Buongiorno!

Lezione 2 Marzo 2021

Sono presenti in aula A dalle 14-17 del 2/3/21 (su autodichiarazione)

Sm 6000682
Sm 6000694
sm 6000695

Sm 6000680
Sm 6000696
Sm 6000714

Sm 6000702
Sm 6000712
Sm 6000699

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $A$ aperto

è derivabile in $x_0 \in A$ se

esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f$ è derivabile in $x_0$, si indica con

$f'(x_0)$ o con $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ il limite del rapporto incrementale di $f$ in $x_0$

Se $f$ è derivabile in ogni $x_0 \in A$ allora $f$ si dice derivabile in $A$.

In tal caso è definita la funzione

$$x \in A \longmapsto f'(x) = \frac{df}{dx}$$

e questa funzione è detta DERIVATA di $f$ e si indica con $f'$ o con $\frac{df}{dx}$.

Se $f' : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è a sua volta derivabile in $A$

ossia se $\forall x_0 \in A$ esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

in tal caso è definita la funzione

$$f'' : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \in A \qquad f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

La derivata n-sima di $f$ (quando esiste) si indica con $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$

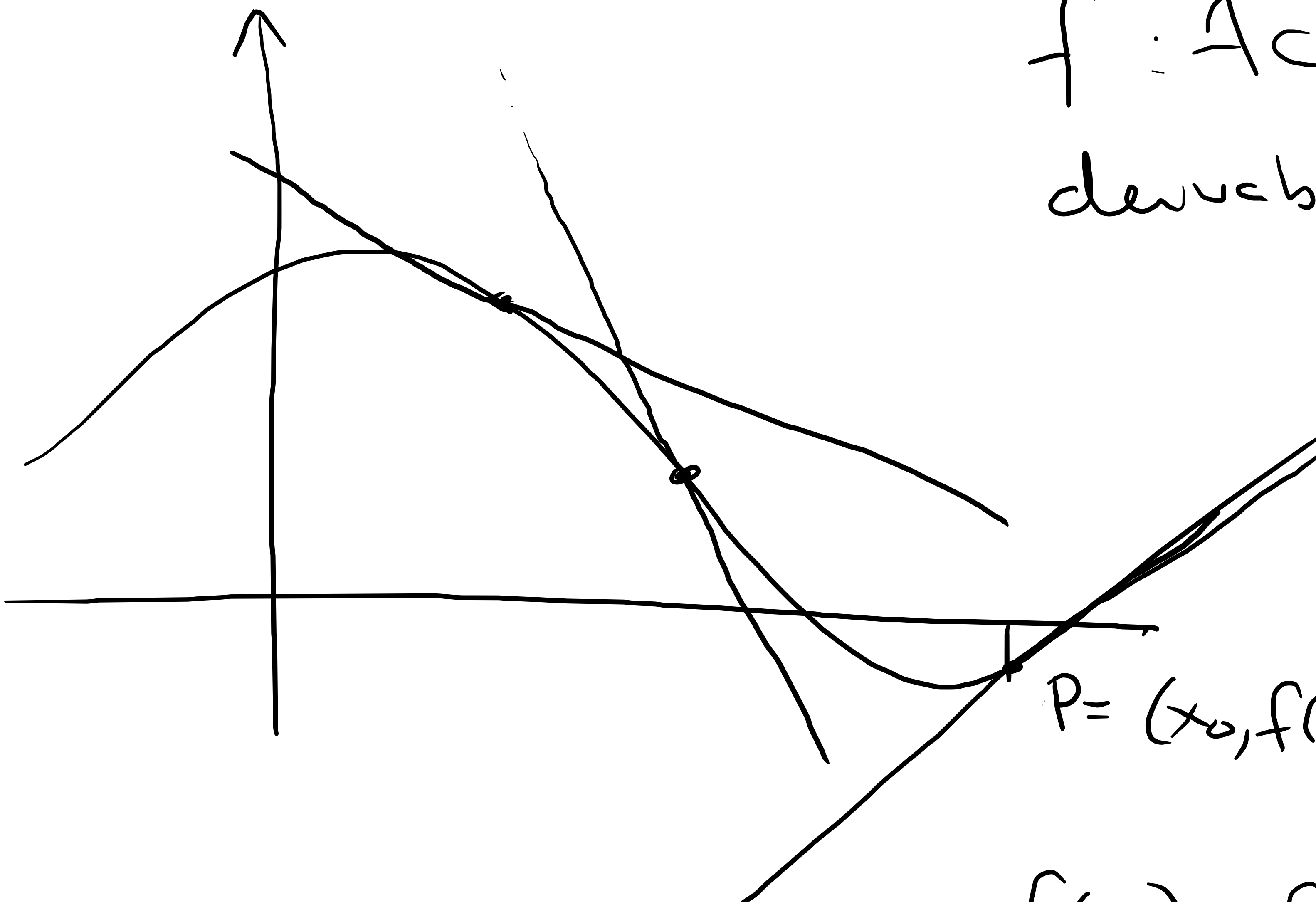
$$f^{(1)} = f' \qquad f^{(2)} = f'' \qquad f^{(3)} = f'''$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f\right)$$

Per convenzione $\boxed{f^{(0)} = f}$

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

derivabile in $A$



$y = mx + q$

$m = f'(x_0)$

$P = (x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

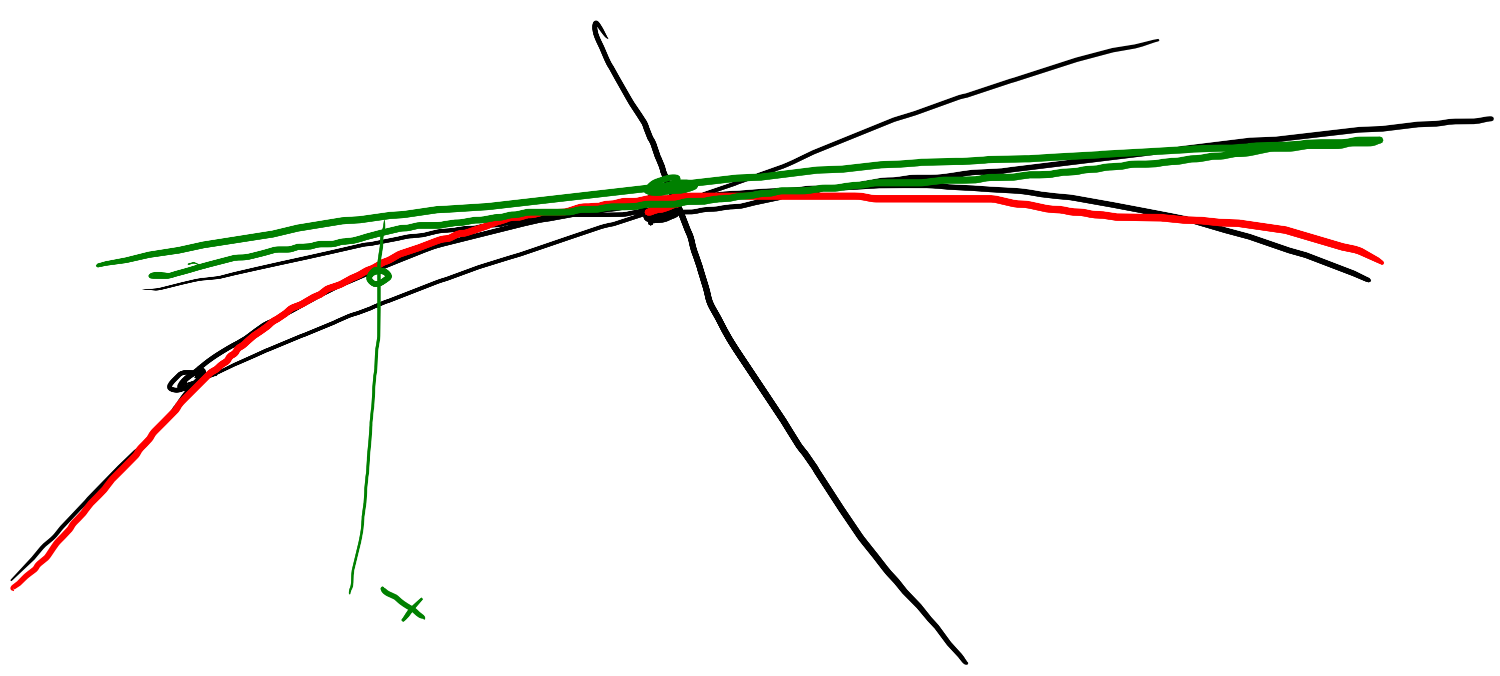
$$y = \underbrace{f'(x_0)}_{m\,=} \cdot x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0}_{=\,q}$$

$$x \mapsto \underline{\underline{a}}\,(x - x_0) + b = p_1(x)$$

funzione polinomiale di grado 1. (se $a \neq 0$)

Nel caso della retta tangente $a = f'(x_0)$

$b = f(x_0)$



$$f(x) - p_1(x) =$$

$$= f(x) - \left[a(x-x_0) + b\right]$$ sia infinitesimo di ordine $\geq 1$ in $x_0$

ora

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_1(x)}{(x-x_0)} = 0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p_1(x)}{x - x_0} =$$

$$= \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - a(x-x_0) - b}{(x-x_0)}} = 0$$

Osserviamo che deve essere

$$\lim_{x\to x_0} [\underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)} - \underbrace{a(x-x_0)}_{\to 0} - \underbrace{b}_{\to b}] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x_0) - b = 0$$

Pertamb $b = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \frac{\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = f'(x_0)}$$

In generale consideriamo un polinomio (e quindi una funzione polinomiale) di grado $n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$(a_n \neq 0)$

e consideriamo

$$f(x) - \underline{P_n(x)}$$

in un intorno di $x_0$. con le condizioni

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Quando $n = 1$, la condizione sopra imponeva $a_0 = b = f(x_0)$ $a_1 = a = f'(x_0)$

Supponiamo $f$ sia $n$ volte derivabile in (un intorno di) $x_0$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

$P_n$ è infinite volte derivabile

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

Allo stesso modo

$$x \overset{g}{\longmapsto} (x-x_0)^n = g(x)$$

è infinite volte derivabile e si ha

$$g'(x) = n\,(x-x_0)^{n-1}$$

$$g''(x) = n\cdot(n-1)\,(x-x_0)^{n-2}$$

$$g'''(x) = n\,(n-1)(n-2)\,(x-x_0)^{n-3}$$

$$g^{(n)}(x) = \underline{n\,(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}\;\overbrace{(x-x_0)^0}^{=1} = n!$$

Ricordiamo che vogliamo imporre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$$\left( f(x) - p_n(x) = o\left[(x-x_0)^n\right] \right)$$

o piccolo

Se f è n volte derivabile in (un intorno di) $x_0$ posso applicare la regola di de l'Hôpital

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} \frac{f'(x)-p_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$\Big\downarrow H$$

$$n!\,a_n$$

$$\frac{f^{(n)}(x) - p_n^{(n)}(x)}{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{=\,n!}} =$$

$$\boxed{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n}$$

$$\Uparrow$$

Se $f^{(n)}$ è continua in $x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - n!\,a_n}{n!} = 0$

Il polinomio

$$T_n(x) = \underset{\substack{\shortparallel \\ a_0}}{f(x_0)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ a_1}}{f'(x_0)} \cdot (x-x_0) + \underset{\substack{\shortparallel \\ a_2}}{\frac{f''(x_0)}{2!}} (x-x_0)^2 + \dots + \underset{\substack{\shortparallel \\ a_n}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}} (x-x_0)^n$$

è detto polinomio di Taylor di $f$, di grado $n$

ed è tale che $\underline{f(x) - T_n(x)} = o\left((x-x_0)^n\right)$

cioè $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

La differenza $f(x) - T_n(x)$ è detta resto e indicata con $R_{n,x_0}(x)$

Se $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor $T_n(x)$ è anche detto di Mc Laurin.

Si usa anche l'espressione "approssimante o sviluppo di Taylor (Mc Laurin) di $f$" per indicare $T_n(x)$.

$\operatorname{sen} x$ non è polinomiale ma è infinite volte derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

I $(\operatorname{sen})'(x) = \cos x$

II $(\cos)'(x) = -\operatorname{sen} x$

III $(-\operatorname{sen})'(x) = -\cos x$

IV $(-\cos)'(x) = \operatorname{sen} x$

Consideriamo $x_0 = 0$

Lo sviluppo di Mc. Laurin di sen x è

$x_0 = 0$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\overset{\substack{a_0 \\ \|}}{\operatorname{sen} 0}} + \underset{\substack{\| \\ 1}}{\overset{\substack{a_1 \\ \|}}{\cos 0}} \cdot (x-0) + \overset{\substack{a_2 \\ \|}}{\frac{(-\operatorname{sen} 0)}{2!}} \cdot (x-0)^2 +$$

$$+ \overset{\substack{a_3 \\ \|}}{\frac{\underset{\substack{\| \\ -1}}{(-\cos 0)}}{3!}} (x-0)^3 + \overset{\substack{a_4 \\ \|}}{\underset{\substack{\| \\ 0}}{\frac{(\operatorname{sen} 0)}{4!}}} (x-0)^4 +$$

$$+ \overset{\substack{a_5 \\ \|}}{\frac{(\cos(0))}{5!}} (x-0)^5 = T_5(x)$$

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1/3! \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 1/5!$

$$T_5(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} x^5$$

$$= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \quad n = 2k \\ & n = 2k+1 \\ \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k & \end{cases}$$

$\cos x$ non è polinomiale ma è infinite volte derivabile in $x_0 = 0$

I $\quad (\cos)'(x) = -\operatorname{sen} x$

II $\quad (-\operatorname{sen})'(x) = -\cos x$

III $\quad (-\cos x)'(x) = +\operatorname{sen} x$

IV $\quad (\operatorname{sen})'(x) = \cos x$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} & n = 2k \end{cases}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1/2$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}$$

$x \to \underline{e^x}$

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x$

$a > 0$

$a^x = \left(e^{\log_e a}\right)^x = \underline{e^{x \cdot \log_e a}}$

$\boxed{e^0 = 1}$ $x_0 = 0$ $a_n = \frac{1}{n!}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$e = e^1 = e^x\Big|_{x=1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

$$\boxed{e^x - T_n(x) = R_{n,0}(x)} \;\#$$

---

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

$x = b$
$x_0 = a$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \dots + o(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(x) = f(x_0) + f'(c)\cdot(x - x_0)}$$

In generale se $f$ è $(n+1)$ volte derivabile in (un intorno di) $x_0$, allora

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

$$\log(1+x) = \ldots$$

$$x_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \ldots$$

$$\operatorname{arctg}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\log(\cos x) = \log\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2!} + o(x)}\Big) \ldots$$