDOF - modale

$$[m]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{0\}$$

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{q\}=\{0\}$$

..nel caso in cui ci fossero forzanti..

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{q}\}+[\Phi]^T[k][\Phi]\{q\}=[\Phi]^T\{p\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{q\}=\{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{q\}=\begin{Bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{Bmatrix}$$

..le equazioni sono disaccoppiate! 2 sistemi SDOF disuniti…risposte note…

$$\{x\}=[\Phi]\{q\} \qquad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$





Luigi BREGANT
bregant@units.it

Sistemi MDOF - modale

..dalla matrice di rigidezza dinamica, calcoliamo le FRF…

$$[Z(s)] = \begin{bmatrix} 5s^2+4 & -2 \\ -2 & 10s^2+6 \end{bmatrix}$$

$$[H(s)] = \frac{adj\begin{bmatrix} 5s^2+4 & -2 \\ -2 & 10s^2+6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 5s^2+4 & -2 \\ -2 & 10s^2+6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2+6 & 2 \\ 2 & 5s^2+4 \end{bmatrix}}{(5s^2+4)(10s^2+6)-4}$$

..noti i poli si può usare la rappresentazione a frazioni parziali…

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2+6 & 2 \\ 2 & 5s^2+4 \end{bmatrix}}{50\left(s-j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(s+j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)(s-j)(s+j)}$$

## Sistemi MDOF - modale

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2+6}{50\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)(s-j)(s+j)}$$

$$H_{11}(s) = \frac{A_{111}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{A_{111}^*}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{A_{112}}{(s-j)} + \frac{A_{112}^*}{(s+j)}$$

..con la solita tecnica..

$$A_{111} = -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \qquad A_{111}^* = \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \qquad A_{112} = -\frac{j}{15} \qquad A_{112}^* = \frac{j}{15}$$

..analogamente per tutte le altre FRF e per tutti gli altri termini mancanti..

$$\left[H(s)\right]=\frac{\begin{bmatrix}-\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12}\\ -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12}\end{bmatrix}}{\left(s-j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}+\frac{\begin{bmatrix}\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12}\\ \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12}\end{bmatrix}}{\left(s+j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)}+\frac{\begin{bmatrix}-\frac{j}{15} & \frac{j}{30}\\ \frac{j}{30} & -\frac{j}{60}\end{bmatrix}}{(s-j)}+\frac{\begin{bmatrix}\frac{j}{15} & -\frac{j}{30}\\ -\frac{j}{30} & \frac{j}{60}\end{bmatrix}}{(s+j)}$$

$$Q_1=\pm j\frac{\sqrt{2/5}}{12} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2\\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2\end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$Q_1=\pm\frac{j}{60} \qquad \begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2\\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2\end{bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}2\\ -1\end{Bmatrix}$$

## Sistemi MDOF - modale

..aggiungiamo smorzamento.. proporzionale

$$[c]=\frac{1}{2}[k]=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi]^T\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}[\Phi]=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

..la trasformazione modale diagonalizza la matrice di smorzamento..

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\{\dot{q}\}+\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\{q\}=\begin{Bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{Bmatrix}$$

..i modi sono gli stessi che nel caso non smorzato..

## Sistemi MDOF - modale

..ma cambia significativamente la matrice delle FRF..

$$\left[H(s)\right]=\frac{adj\begin{bmatrix}5s^2+2s+4 & -s-2\\ -s-2 & 10s^2+3s+6\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}5s^2+2s+4 & -s-2\\ -s-2 & 10s^2+3s+6\end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}10s^2+3s+6 & s+2\\ s+2 & 5s^2+2s+4\end{bmatrix}}{50s^4+35s^3+75s^2+20s+20}$$

..i poli diventano complessi, si spostano verso sx nel semipiano di Laplace..

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}}=\begin{cases}-\frac{1}{10}\pm j\frac{\sqrt{39}}{10}\\ -\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{15}}{4}\end{cases}$$

..NB i poli sono 4 a due a due complessi coniugati!

# Sistemi MDOF - modale

$$H_{11}(s)=\frac{10s^2+3s+6}{50(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2)(s-\lambda_2^*)}$$

$$H_{11}(s)=\frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1)}+\frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1^*)}+\frac{-j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2)}+\frac{j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2^*)}$$

$$Q_1=\pm j\frac{\sqrt{39}}{117} \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$H_{12}(s)=\frac{s+2}{50(s-\lambda_1)(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2)(s-\lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(s)=\frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1)}+\frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s-\lambda_1^*)}+\frac{j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2)}+\frac{-j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s-\lambda_2^*)}$$

$$Q_1=\pm\frac{j\sqrt{15}}{225} \qquad \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ -1\end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

..aggiungiamo smorzamento.. non proporzionale $[c]==\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

..la trasformazione non disaccoppia le equazioni del sistema..
bisogna utilizzare l'espansione di Duncan-Collar

..cambiano le FRF..

$$[H(s)]=\frac{adj\begin{bmatrix} 5s^2+6s+4 & -4s-2 \\ -4s-2 & 10s^2+5s+6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 5s^2+6s+4 & -4s-2 \\ -4s-2 & 10s^2+5s+6 \end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix} 10s^2+5s+6 & 4s+2 \\ 4s+2 & 5s^2+6s+4 \end{bmatrix}}{50s^4+85s^3+84s^2+40s+20}$$

Sistemi MDOF - modale

..cambiano poli, e residui..

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.095 + j0.629 \\ \lambda_1^* = -0.095 - j0.629 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = -0.754 + j0.645 \\ \lambda_2^* = -0.754 - j0.645 \end{cases}$$

$$H_{22}(s) = \frac{0.0037 - j0.0587}{(s-\lambda_1)} + \frac{0.0037 + j0.0587}{(s-\lambda_1^*)} + \frac{0.0037 - j0.0163}{(s-\lambda_2)} + \frac{0.0037 + j0.0163}{(s-\lambda_2^*)}$$

..ma soprattutto gli autovettori.. che diventano complessi!
(di diversi DOF non raggiungono gli estremi di spostamento simultaneamente!)

$$per\lambda_1 \qquad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.0034 - j0.0501 \\ 0.0037 - j0.0587 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0502 & -93.96^\circ \\ 0.0588 & -86.93^\circ \end{Bmatrix}$$

$$per\lambda_2 \qquad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0034 + j0.0452 \\ 0.0037 - j0.0163 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0454 & +94.30^\circ \\ 0.0167 & -77.21^\circ \end{Bmatrix}$$

# Sistemi MDOF - modale

numerica | sperimentale

**sistema fisico**

discretizzazione

equazioni moto $[m]\ddot{x}+[c]\dot{x}+[k]x=p$

**soluzione problema autovalori**

$[\phi]_n,[\lambda]_n$ $\longleftrightarrow$ $[\phi]_s,[\lambda]_s$

**sintesi FRF** correlazione **identificazione**

$[H]_n$ $\longleftrightarrow$ $[H]_s$ N*r

misure sperimentali

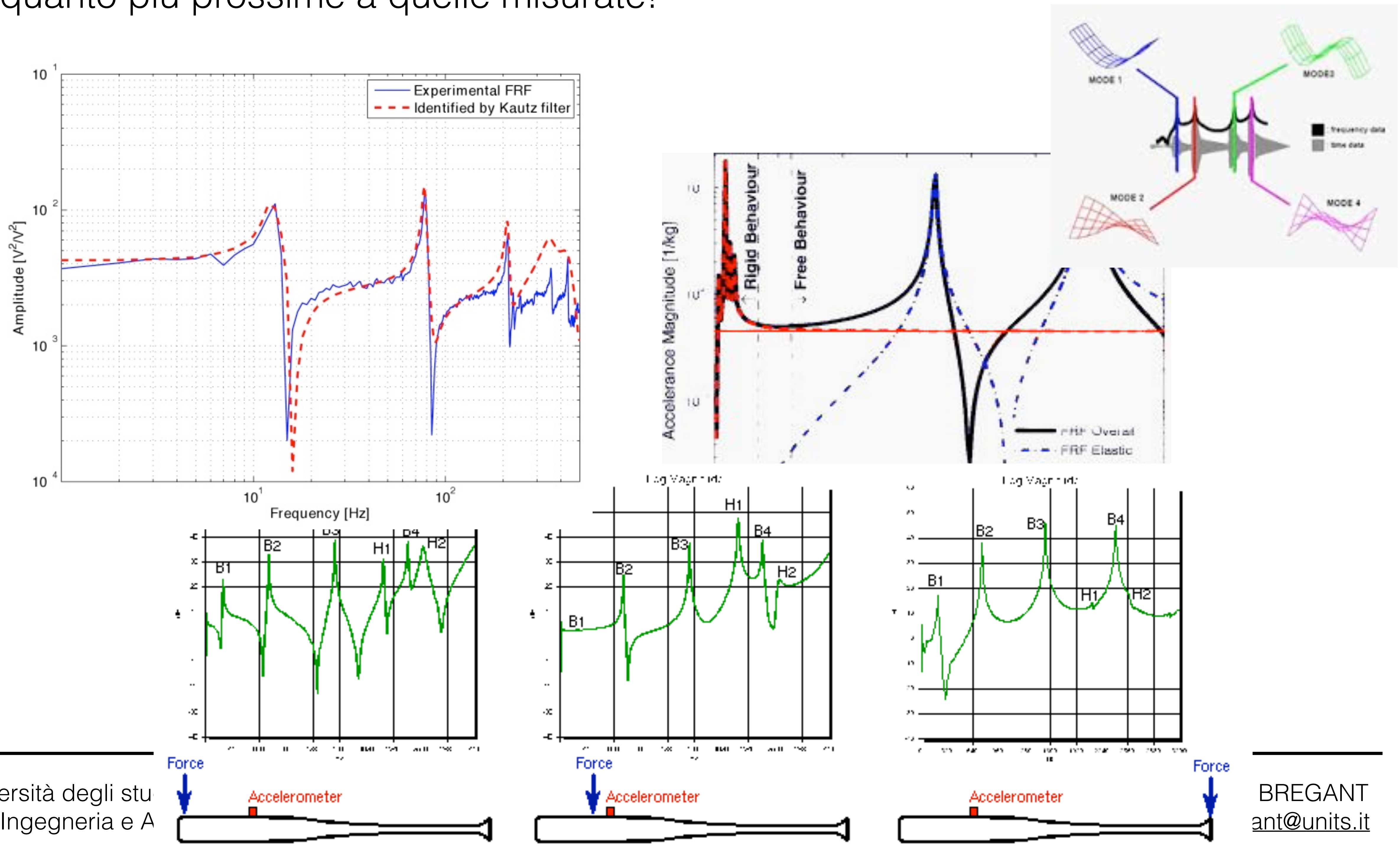
**sistema fisico**

diverse dimensioni delle matrici!

# Sistemi MDOF - modale

..identificazione..

Con identificazione si intende un processo che dalle FRF sperimentali, permette di calcolare Autovalori ed Autovettori del sistema, e costruire un modello matematico dello stesso che abbia delle FRF quanto più prossime a quelle misurate!



# Sistemi MDOF - modale

Ricordiamo che per le proprietà dei residui basta misurare un numero limitato di FRF (complete)..

$$\left[H(\omega)\right]_s = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$\left[H(j\omega)\right] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\left[A_r\right]}{\left(j\omega - \lambda_r\right)} + \frac{\left[A_r^*\right]}{\left(j\omega - \lambda_r^*\right)}$$

..e identificare i parametri del modello autovalori ($\lambda r$) autovettori ($\phi_r$) residui ($A_r$)…

$$\left[H(j\omega)\right] = [V]\left[j\omega[I] - [\lambda]\right]^{-1}[L]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & .. & \{\phi\}_N \end{bmatrix}$$ matrice modale

$$[L] = [Q][V]^T$$ matrice di partecipazione modale

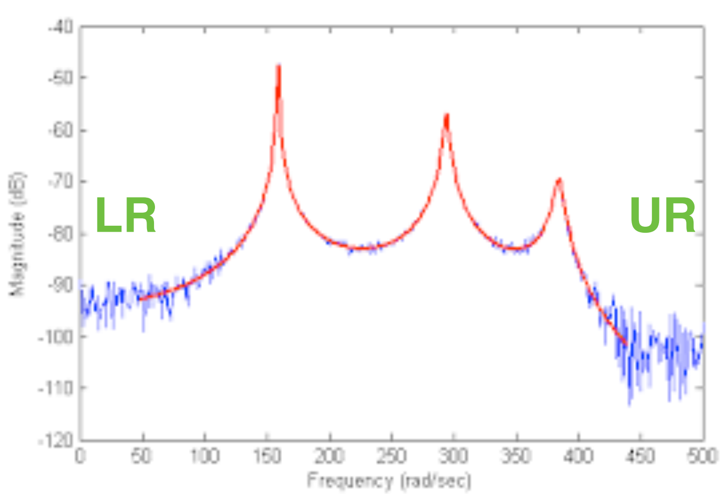
# Sistemi MDOF - modale

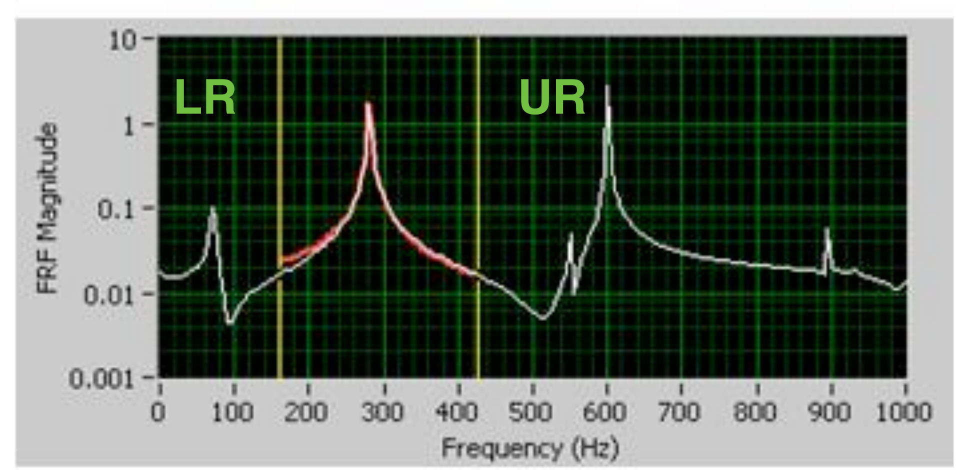
Le strutture reali sono continue.. hanno infiniti modi.. tra 0 e infinito…
se ne misura un numero $N_m$ (minore di infinito)… si approssima la soluzione!!

$$\left[H(j\omega)\right]=\sum_{r=1}^{N}\frac{\left[A_r\right]}{\left(j\omega-\lambda_r\right)}+\frac{\left[A_r^*\right]}{\left(j\omega-\lambda_r^*\right)}+\left[UR\right]-\frac{\left[LR\right]}{\omega^2}$$

$\left[UR\right]$ Upper Residual.. per considerare i modi fuori-banda superiori

$\dfrac{\left[LR\right]}{\omega^2}$ Lower Residual.. per considerare i modi fuori-banda inferiori



# Sistemi MDOF - modale

Metodi di identificazione si classificano:

SDOF vs MDOF: un solo modo o più modi nella banda d'interesse

LOCALI vs GLOBALI: non tengono o tengono conto del fatto che
i poli non dipendono da i,j, p modi non dipendono dal punto di eccitazione j,
i coefficienti di partecipazione non dipendono dal punto di misura i

S excitation vs M excitation: si considera una a più colonne contemporaneamente

MODALI vs DIRETTI: identificano i parametri modali o le matrici di m,c,k

REALI vs COMPLESSI: identificano forme modali reali o complesse

TEMPO vs FREQUENZA: identificano parametri modali dalle risposte all'impulso
o dalle risposte in frequenza ..schemino..

https://www.mpihome.com/en/products/dynamic-signal-analysis/modal-analysis.html

**http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/mspace.html**

# Sistemi MDOF - modale

Come utilizzare i risultati dell'analisi modale?

Calcolo della risposta forzata del sistema…

$$\left[H(\omega)\right]=\frac{X(\omega)}{F(\omega)} \qquad X(\omega)=\left[H(\omega)\right]F(\omega) \qquad x(t)=\left[h(t)\right]t(t)$$

con la trasformata inversa di Fourier…

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ X_3(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & .. & H_{14}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & .. & .. \\ H_{31}(\omega) & .. & .. & H_{34}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \end{Bmatrix}$$





Luigi BREGANT
bregant@units.it

Come utilizzare i risultati dell'analisi modale?

Analisi di sensitività autovalori ed autovettori alla variazione dei parametri del sistema…

Calcolo delle risposte del sistema a seguito di modifiche strutturali…

Calcolo delle risposte di sistemi accoppiati…

Aggiornamento parametri modelli numerici…

…