SISTEMI DINAMICI

Esame → orale

Moodle

Introduzione alla dinamica

Newton → corpi celesti

Eq. differenziali ordinarie

Sistema

(stato iniziale → nuovo stato)

→ eq. diff ordinarie $\frac{d}{dt} x(t) = f(x)$

→ eq. alle differenze per sistemi discreti

$x_i \longrightarrow x_{i+1}$

- Poincaré : cambio di prospettiva

  quantitative → qualitative

- Non-linearità

- Caos → dipendenza condizioni iniziali

  → le traiettorie "vagano un pò ovunque"

Alcuni aspetti della teoria

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) \qquad x \in M$$

- $\mathbb{R}^n$
- varietà differenziabile

$x \in M$ → Spazio delle fasi

Punti di M descrivono lo stato di un sistema.

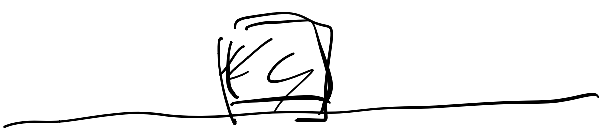
→ legge di evoluzione dipendente

da un parametro $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in I$

$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{sol eq diff}} = \varphi_t(\underbrace{x_0}_{\text{condizioni iniziali}})$$

Esempio



$T^{ext} < T$

T Temperatura

- T diminuisce $\quad T = T(t)$
- $\propto (T - T^{ext})$

$$\frac{d\,T(\tau)}{d\tau} = -k\,(T - T^{ext})$$

$$T(\tau = 0) = T_0$$

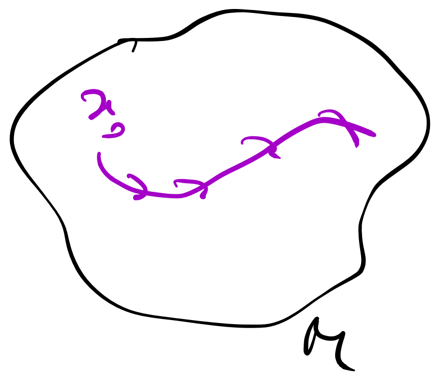
Soluzione: $T(\tau) = T^{ext} + (T_0 - T^{ext})\, e^{-k\tau}$

- $T = T(t) \longrightarrow$ variabile di stato

- dipendenza esplicita da un parametro $\underline{\underline{k}}$

  $\downarrow$

  biforcazioni



- T differenziabile

  $\rightarrow$ spazio di funzioni

- $\dfrac{d}{dt}$ $\rightarrow$ operatore differenziale

<u>Esempio</u> modello di Malthus (1798)

- numero di individui $N = N(t)$
- $N(t)$ funzione continua
- N varia a causa delle nascite e morte di individui
- $\rightarrow$ β, μ

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \beta \, \Delta t \, N(t) +$$

$$- \mu \, \Delta\tau \, N(\tau)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{d\tau} N(\tau) = \underbrace{(\beta - \mu)}_{r} N(\tau)$$

$\rightarrow$ soluzione $\sim N_0 e^{r\tau}$

eq. più generali $\rightarrow r = r(N)$

$$\frac{d}{d\tau} N(\tau) = r(N(\tau)) \cdot N(\tau)$$
$$= F(N(\tau))$$

Ad esempio

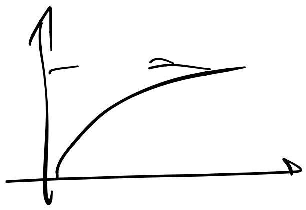
$$\beta(N) = \beta - \tilde{\beta} N$$
$$\mu(N) = \mu + \tilde{\mu} N$$
$$\longrightarrow r(N) = \beta(N) - \mu(N)$$
$$= r - \alpha N$$

Verhulst (1838)

$$N'(\tau) = r\left(1 - \frac{N(\tau)}{K}\right) N(\tau)$$

$$\left(K = \frac{r}{\alpha} \right)$$

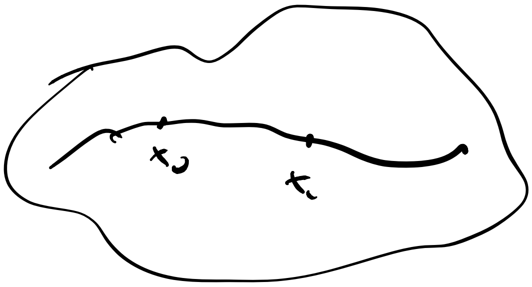
$$N(t) = K \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0)\, e^{-rt}}$$



$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$

Consideriamo uno stato iniziale del sistema e pensiamo di osservare l'evoluzione temporale:

Traiettoria
orbita $\Gamma_x = \{ \varphi_t(x),\ \forall t \in \mathbb{R} \}$



$t \geq 0$ futuro
$t \leq 0$ passato

- punto di equilibrio, punto critico

punto fisso $\Gamma = \{x\}$

- orbita periodica : curva chiusa $\gamma : S^1 \longrightarrow M$

$T \qquad \varphi_T(x) = x$

<u>Ad esempio</u>

$$\begin{cases} u'(\tau) = (r - a\, v(\tau))\, u(\tau) \\ v'(\tau) = (-\mu + \beta a\, u(\tau))\, v(\tau) \end{cases}$$

u, v