meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 5.1
analisi del segnale
addendum1 FFT

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Supponiamo di avere un segnale del tempo campionato con una certa frequenza, che N campioni rappresentino un periodo del segnale. Supponiamo che N sia una potenza di 2 ($N=2^p$)(tornerà utile dopo).

La trasformata discreta di Fourier è esprimibile con la seguente sommatoria:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

..introduciamo Wn (twiddle factor):

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

rappresenta un vettore (versore) rotante, la posizione nel piano, dipende dal N, n e k

In questo modo la DFT può essere espressa in forma matriciale:

$$\{X(k)\}=\left[W_N^{kn}\right]\{x(n)\}$$

frequenza tempo

..con questa rappresentazione servono N*N prodotti complessi, es con 1024 campioni ..1048576 operazioni

Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Esplicitando la formula precedente per N campioni:

$$\begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ .. \\ X(N-1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{00} & W_N^{01} & .. & W_N^{0(N-1)} \\ W_N^{10} & W_N^{11} & & W_N^{1(N-1)} \\ .. & .. & & .. \\ W_N^{(N-1)0} & .. & .. & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ .. \\ x(N-1) \end{Bmatrix}$$

per 2 campioni:

$$\begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{Bmatrix}$$

per 4 campioni:

$$\begin{Bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{Bmatrix}$$

Computazionalmente è molto oneroso!
Sfruttando delle proprietà dei twiddle factors (simmetria e periodicità) si riducono le operazioni da eseguire a $N*\log_2 N$ es con 10e6 campioni ..2*10e7 operazioni (1s vs 14.4h)

Analisi del segnale - twiddle factor

Osserviamo con attenzione i twiddle factor: $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

N=2

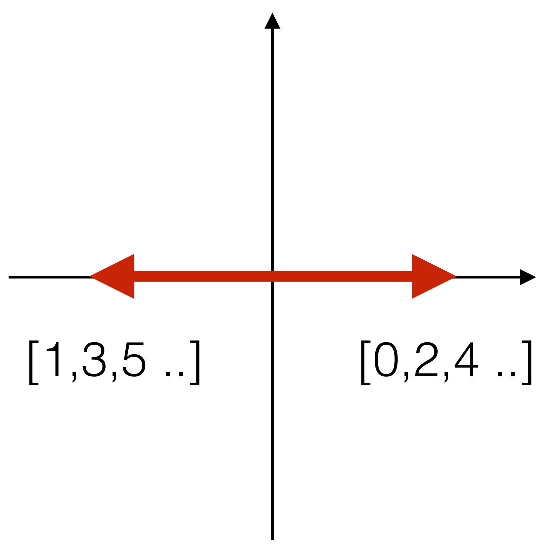
$$W_2^n = e^{-j\frac{2\pi}{2}n} = e^{-j\pi n}$$

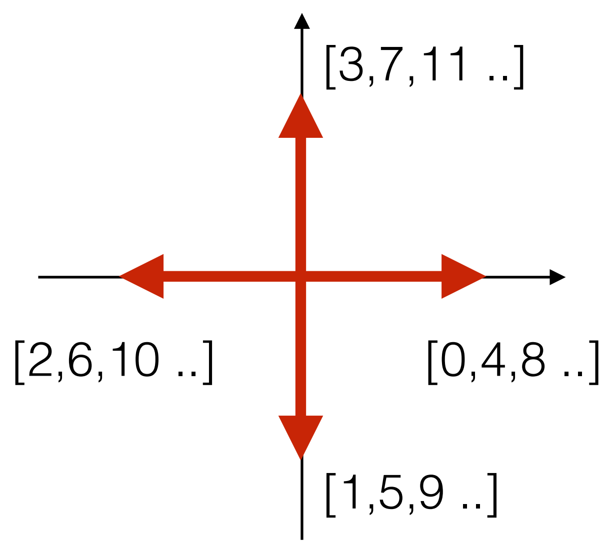
N=4

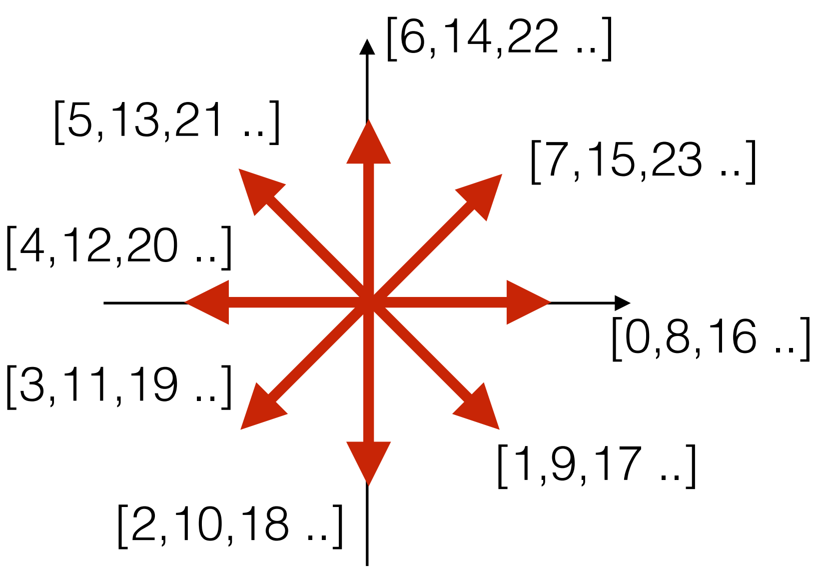
$$W_4^n = e^{-j\frac{2\pi}{4}n} = e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

N=8

$$W_8^n = e^{-j\frac{2\pi}{8}n} = e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$







I versori si ripetono, cambiando orientazione..
Sono tra loro in fase o opposizione in fase, in funzione di N o di N/2

Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Supponiamo di dividere la trasformata di N elementi,
in due trasformate di N/2 elementi (lemma di Danielson Lanczos)
(termini pari da una parte, termini dispari dall'altra)

$$X(k)=\sum_{pari} x(n)W_N^{nk}+\sum_{dispari} x(n)W_N^{nk}$$

$n=2r$ pari $\qquad n=2r+1$ dispari

$$X(k)=\sum_{r=0}^{\left(N/2\right)-1} x(2r)W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{\left(N/2\right)-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

per le proprietà di W_N

$$X(k)=\sum_{r=0}^{\left(N/2\right)-1} x(2r)W_N^{2rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{\left(N/2\right)-1} x(2r+1)W_N^{(2r)k}$$

$$W_N^2=e^{-j\frac{2\pi}{N}2}=e^{-j\frac{2\pi}{N/2}}=W_{N/2}$$

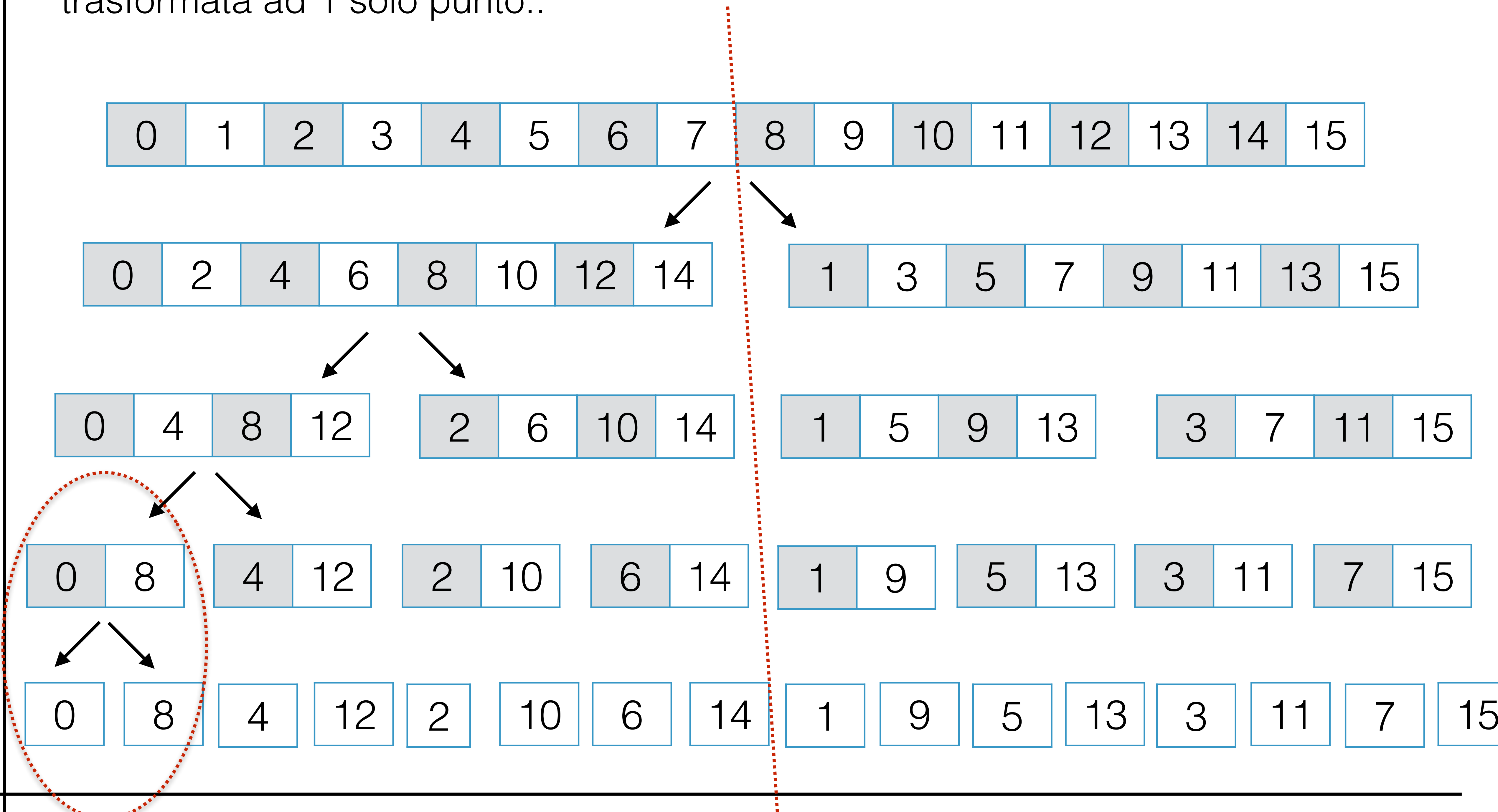
$$X(k)=\sum_{r=0}^{\left(N/2\right)-1} x(2r)W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{\left(N/2\right)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk}=G(k)+W_N^k H(k)$$

campioni pari $\qquad$ campioni dispari

Luigi BREGANT
bregant@units.it

Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Se ripetiamo il procedimento, si può dividere le 2 trasformate di N/2 elementi, ciascuna, in due trasformate di N/4 elementi.. e cosi via fino ad arrivare ad una trasformata ad 1 solo punto..



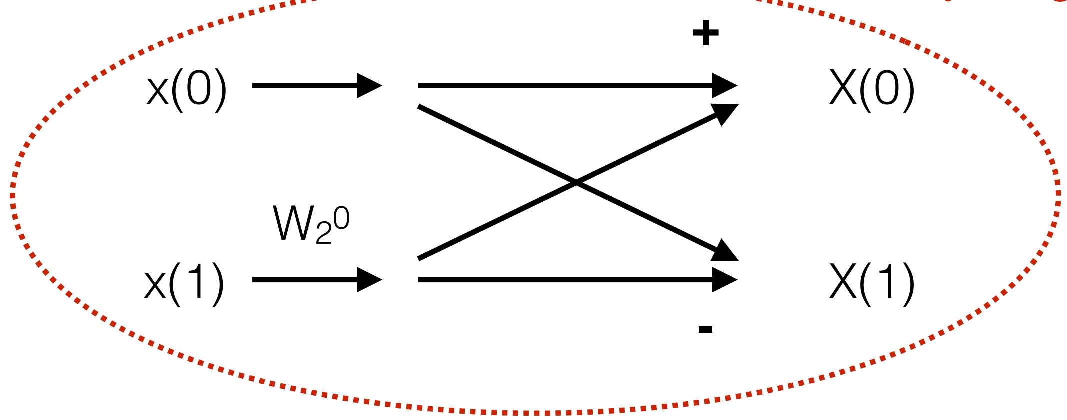
Analisi del segnale - trasformata di Fourier

All'ultimo livello potremmo scrivere qualcosa del genere

$$X(k) = x(0) + W_2^k x(1)$$

campioni pari campioni dispari

..butterfly diagram..



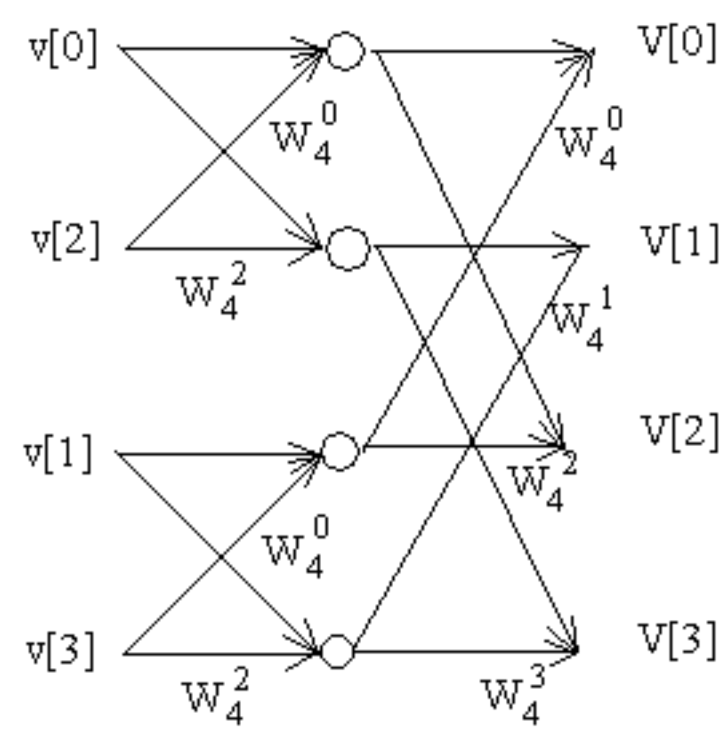
N=2

$$X(0) = x(0) + W_2^0 x(1)$$
$$X(1) = x(0) - W_2^0 x(1)$$

..a rigore dovrebbe essere W_2^1,
ma grazie alle proprietà dei twiddle factors..

N=4

$$X(k) = x(0) + W_2^k x(2) + W_4^k x(1) + W_4^k W_2^k x(3)$$

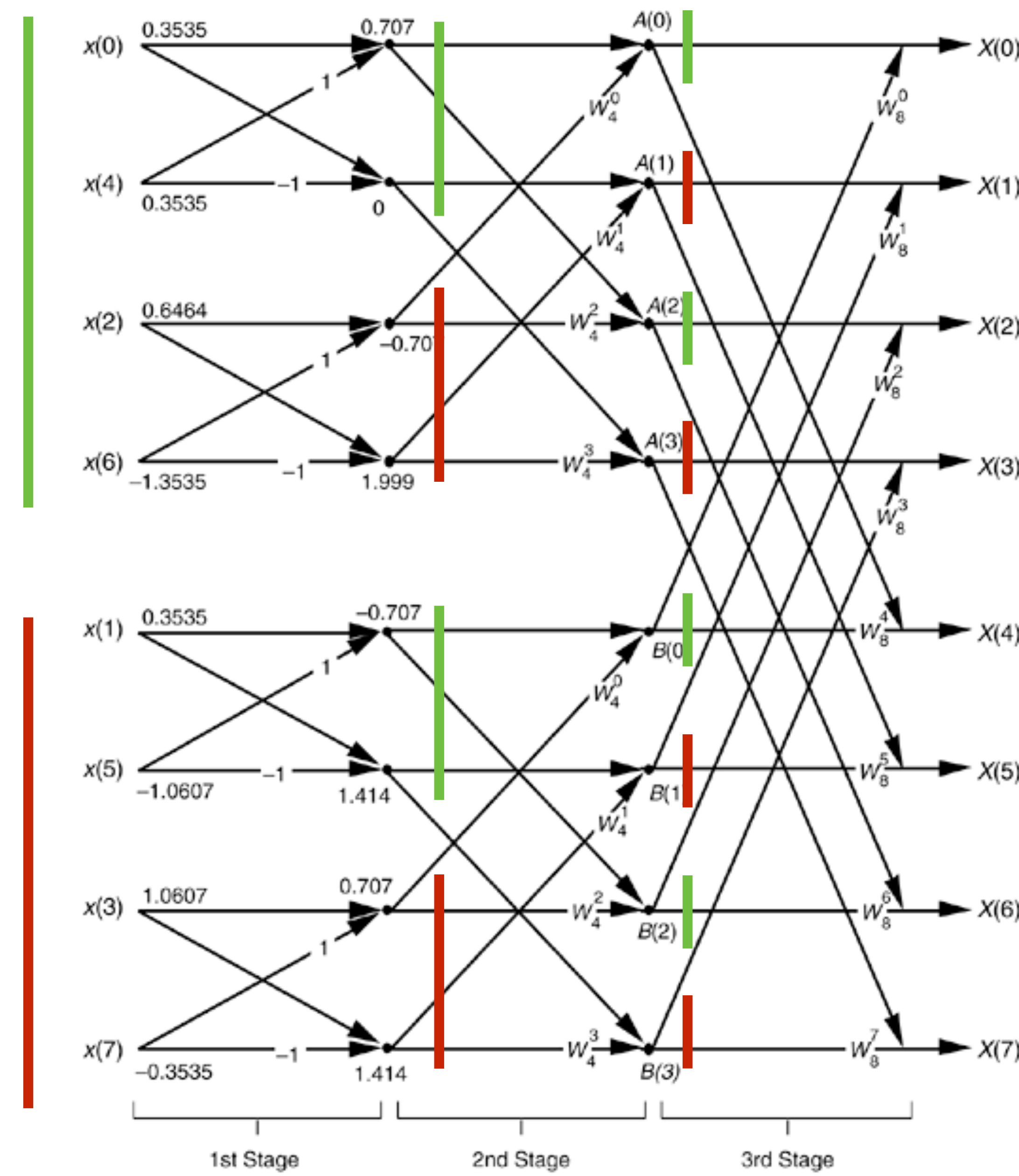


Analisi del segnale - trasformata di Fourier

N=8 $$X(k) = x(0) + W_2^k x(4) + W_4^k x(2) + W_4^k W_2^k x(6) +$$
$$W_8^k x(1) + W_8^k W_2^k x(5) + W_8^k W_4^k x(3) + W_8^k W_4^k W_2^k x(7)$$

..e cosi via… all'aumentare
del numero di componenti..

Interessante nota
l'ordine dei campioni nel dominio della frequenza e quello dei campioni nel dominio del tempo sono tra loro bit reversed!
(vedi pagina successiva)



Analisi del segnale - trasformata di Fourier

Dall'ordine dei campioni in un dominio (frequenza o tempo) si ottiene con la funzione "bit reversed order" l'ordine dei campioni trasformati nell'altro dominio (tempo o frequenza)

Servirà, prima di visualizzare il risultato, riordinarli opportunamente!

	binario	binario reversed	
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

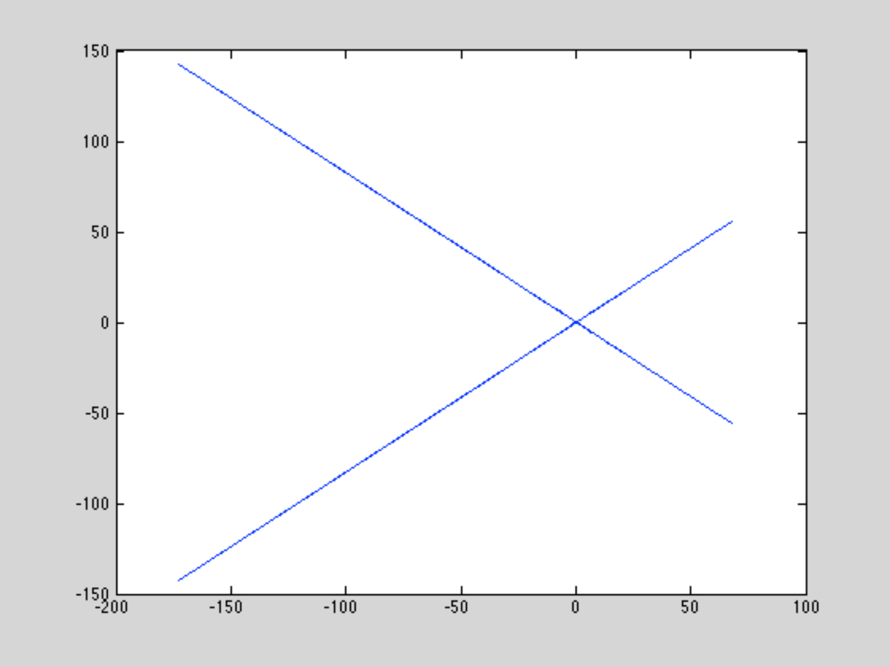
Importante da ricordare:
numero di campioni N potenza / non potenza di 2
proprietà dei twiddle factors
riordino nel t / nella f

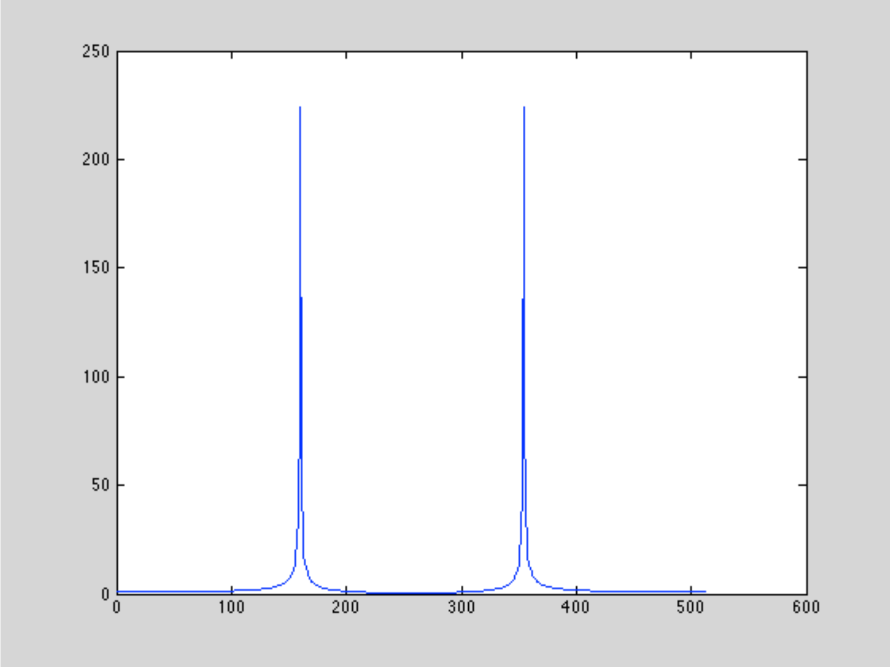
Analisi del segnale - FFT in matlab

In Matlab il comando per calcolare l'FFT è
>>fft(x,n)
con x segnale da trasformare e n numero di campioni (possibilmente esponente di 2)

attenzione al risultato:
è una quantità complessa!
è un vettore che contiene il risultato tra 0 e fn/2 e -fn/2 e 0

```
>>t=0:.01:10;
>> a=sin(2*pi*t*31);
>> plot(t(1:100),a(1:100))
>> A=fft(a,512);
>> plot(A)
>>plot(abs(A))
```

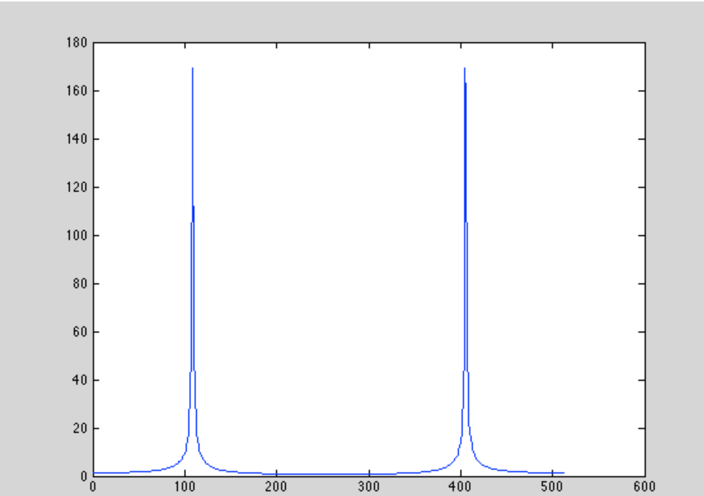




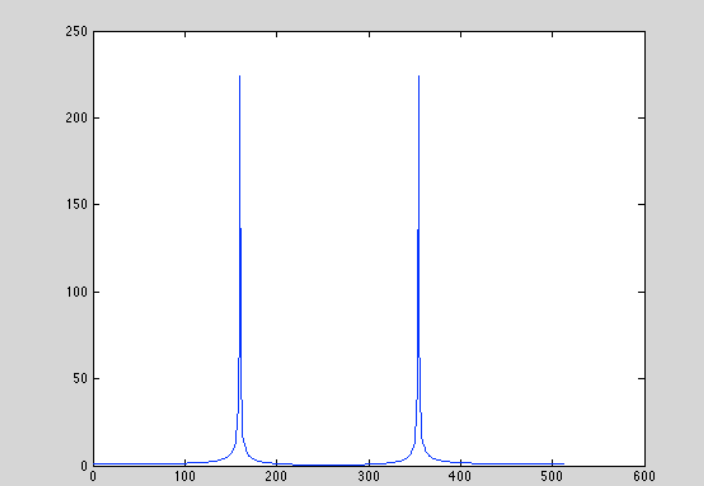
δt=.01 è come se campionassi il segnale a 100Hz!
aliasing per frequenze > 50Hz

…meglio visualizzare lo spettro (2*fft(x)) tra 0 e fs/2

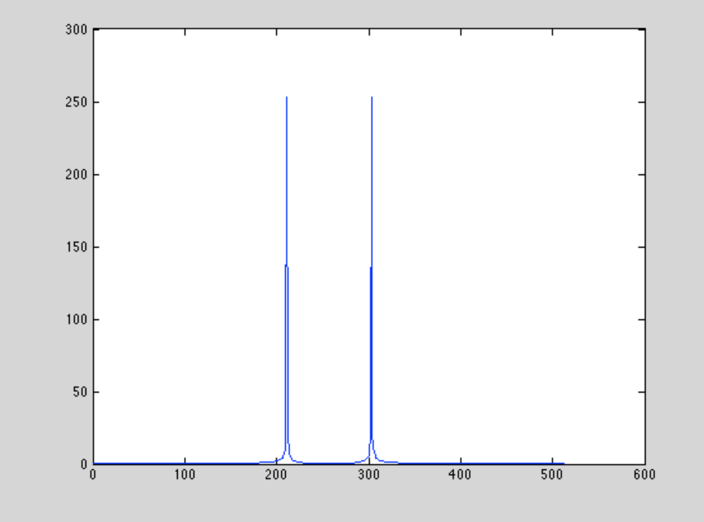
Analisi del segnale - FFT in matlab



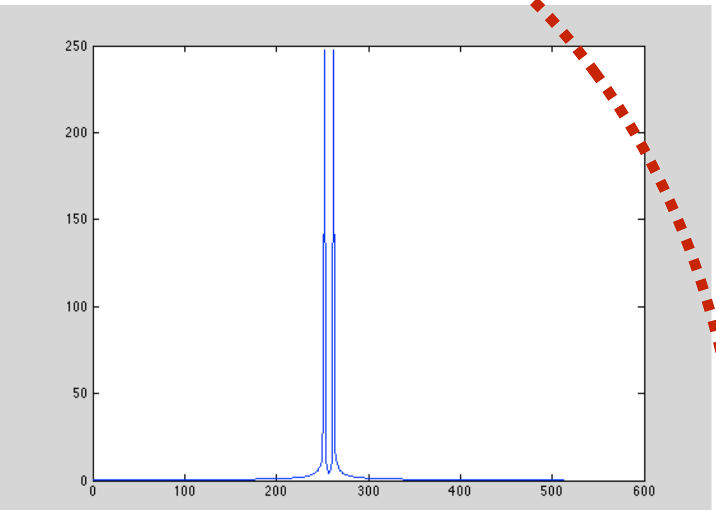
>>a=sin(2*pi*t***21**);



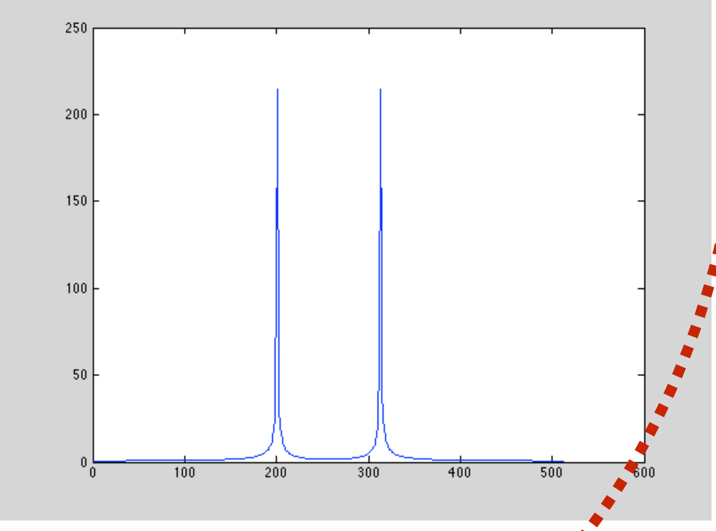
>>a=sin(2*pi*t***31**);



>>a=sin(2*pi*t***41**);



>>a=sin(2*pi*t***51**);



>>a=sin(2*pi*t***61**);

ALIASING…in questi duc casi c'è aliasing
il risultato è indistinguibile da spettri corretti!!

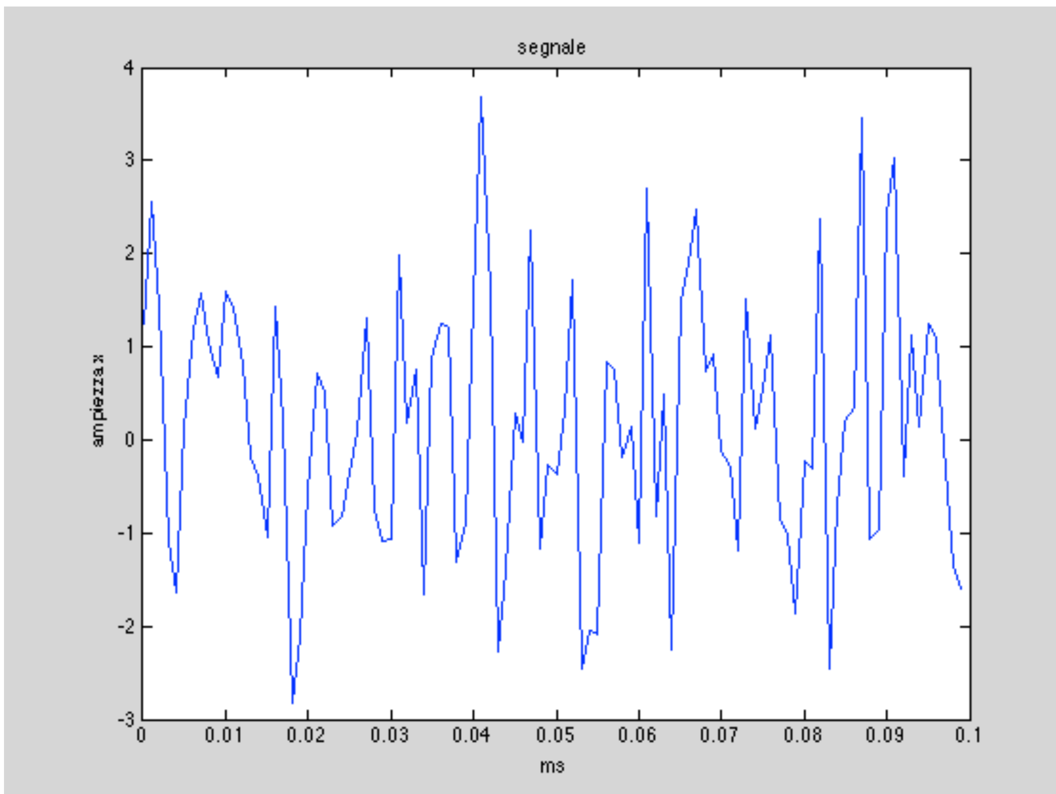
Analisi del segnale - FFT in matlab

..fatto un po' meglio..

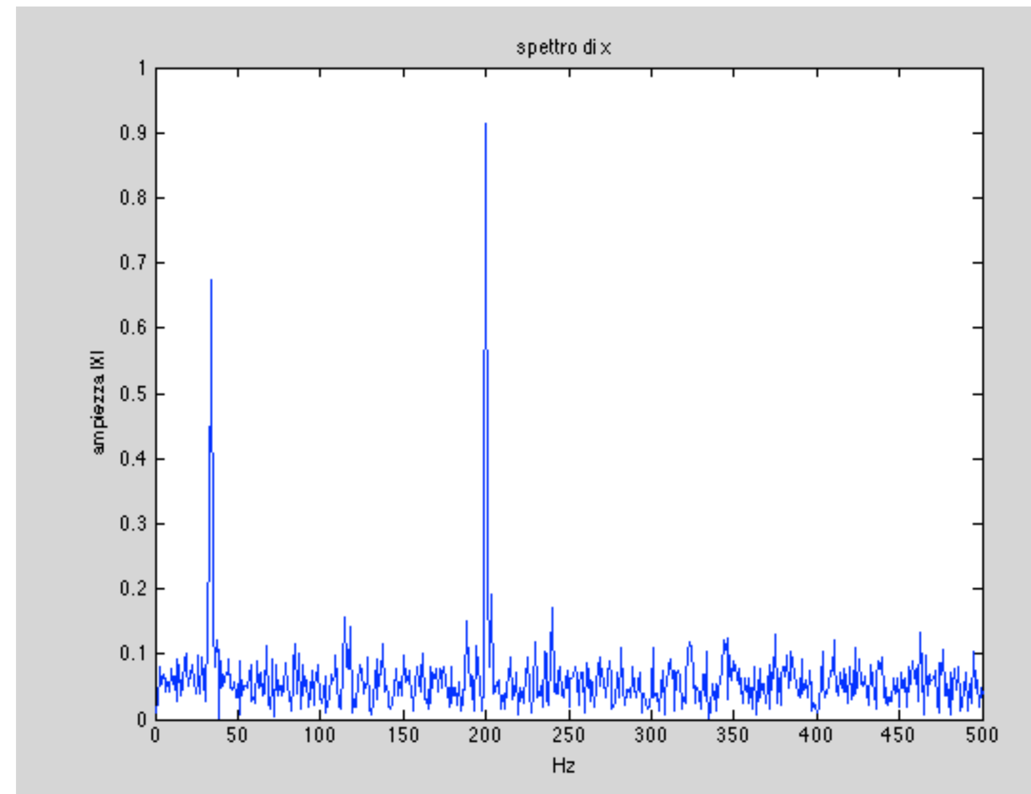
```
fs = 1000;                                % frequenza di campionamento
dt=1/fs;                                  % intervallo di campionamento
N = 1024;                                 % numero di campioni - potenza di 2
t = (0:N-1)*dt;                           % durata segnale
x = 0.7*sin(2*pi*34*t)+sin(2*pi*200*t)+randn(size(t));
plot(t(1:100),x(1:100))                    %plotto segnale
xlabel('ms')
ylabel('ampiezza x')

nfft = N;                                  % lunghezza della trasformata uguale al segnale
X = fft(x,nfft)/N;
f = fs/2*linspace(0,1,nfft/2+1);           % definisco range di frequenza (su N/2 campioni)
figure
plot(f,2*abs(X(1:nfft/2+1)))               % plotto solo metà campioni (da 0 a fs/2)
title('spettro di x')
xlabel('Hz')
ylabel('ampiezza |X|')
```

Analisi del segnale - FFT in matlab



segnale del tempo



spettro in frequenza

Luigi BREGANT
bregant@units.it