Metodi

In queste note molti argomenti facilmente si adattano con poche modifiche sia al caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}$ che a valori in $\mathbb{C}$. Quando questa possibilità sarà attuabile indicheremo l'insieme con $\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$. Col simbolo $|\cdot|$ indicheremo quindi sia il valore assoluto su $\mathbb{R}$ che il modulo su $\mathbb{C}$. Inoltre con z^* indicheremo il coniugato di $z \in \mathbb{C}$. Nel caso si stia leggendo la teoria come se fosse formalizzata su $\mathbb{R}$, semplicemente ignorare questo simbolo.

I riferimenti bibliografici [B , #] e [C , #] sono ai libri con autori rispettivamente Giulio Cesare Barozzi e Marco Codegone, consigliati per il corso, al posto di # sarà inserito il riferimento alla sezione o alla pagina o simili.

1 Preliminari

Nei precedenti corsi di analisi è stata introdotta la teoria dell'integrazione *secondo Riemann*. Tale teoria, molto semplice da esporre presenta delle problematiche:

- É facile trovare funzioni non integrabili secondo Riemann, come ad esempio la nota funzione di Dirichlet.
- Se abbiamo una successione $(f_n)_n$ di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo chiuso tale che tutte le funzioni sono integrabili secondo Riemann e tali che per ogni $x \in I$ esiste il limite puntuale $\lim_n f_n(x) = f(x)$, ciò non implica che la funzione limite $f : I \to \mathbb{R}$ sia integrabile secondo Riemann.
- Se nelle ipotesi del punto precedente abbiamo che la funzione limite è integrabile, nulla garantisce che valga
$$\lim_n \int_I f_n(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx\,.$$
Esistono infatti esempi in cui le funzioni f_n e f coinvolte sono continue e non vale l'identità precedente.
- Le formule di riduzione nel calcolo integrale richiedono sia l'integrabilità delle funzioni ristrette alle sezioni sia l'integrabilità sul rettangolo.

Maggiori dettagli su [B , Cap. 2].

Le precedenti osservazioni ci inducono a preferire la definizione di integrale *secondo Lebesgue* di cui andremo a dare una breve introduzione.

Definizione 1 (Insiemi di misura nulla secondo Lebesgue)**.** *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice di misura nulla secondo Lebesgue se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di* multi-rettangoli $(R_n)_n$ *tale che*
$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\,, \qquad e \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} m(R_n) \le \varepsilon\,.$$
Scriveremo $m(E) = 0$.

La misura degli insiemi *secondo Peano-Jordan* introdotta per l'integrale di Riemann ammette l'esistenza solo di un insieme *finito* di rettangoli. L'esempio classico è l'insieme $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ che ha misura nulla secondo Lebesgue, mentre $[0, 1] \setminus D$ ha misura 1. Questi insiemi non sono misurabili secondo Peano-Jordan.

In seguito diremo che una certa proprietà, oppure una certa affermazione, è verificata **quasi ovunque** (in breve q.o.) su un insieme I se esiste un insieme E di misura nulla secondo Lebesgue per cui essa è valida sull'insieme $I \setminus E$. Analogamente, verrà adottata la notazione $\forall_{q.o.}$ col significato di *per quasi ogni.*

Definizione 2 (Funzioni semplici)**.** *Diremo che una funzione* $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *è una funzione semplice (o a gradino, o a scala) se esiste un numero finito di multi-rettangoli* $R_1, \dots, R_M$ *tali che* $m(R_i \cap R_j) = 0$ *per ogni* $i \neq j$*, e delle costanti* $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *tali che*

$$s(x) = c_1 \chi_{R_1} + c_2 \chi_{R_2} + \dots c_M \chi_{R_M} \,,$$

dove $\chi_E : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *denota la funzione caratteristica dell'insieme* E*:*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \,. \end{cases}$$

Una funzione semplice è integrabile secondo Riemann e vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} s(x)\, dx = \sum_{j=1}^{M} c_j m(R_j) \,.$$

Vediamo ora la definizione di integrale secondo Lebesgue.

Definizione 3. *Una funzione* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *si dice integrabile secondo Lebesgue in* $\mathbb{R}^N$ *se esiste una successione di funzioni a scala* $s_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *tali che*

- $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad$ *q.o. in* $\mathbb{R}^N$,
- $\lim_{m,n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |s_m(x) - s_n(x)| = 0.$

Porremo allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n(x)\, dx \,.$$

Si noti che, dalla disuguaglianza triangolare segue che, definita la successione $(I_n)_n$ di valori $I_n = \int_{\mathbb{R}^N} s_n(x)\, dx \in \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, abbiamo

$$|I_n - I_m| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} s_n(x) - s_m(x)\, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |s_n(x) - s_m(x)|\, dx \,.$$

La successione $(I_n)_n$ è quindi una successione di Cauchy in $\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, quindi convergente. Si può dimostrare, ma la dimostrazione non è breve, che la definizione non dipende dalla scelta della successione di funzioni semplici.

Una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, è integrabile secondo Lebesgue su E se lo è la sua estensione a zero fuori dal dominio

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

e porremo

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)\, dx \,.$$

Definizione 4. *Diremo che una funzione* $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *si dice misurabile se esiste una successione* $(s_n)_n$ *di funzioni semplici* $s_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \tilde{f}(x) \quad \textit{q.o. in } \mathbb{R}^N \,.$$

1.1 Proprietà

Una funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ misurabile è integrabile se e solo se esiste una funzione integrabile $g : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che $|f(x)| \leq g(x)$ q.o. in E.

Una funzione f è integrabile se e solo se $|f|$ è integrabile. In particolare la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile secondo Riemann su $[0, +\infty)$, ma non secondo Lebesgue.

Se due funzioni $f, g : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ soddisfano $f(x) = g(x)$ q.o. in E allora f è integrabile se e solo se g è integrabile, inoltre vale

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx\,.$$

Ne consegue che ai fini dell'integrazione possiamo identificare funzioni che coincidono sul loro dominio eccetto al più un insieme di misura nulla. In particolare, ai fini dell'integrale di Lebesgue la funzione costante zero e la funzione di Dirichlet sono la stessa funzione.

Proposizione 5. *Se una funzione limitata $f : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, definita su un dominio E limitato, è integrabile secondo Riemann allora essa è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono.*

Denotiamo, dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$, lo spazio vettoriale delle funzioni integrabili secondo Lebesgue con

$$L^1(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}\ :\ \int_E |f(x)|\,dx < +\infty \right\}\,.$$

Esso è uno spazio di Banach (spazio normato completo) con norma

$$\|f\|_1 = \int_E |f(x)|\,dx\,.$$

Cioé, data una successione di Cauchy $(f_n)_n \subset L^1(E)$, ovvero tale che

$$\lim_n \int_E |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\,dx = 0\,, \qquad \forall p > 0\,,$$

allora essa converge ad una funzione $f \in L^1(E)$, ovvero

$$\lim_n \int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0\,,$$

e in particolare vale

$$\lim_n \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx\,.$$

Inoltre esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ della successione $(f_n)_n$ che *converge quasi ovunque* alla funzione f, ovvero

$$\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)\,, \qquad \text{q.o. in } E$$

(convergenza puntuale quasi ovunque).

Vediamo ora una lista di teoremi che non dimostreremo che saranno utili nel seguito.

Teorema 6 (Teorema della convergenza dominata di Lebesgue)**.** *Consideriamo una successione $(f_n)_n \subset L^1(E)$ che converge puntualmente q.o. in E ad una funzione $f : E \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$.*

Se esiste una funzione $g \in L^1(E)$ tale che, per ogni n, $|f_n(x)| \le g(x)$ quasi ovunque in E, allora la funzione f è integrabile e vale

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_n \int_E f_n(x)\,dx\,.$$

Per quanto riguarda l'integrazione in due dimensioni, l'analogo del teorema di riduzione è dovuto ai teoremi di Fubini e Tonelli.

Teorema 7 (Teorema di Fubini)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ integrabile, allora per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ le sezioni $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ sono integrabili e, la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita come*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$$

è integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx\,.$$

Teorema 8 (Teorema di Tonelli)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ misurabile tale che $f(x,y) \geq 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ le sezioni $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ siano integrabili e che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita come*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$$

sia anch'essa integrabile.

Allora la funzione f è integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx\,.$$

Notiamo che nel primo enunciato l'integrabilità come funzione di due variabili comporta l'integrabilità delle sezioni, mentre così non accade nell'integrale di Riemann.

I teoremi precedenti permettono quindi di scrivere per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ le formule di riduzione e di inversione dell'ordine di integrazione

$$\int_E f(x,y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$

Andiamo ora a trattare il caso di funzioni dipendenti da un parametro t appartenente ad un certo intervallo.

Teorema 9. *Sia $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che la sezione $f(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ è integrabile per ogni $\omega \in (a,b)$, mentre le sezioni $f(t, \cdot) : (a,b) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ sono continue per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo esista una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile tale che*

$$|f(t,\omega)| \leq g(t) \qquad \textit{per ogni } \omega \in (a,b) \textit{ e } \forall_{q.o.} t \in \mathbb{R}\,.$$

Allora la funzione $F : (a,b) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita come

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t,\omega)\, dt\,,$$

è continua in (a,b).

Teorema 10 (Derivazione sotto segno di integrale)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che le sezione $f(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ e $\frac{\partial f}{\partial \omega} f(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ sono integrabili per ogni $\omega \in (a,b)$, mentre le sezioni $f(t, \cdot) : (a,b) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ sono di classe C^1 per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo esistano due funzione $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili tali che*

$$|f(t,\omega)| \leq g(t)\,, \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial \omega}(t,\omega) \right| \leq h(t)\,, \qquad \textit{per ogni } \omega \in (a,b) \textit{ e } \forall_{q.o.} t \in \mathbb{R}\,.$$

Allora la funzione $F : (a,b) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita come

$$F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t,\omega)\, dt\,,$$

è di classe C^1 in (a,b) e vale

$$F'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial \omega}(t,\omega)\, dt\,.$$

2 Spazi di funzioni

In questa sezione ci concentriamo su funzioni definite su un intervallo reale. La variabile quindi sarà considerata come temporale e useremo la lettera x per definire la funzione.

Definiamo i seguenti spazi di funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$$L^1(E) = \left\{ x : E \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})} \; : \; \int_E |x(t)| \, dt < +\infty \right\} ,$$

$$L^2(E) = \left\{ x : E \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})} \; : \; \int_E |x(t)|^2 \, dt < +\infty \right\} ,$$

$$L^\infty(E) = \big\{ x : E \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})} \text{ misurabile, limitata q.o.} \big\} .$$

Con *limitata q.o.* intendiamo che esiste una costante $M > 0$ tale che $|x(t)| \leq M$ per quasi ogni $t \in E$.

Osserviamo che, ricordando che stiamo considerando un intervallo $E = [a, b]$ limitato,

$$C^1(E) \subset C^0(E) \subset L^\infty(E) \subset L^2(E) \subset L^1(E) ,$$

dove con $C^0(E)$ denotiamo le funzioni continue e con $C^1(E)$ le funzioni derivabili con derivata continua, ovvero di classe C^1. La seguente funzione è tale che $x \in L^1(E)$ ma $x \notin L^2(E)$, con $E = [0, 1]$:

$$\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} & t > 0 , \\ 0 & t = 0 . \end{cases}$$

Esercizio 11. *Individuare una funzione appartenente a $L^2(E) \setminus L^\infty(E)$ e una appartenente a $L^\infty(E) \setminus C^0(E)$.*

Definiamo le seguenti norme

$$\|x\|_1 = \int_E |x(t)| \, dt ,$$

$$\|x\|_2 = \left(\int_E |x(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|x\|_\infty = \operatorname{supess}_E |x(t)| .$$

Sono spazi di Banach (ovvero spazi normati completi) le seguenti coppie

$$(L^1(E), \| \cdot \|_1) , \quad (L^2(E), \| \cdot \|_2) , \quad (L^\infty(E), \| \cdot \|_\infty) , \quad (C^0(E), \| \cdot \|_\infty) .$$

Ricordiamo che anche $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ e $(\mathbb{C}, | \cdot |)$ sono spazi di Banach.

Naturalmente, per le funzioni continue vale più precisamente

$$\|x\|_\infty = \max_E |x(t)| .$$

L'introduzione dell'*estremo superiore essenziale* è legata al concetto di "quasi ovunque". Si tratta di un estremo superiore a meno di insiemi di misura nulla. Ricordando che la definizione di estremo superiore è data come minimo dei maggioranti, potremmo definirlo così:

$$\operatorname{supess}_E x = \min\{ M \; : \; x \leq M \text{ per quasi ogni } x \in E \} .$$

Ricordiamo le proprietà che definiscono una norma $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ in uno spazio vettoriale X su $\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$:

1a. $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$,

1b. $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$,

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$.

Naturalmente, nel caso delle funzioni dei precedenti spazi, nel punto 1b si deve intendere "$x = 0$ q.o.", altrimenti tale proprietà non è verificata.

Esercizio 12. *Mostrare che per le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ valgono le condizioni 1, 2 e 3. Mostrare che per la norma $\|\cdot\|_2$ valgono le condizioni 1 e 2. Per semplicità considerare funzioni continue.*

La norma $\|\cdot\|_2$ deriva dal seguente prodotto scalare:

$$\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle_2 : L^2(E) \times L^2(E) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})} \, ,$$

$$\langle x \, , \, y \rangle_2 = \int_E x(t) y^*(t) \, dt \, .$$

Attenzione: in alcuni libri, è il primo argomento a presentare il simbolo di coniugio. Fare molta attenzione a questo dettaglio quando si legge un libro di analisi complessa.

La precedente proprietà fa di $L^2(E)$ uno spazio di Hilbert (spazio euclideo tale che la norma indotta ne fa uno spazio normato completo). Ricordiamo che dato un prodotto scalare su uno spazio vettoriale vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\langle x \, , \, y \rangle_2 \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2 \, , \quad \forall x, y \in L^2(E) \, .$$

Esercizio 13. *Provare che vale la terza proprietà di norma per $\|\cdot\|_2$.*

Esercizio 14. *Provare che valgono le proprietà del prodotto scalare (hermitiano):*

- $\langle x \, , \, x \rangle_2 \geq 0$ *per ogni* $x \in L^2(E)$. *Inoltre* $\langle x \, , \, x \rangle_2 = 0$ *se e solo se* $x = 0$ *q.o.;*
- $\langle x \, , \, y \rangle_2 = \langle y \, , \, x \rangle_2^*$ *per ogni* $x, y \in L^2(E)$*;*
- $\langle \lambda x_1 + \mu x_2 \, , \, y \rangle_2 = \lambda \langle x_1 \, , \, y \rangle_2 + \mu \langle x_2 \, , \, y \rangle_2$ *per ogni* $x_1, x_2, y \in L^2(E)$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$*;*
- $\langle x \, , \, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle_2 = \lambda^* \langle x \, , \, y_1 \rangle_2 + \mu^* \langle x \, , \, y_2 \rangle_2$ *per ogni* $x, y_1, y_2 \in L^2(E)$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$.

2.1 Spazi di funzioni continue... o quasi

In questi appunti verranno introdotte delle notazioni aggiuntive.

Consideriamo lo spazio delle funzioni $x : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definizione 15. *Una funzione $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una partizione*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ per cui:

- *la restrizione di f all'intervallo aperto (t_{k-1}, t_k) è continua per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$,*
- *per ogni $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $h \in \{1, \ldots, n\}$ esistono reali i seguenti limiti*

$$x(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} x(t) \, , \quad x(t_h^-) = \lim_{t \to t_k^-} x(t) \, .$$

Notiamo che una funzione continua a tratti ammette solo punti di discontinuità di tipo *salto*.

Definizione 16. *Una funzione $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ è C^1 a tratti se è continua a tratti ed esiste una partizione*

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{m-1} < \tau_m = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ per cui:

- *la restrizione di f all'intervallo aperto (τ_{k-1}, τ_k) è C^1 per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$,*
- *per ogni $k \in \{0, \dots, m-1\}$ e $h \in \{1, \dots, m\}$ esistono reali i seguenti limiti*

$$x'(\tau_k^+) = \lim_{t \to \tau_k^+} x'(t)\,, \quad x'(\tau_h^-) = \lim_{t \to \tau_k^-} x'(t)\,.$$

Quindi una funzione C^1 a tratti ammette nella derivata solo punti di discontinuità di tipo *salto*.
Indicheremo con

$$C_t^0([a,b]) \quad \text{e} \quad C_t^1([a,b])$$

rispettivamente le funzioni continue a tratti e le C^1 a tratti.

Una funzione $f : E \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ è **a supporto compatto** se esiste un compatto $K \subsetneq E$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in E \setminus K$.
Nel caso $E = \mathbb{R}^N$ avremo che $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ è a supporto compatto se esiste $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $\|x\| > M$.
Nel caso $E = \mathbb{R}$ avremo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ è a supporto compatto se esiste $M > 0$ tale che $f(x) = 0$ al di fuori dell'intervallo $[-M, M]$.

Ricordando inoltre la definizione di funzioni di classe C^∞, definiremo lo spazio delle funzioni test, denotato con $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ come lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ di classe C^∞ a supporto compatto.
Diamo un esempio di funzione appartenente all'insieme $C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{a-x}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-b}} & a < x < b \\ 0 & x \ge b \end{cases}$$

Notiamo che se E è un compatto di $\mathbb{R}^N$ allora $C_0^\infty(E) = C^\infty(E)$.

Teorema 17. *Lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^N)$, ovvero per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ esiste una successione $(\varphi_n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che* $\lim_n \|f - \varphi_n\|_1 = 0$.

Infine introduciamo lo spazio $L^1_{loc}(E)$ delle funzioni localmente integrabili, ovvero tali che per ogni $x \in E$ esiste un intorno U_x per cui le restrizioni $f|_{U_x \cap E} \in L^1(U_x \cap E)$.
Ad esempio abbiamo che la funzione $h : I \to \mathbb{R}$, con $I = (0, +\infty)$, definita come $h(x) = \frac{1}{x}$, è tale che $h \in L^1_{loc}(I)$ ma $h \notin L^1(I)$.

3 Serie di Fourier

Definizione 18. *Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ si dice periodica se esiste $T > 0$ tale che*

$$x(t+T) = x(t)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Il valore T si dice periodo, il valore $\nu = \frac{1}{T}$ si dice frequenza, il valore $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ è detta frequenza angolare.
Spesso in queste note le funzioni saranno chiamate anche **segnali**.

Nota 19. *Parlando di funzioni periodiche di periodo T, ci concentreremo principalmente sui valori assunti nell'intervallo $[0, T]$ oppure nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, essendo poi univocamente determinato il valore della funzione in tutti gli altri istanti $t \in \mathbb{R}$. Parlando di funzioni periodiche, manterremo la stessa notazione per le loro restrizioni a questi intervalli.*
Quindi, in questo capitolo, parlando di una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T, nello scrivere $x \in L^1([0,T])$ intenderemo che la sua restrizione $x|_{[0,T]} : [0,T] \to \mathbb{R}$ appartiene a questo spazio.
Invece, scrivendo $x \in C^0([0,T])$ intenderemo sia $x|_{[0,T]} \in C^0([0,T])$ sia $x(0) = x(T)$. In più scrivendo $x \in C^1([0,T])$ intenderemo sia $x|_{[0,T]} \in C^1([0,T])$ sia $x(0) = x(T)$ e $x'(0) = x'(T)$.

Osserviamo che se x è periodica di periodo T allora è anche periodica con periodo kT per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Per questo motivo chiameremo *periodo fondamentale* il più piccolo di questi valori reali positivi. Nella precedente definizione gli elementi del dominio sono individuati tramite una variabile temporale. Qualora la variabile in gioco sia spaziale il termine periodo è sostituito dal termine *lunghezza d'onda*.

Da ora in avanti, trattando di funzioni periodiche di periodo T, ad esse automaticamente assoceremo il valore della frequenza angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Esempio 20. *Vediamo ora alcuni esempi di funzioni $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ periodiche di periodo T (ma non necessariamente con tale periodo fondamentale). Esse si dicono armoniche elementari di frequenza angolare ω.*

a) $x(t) = \alpha_k \cos(k\omega t) + \beta_k \sin(k\omega t)$ *dove* $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

b) $x(t) = \rho_k \sin(k\omega t + \theta_k)$ *dove* $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{N}$.

c) $z(t) = \gamma_k \mathrm{e}^{ik\omega t}$ *dove* $\gamma_k \in \mathbb{C}$ *e* $k \in \mathbb{Z}$.

Nel caso $k = 0$ abbiamo le costanti. Le prime due famiglie si introducono prevalentemente trattando funzioni $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'ultima trattando funzioni $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Il secondo esempio si tratta usualmente in fisica trattando l'oscillatore armonico, in queste note ci concentreremo principalmente sul primo e sul terzo.

Esercizio 21. *Ogni armonica elementare del gruppo a può essere scritta nella forma di armonica elementare del gruppo b e viceversa. Infatti vale il seguente legame tra le costanti $\alpha_k, \beta_k, \rho_k, \theta_k$ in gioco nel precedente esercizio.*

$$\begin{cases} \alpha_k = \rho_k \sin(\theta_k)\,, \\ \beta_k = \rho_k \cos(\theta_k)\,. \end{cases}$$

Inoltre è possibile trovare la relazione che lega l'armonica elementare del gruppo a con l'armonica elementare del gruppo c – con $k \in \mathbb{N}$ – imponendo che valga l'identità $x(t) = z(t) + z^*(t)$. Otteniamo

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_0\,, \\ \gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)\,. \end{cases}$$

Verificare le precedenti identità per esercizio. Vedi [C, 2.4].

Definizione 22. *Dato un segnale periodico $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ di periodo fondamentale T/k con $k \in \mathbb{N}^+$, diremo energia del segnale x nell'intervallo di lunghezza T il valore*

$$\|x\|_2^2 = \int_0^T |x(t)|^2\, dt\,.$$

Esercizio 23. *Calcola la norma $\|\cdot\|_2$ per le seguenti armoniche elementari:*

$$\begin{aligned}
&x(t) = \alpha_0 && \Rightarrow \|x\|_2^2 = \alpha_0^2 T \\
&x(t) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 && \Rightarrow \|x\|_2^2 = \alpha_0^2 \tfrac{T}{4} \\
&x(t) = \alpha_k \cos(k\omega t)\,, k > 0 && \Rightarrow \|x\|_2^2 = \alpha_k^2 \tfrac{T}{2} \\
&x(t) = \beta_k \sin(k\omega t)\,, k > 0 && \Rightarrow \|x\|_2^2 = \beta_k^2 \tfrac{T}{2} \\
&x(t) = \rho_k \sin(k\omega t + \theta_k)\,, k > 0 && \Rightarrow \|x\|_2^2 = \rho_k^2 \tfrac{T}{2} \\
&x(t) = \gamma_k \mathrm{e}^{ik\omega t} && \Rightarrow \|x\|_2^2 = \gamma_k^2 T
\end{aligned}$$

Esercizio 24. *Usando le formule*

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi\,,$$
$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi\,,$$

ricavare un'espressione (le formule di Werner) per

$$\sin\theta\cos\phi\,,\quad \sin\theta\sin\phi\,,\quad \cos\theta\cos\phi\,.$$

Usare le identità così trovate per dimostrare che

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(h\omega t)\,dt = 0\,, && \textit{se } h\neq k\,,\\
&\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(h\omega t)\,dt = 0\,, && \textit{se } h\neq k\,,\\
&\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(h\omega t)\,dt = 0\,, && \forall h,k\,.
\end{aligned}$$

Dalle stime dell'esercizio precedente (sono prodotti scalari $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_2$ di armoniche elementari di tipo a) troviamo che i segnali periodici dell'insieme

$$\mathcal{E} = \{\cos(k\omega t)\,:\,k\in\mathbb{N}^+\}\cup\{\sin(k\omega t)\,:\,k\in\mathbb{N}^+\}\cup\{\tfrac{1}{2}\}$$

sono a due a due ortogonali. Possiamo considerare il sottospazio vettoriale dell'insieme $L^2([0,T])$ generato dalla famiglia

$$\mathcal{E}_n = \{\cos(k\omega t)\,:\,k\in\mathbb{N}^+\,,\,k\leq n\}\cup\{\sin(k\omega t)\,:\,k\in\mathbb{N}^+\,,\,k\leq n\}\cup\{\tfrac{1}{2}\}$$

ovvero $W_n = Span(\mathcal{E}_n)$ di dimensione $2n+1$. L'insieme $\mathcal{E}_n$ è una base ortogonale di W_n per ogni $n\in\mathbb{N}$.

In modo del tutto analogo abbiamo il corrispondente risultato per le armoniche elementari elementari di tipo c.

Esercizio 25. *Dimostrare che*

$$\int_0^T e^{ik\omega t}\cdot e^{-ih\omega t}\,dt = 0\,,\qquad \textit{se } h\neq k\,.$$

Quindi anche i segnali periodici

$$\widehat{\mathcal{E}} = \{e^{ik\omega t}\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$$

sono a due a due ortogonali e da essi possiamo considerare il sottospazio vettoriale dell'insieme $L^2([0,T])$ generato dalla famiglia

$$\widehat{\mathcal{E}_n} = \{e^{ik\omega t}\,:\,k\in\mathbb{Z}\,,|k|\leq n\}\,,$$

trovando che $\widehat{W_n} = Span(\widehat{\mathcal{E}_n})$ è di dimensione $2n+1$ e che l'insieme $\widehat{\mathcal{E}_n}$ è una base ortogonale di $\widehat{W_n}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Richiamiamo ora il concetto di proiezione ortogonale introdotto nel corso di geometria.

Definizione 26 (Proiezioni ortogonali)**.** *Dato lo spazio euclideo V e il sottospazio vettoriale W generato da una base ortogonale $\{w_1,\dots,w_d\}$, possiamo definire la proiezione ortogonale $\Pi: V\to W$ come*

$$\Pi(v) = \sum_{j=1}^{d}\frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2}w_j\,.$$

Proposizione 27 (Teorema di Pitagora)**.** *Dato $W = Span\{w_1,\dots,w_d\}$ sottospazio vettoriale di V e Π proiezione ortogonale di V su W, allora per ogni $v\in V$ vale*

$$\|v-\Pi(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|\Pi(v)\|^2\,,\quad \forall v\in V\,.$$

Dimostrazione. Calcoliamo innanzitutto

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(v)\,,\,v\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{d} \frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2} w_j\,,\,v \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2} \langle w_j\,,\,v\rangle = \sum_{j=1}^{d} \frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2} \langle v\,,\,w_j\rangle^* \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{|\langle v\,,\,w_j\rangle|^2}{\|w_j\|^2} \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

In modo analogo abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(v)\,,\,\Pi(v)\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{d} \frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2} w_j\,,\, \sum_{k=1}^{d} \frac{\langle v\,,\,w_k\rangle}{\|w_k\|^2} w_k \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2} \frac{\langle v\,,\,w_k\rangle^*}{\|w_k\|^2} \langle w_j\,,\,w_k\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{|\langle v\,,\,w_j\rangle|^2}{\|w_j\|^2}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato, quindi concludiamo che

$$\begin{aligned}
\|v-\Pi(v)\|^2 &= \langle v-\Pi(v)\,,\,v-\Pi(v)\rangle \\
&= \langle v\,,\,v\rangle - \langle v\,,\,\Pi(v)\rangle - \langle \Pi(v)\,,\,v\rangle + \langle \Pi(v)\,,\,\Pi(v)\rangle \\
&= \|v\|^2 - \langle v\,,\,\Pi(v)\rangle - \langle v\,,\,\Pi(v)\rangle^* + \|\Pi(v)\|^2 \\
&= \|v\|^2 - \|\Pi(v)\|^2\,.
\end{aligned}$$

□

Applichiamo ora la precedente definizione ai sottospazi W_n e $\widehat{W}_n$ precedentemente introdotti. In quanto segue sostanzialmente calcoleremo i coefficienti $\frac{\langle v\,,\,w_j\rangle}{\|w_j\|^2}$ della precedente definizione.

Consideriamo una funzione periodica $x:[0,T]\to\mathbb{R}$ e definiamo i **coefficienti di Fourier**

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^T \frac{1}{2}x(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt\,, \tag{1}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)\,dt\,, \quad k>0\,, \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)\,dt\,, \quad k>0\,. \tag{3}$$

Nota 28. *La scelta* anomala *della costante $\frac{1}{2}$ al posto di 1 permette di ottenere per il valore di a_0 una formula coerente con quella di a_k ponendo $k=0$. Questa scelta viene adottata in [B, Cap. 3], dove tuttavia le funzioni periodiche hanno sempre periodo $T=2\pi$, mentre viene preferita la costante 1 in [C, Cap. 2]. Per questo motivo non tutte le formule appaiono allo stesso modo in queste note e sui due libri.*

Proposizione 29. *Consideriamo un segnale periodico $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ con periodo T, allora*

$$\int_0^T x(t)\,dt = \int_\tau^{\tau+T} x(t)\,dt\,, \qquad \forall\tau\in\mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ è possibile individuare $N \in \mathbb{Z}$ tale che $NT \leq \tau < (N+1)T$, cosicché con proprietà elementari dell'integrale otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\tau}^{\tau+T} x(t)\,dt &= \int_{\tau}^{(N+1)T} x(t)\,dt + \int_{(N+1)T}^{\tau+T} x(t)\,dt \\ &= \int_{\tau}^{(N+1)T} x(t)\,dt + \int_{NT}^{\tau} x(t)\,dt \\ &= \int_{NT}^{(N+1)T} x(t)\,dt = \int_{0}^{T} x(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

□

Possiamo osservare quindi che le costanti definite in (1)-(3) possono essere riscritte come

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(k\omega t)\,dt\,, \quad k \geq 0\,, \tag{4}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(k\omega t)\,dt\,, \quad k > 0\,. \tag{5}$$

In particolare, notiamo che se x è un segnale periodico pari, allora la funzione $x(t)\sin(k\omega t)$ è dispari, quindi $b_k = 0$. Analogamente, se x è un segnale periodico dispari, allora è la funzione $x(t)\cos(k\omega t)$ ad essere dispari, cosicché $a_k = 0$.

La proiezione ortogonale $\mathcal{F}_n : L^2([0,T]) \to W_n$ è definita come

$$\mathcal{F}_n[x](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]\,.$$

Consideriamo ora una funzione $x : [0,T] \to \mathbb{C}$ e definiamo, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, i **coefficienti di Fourier**

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\mathrm{e}^{-ik\omega t}\,dt\,. \tag{6}$$

La proiezione ortogonale $\mathcal{F}_n : L^2([0,T]) \to \widehat{W}_n$ è definita come

$$\mathcal{F}_n[x](t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t}\,.$$

Nota 30. *In [C, 2.7.1] è considerata la famiglia $\mathcal{E}_n$ come sopra, mentre in [B, 3.2] la costante 1 che si ottiene dal coseno scegliendo $k = 0$ è sostituita dalla costante $\frac{1}{2}$. Alcune formule quindi differiscono su quest'ultimo libro. Inoltre la teoria viene fatta per funzioni di periodo 2π.*

Chiameremo **polinomio di Fourier di ordine n associato a x** la funzione $\mathcal{F}_n[x]$ definita come sopra.

Calcoliamo ora l'energia di un polinomio di Fourier. Cominciamo dalle armoniche elementari di tipo c, in quanto presentano meno difficoltà di notazione al fine di illustrare tuti i passaggi necessari.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_n[x]\|_2^2 &= \langle \mathcal{F}_n[x]\,,\, \mathcal{F}_n[x]\rangle_2 \\ &= \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t}\,,\, \sum_{h=-n}^{n} c_h \mathrm{e}^{ih\omega t}\right\rangle_2 \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\sum_{h=-n}^{n} c_k c_h^* \left\langle \mathrm{e}^{ik\omega t}\,,\, \mathrm{e}^{ih\omega t}\right\rangle_2 \\ &= \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \|\mathrm{e}^{ik\omega t}\|_2^2 = T\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2\end{aligned}$$

Nel caso di armoniche elementari di tipo a, la scrittura di tutti i prodotti scalari coinvolti nel calcolo è omessa. Scrivere i dettagli per esercizio.

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_n[x]\|_2^2 &= \langle \mathcal{F}_n[x]\,,\,\mathcal{F}_n[x]\rangle_2 \\
&= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k\cos(k\omega t) + b_k(k\omega t)]\,,\,\frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{n} [a_h\cos(h\omega t) + b_h(h\omega t)] \right\rangle_2 \\
&= \cdots = \frac{T}{4}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\frac{T}{2} + b_k^2\frac{T}{2}\right) = T\left[\frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]
\end{aligned}
$$

In quanto segue studieremo cosa succede al crescere del valore n. Risponderemo alla domanda: *Sotto quali ipotesi possiamo affermare che* $\lim_n \mathcal{F}_n[x] = x$*? Che tipo di limite di funzioni dobbiamo/possiamo considerare?*

Ricordando la Proposizione 27, notiamo che vale

$$\|x - \mathcal{F}_n[x]\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \|\mathcal{F}_n[x]\|_2^2 = \|x\|_2^2 - T\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$$

oppure

$$\|x - \mathcal{F}_n[x]\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \|\mathcal{F}_n[x]\|_2^2 = \|x\|_2^2 - T\left[\frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right]$$

a seconda del contesto che stiamo analizzando. In maniera naturale otteniamo le seguenti maggiorazioni

$$s_n = T\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \le \|x\|_2^2\,, \qquad \sigma_n = T\left[\frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right] \le \|x\|_2^2\,. \tag{7}$$

I valori s_n e σ_n possono essere visti come elementi della successione delle somme parziali di una serie a termini non negativi. Tale successione è limitata superiormente, quindi la serie associata è convergente e vale

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 \le \frac{1}{T}\|x\|_2^2\,, \qquad \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}^+} a_k^2 + b_k^2 \le \frac{1}{T}\|x\|_2^2\,. \tag{8}$$

La disuguaglianza precedente prende il nome di **disuguaglianza di Bessel**. Vedremo tra poco che in realtà vale l'uguaglianza in questa formula, sotto opportune ipotesi.

3.1 Convergenza della serie di Fourier

3.1.1 Convergenza in energia

Abbiamo visto che vale la disuguaglianza di Bessel (8). In realtà in questa stima vale l'identità sotto le seguenti ipotesi.

Teorema 31. *Data* $x \in L^2([0,T])$*, allora vale l'*identità di Parseval

$$\lim_{n\to\infty}\|x - \mathcal{F}_n[x]\|_2 = 0\,,$$

ovvero la successione $(\mathcal{F}_n[x])_n$ *converge a* x *nello spazio* $L^2([0,T])$.

La precedente affermazione è anche nota come *convergenza in energia* o *convergenza in media quadratica.*

Possiamo quindi definire un'applicazione $\mathcal{F} : L^2([0,T]) \to L^2([0,T])$ tale che

$$\mathcal{F}[x](t) = \lim_n \mathcal{F}_n[x](t)$$

dove a seconda del setting scelto abbiamo

$$\mathcal{F}[x](t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t} \qquad \text{oppure}$$

$$\mathcal{F}[x](t) = a_0 \, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\,.$$

Le espressioni precedenti sono dette serie di Fourier associate alla funzione x.

3.1.2 Convergenza puntuale

Nella precedente sezione abbiamo introdotto l'applicazione $\mathcal{F}_n : L^2([0,T]) \to W_n$ con dominio $L^2([0,T])$, tuttavia possiamo prendere come dominio di questa applicazione l'insieme $L^1([0,T])$. Infatti, basta la sola integrabilità della funzione per poter calcolare i coefficienti richiesti dalle formule (1)–(3) e (6).

La stima in (8) ci suggerisce che le successioni $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ e $(c_k)_k$ sono infinitesime se la funzione x appartiene a $L^2([0,T])$.

Vedremo qui di seguito che è sufficiente chiedere $x \in L^1([0,T])$ per ottenere questa tesi. Tale risultato segue dalla validità del seguente lemma nel caso particolare di una scelta $\lambda = \omega k$ con $k \in \mathbb{Z}$ e dall'osservazione che per funzioni a valori reali possiamo sfruttare la seguente identità

$$\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt = \int_0^T x(t)\cos(\lambda t)\,dt + i\int_0^T x(t)\sin(\lambda t)\,dt\,.$$

Lemma 32 (Lemma di Riemann-Lebesgue)**.** *Per ogni funzione $x \in L^1([0,T])$ vale, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_0^T x(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt = 0\,.$$

La precedente formula, implica sotto le stesse ipotesi che

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^T x(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0\,, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^T x(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0\,.$$

Dimostrazione. Diamo un'idea della dimostrazione solo per funzioni integrabili secondo Riemann.

Fissando $\varepsilon > 0$, possiamo individuare una partizione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$ e una funzione costante a tratti $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che $\varphi(t) = \bar{x}_k \le x(t)$ per ogni $t \in (t_{k-1}, t_k)$ per ogni $k \in \{1,\ldots,n\}$ con la seguente proprietà

$$\begin{aligned} \varepsilon > \|x - \varphi\|_1 &= \int_0^T x(t) - \varphi(t)\,dt \\ &= \int_0^T x(t)\,dt - \sum_{k=1}^n \bar{x}_k (t_k - t_{k-1})\,. \end{aligned}$$

Inoltre, dalla seguente identità

$$\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt = \int_0^T (x(t)-\varphi(t))\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt + \int_0^T \varphi(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt$$

segue che

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt\right| &\le \int_0^T |x(t)-\varphi(t)|\,dt + \left|\sum_{k=1}^n \bar{x}_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{i\lambda t}\,dt\right| \\ &< \varepsilon + \sum_{k=1}^n |\bar{x}_k| \left|\frac{\mathrm{e}^{i\lambda t_k} - \mathrm{e}^{i\lambda t_{k-1}}}{i\lambda}\right| \\ &< \varepsilon + \frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^n |\bar{x}_k| < 2\varepsilon\,, \end{aligned}$$

scegliendo opportunamente un λ abbastanza grande. $\square$

Se consideriamo un segnale periodico $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, tale che $x \in L^1([0,T])$ allora vale anche $x \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, ricordando la Proposizione 29. Nei prossimi passaggi privilegeremo per comodità l'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ piuttosto che $[0,T]$.

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n[x](t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s)\mathrm{e}^{-ik\omega s}\, ds \right) \mathrm{e}^{ik\omega t} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s) \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik\omega(t-s)} \right) ds\,.
\end{aligned}$$

Al fine di semplificare la parte in parentesi svolgiamo i seguenti calcoli

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik\sigma} &= \mathrm{e}^{-in\sigma} \left(1 + \mathrm{e}^{i\sigma} + \mathrm{e}^{i2\sigma} + \dots \mathrm{e}^{i2n\sigma}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-in\sigma} \frac{1 - \mathrm{e}^{i(2n+1)\sigma}}{1 - \mathrm{e}^{i\sigma}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-in\sigma} - \mathrm{e}^{i(n+1)\sigma}}{1 - \mathrm{e}^{i\sigma}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-i(n+\frac{1}{2})\sigma} - \mathrm{e}^{i(n+\frac{1}{2})\sigma}}{\mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\sigma} - \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\sigma}} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\sigma\right)}{\sin(\frac{1}{2}\sigma)}\,.
\end{aligned}$$

La precedente stima ci permette di scrivere quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n[x](t) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s)\, \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega(t-s)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega(t-s)\right)}\, ds && \text{il seno è dispari} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s)\, \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega(s-t)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega(s-t)\right)}\, ds && \tau = s - t \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}+t} x(t+\tau)\, \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega\tau\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right)}\, d\tau && s = \tau,\ \text{Proposizione 29} \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+s)\, \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)}\, ds\,.
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo spezzare l'integrale sugli intervalli $[-\frac{T}{2}, 0]$ e $[0, \frac{T}{2}]$, effettuare sul secondo integrale il cambio di variabile $s \mapsto -s$, quindi usare nuovamente la disparità del seno e riaccorpare i due integrali (dettagli per esercizio), ottenendo

$$\mathcal{F}_n[x](t) = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [x(t+s) + x(t-s)]\, \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)}\, ds\,.$$

A questo punto definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione

$$D_n(s) = \frac{1}{T}\, \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)}$$

detta **nucleo di Dirichlet**, per ottenere la formula più compatta

$$\mathcal{F}_n[x](t) = \int_0^{\frac{T}{2}} [x(t+s) + x(t-s)]\, D_n(s)\, ds\,. \tag{9}$$

oppure

$$\mathcal{F}_n[x](t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-s) D_n(s)\, ds\,. \tag{10}$$

Esercizio 33. *Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione D_n è pari, periodica di periodo fondamentale T (dalla definizione, osservando numeratore e denominatore possiamo concludere immediatamente che un possibile periodo, non fondamentale, è $2T$). Inoltre valgono*

$$\lim_{s\to 0} D_n(s) = \frac{2n+1}{T}\,, \qquad e \qquad \int_0^T D_n(t)\, dt = 2\int_0^{\frac{T}{2}} D_n(t)\, dt = 1\,.$$

Per l'integrale, si suggerisce di considerare la funzione costante $x(t) \equiv 1$ nella formula (9)*.*

Proposizione 34. *Siano $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ due segnali periodici di periodo T appartenenti a $L^1([0,T])$ coincidenti sull'intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ per un certo $t_0 \in [0,T]$ e $\delta > 0$.*

Allora, le serie di Fourier associate hanno lo stesso carattere in t_0, e se convergenti vale $\mathcal{F}[x_1](t_0) = \mathcal{F}[x_2](t_0)$.

Dimostrazione. Traslando il segnale in modo opportuno, possiamo supporre che essi siano coincidenti sull'intervallo $[-\delta, \delta]$ per un certo $\delta \in [0, \frac{T}{2})$ e concentrare la nostra attenzione sull'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Scriviamo $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, e osserviamo che $\mathcal{F}_n[x_1](t) - \mathcal{F}_n[x_2](t) = \mathcal{F}_n[x](t)$ e che $x(t) = 0$ in $[-\delta, \delta]$. Quindi il nostro scopo è dimostrare che $\lim_n \mathcal{F}_n[x](0) = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n[x](0) &= \int_0^{\frac{T}{2}} [x(s) + x(-s)]\, D_n(s)\, ds \\
&= \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{x(s) + x(-s)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\omega s\right) ds \\
&= \int_\delta^{\frac{T}{2}} \frac{x(s) + x(-s)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\omega s\right) ds\,.
\end{aligned}$$

La funzione $y(s) = \frac{x(s)+x(-s)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \leq \frac{x(s)+x(-s)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega \delta\right)}$ è integrabile su $[\delta, \frac{T}{2}]$, quindi lo è anche la sua estensione a zero sull'intervallo $[0,T]$. La tesi segue quindi applicando il Lemma di Riemann-Lebesgue alla funzione $y\chi_{[\delta, \frac{T}{2}]} \in L^1([0,T])$, considerando $\lambda = (n + \frac{1}{2})\omega$. □

Ricordando ora il valore dell'integrale assegnato nell'Esercizio 33, osserviamo che per ogni $x \in L^1([0,T])$ possiamo scrivere

$$x(t) = \int_0^{\frac{T}{2}} 2x(t) D_n(s)\, ds\,.$$

L'eventuale validità, per un certo $t \in [0,T]$, del limite

$$\lim_n \mathcal{F}_n[x](t) - x(t) = 0$$

è equivalente, usando la (9), alla validità dei limiti

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{T}{2}} [x(t+s) + x(t-s) - 2x(t)]\, D_n(s)\, ds = 0 \\
&\qquad \iff \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{T}{2}} [x(t+s) + x(t-s) - 2x(t)] \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\omega s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)}\, ds = 0 \qquad (11)
\end{aligned}$$

Proposizione 35 (Criterio di Dini). *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ un segnale periodico di periodo T, tale che $x \in L^1([0,T])$. Se l'istante $t_0 \in [0,T]$ è tale che la funzione*

$$R_{t_0}(s) = \frac{x(t_0+s) + x(t_0-s) - 2x(t_0)}{s}$$

è integrabile secondo Lebesgue su un intervallo $[0,\delta]$ con $\delta > 0$ allora la serie di Fourier converge puntualmente in t_0, ovvero

$$\lim_n \mathcal{F}_n[x](t_0) = x(t_0)\,.$$

Dimostrazione. Ragionando come in precedenza possiamo scrivere l'integrale del secondo limite in (11) come

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{x(t_0+s) + x(t_0-s) - 2x(t_0)}{s} \, \frac{s}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega s\right)} \, \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\omega s\right) ds$$

La prima frazione, se $x \in L^1([0,T])$, è sicuramente integrabile nell'intervallo $[\delta, \frac{T}{2}]$ per ogni $\delta > 0$, mentre l'ipotesi *ad hoc* su R_{t_0} ci dà l'integrabilità sull'intervallo $[0,\delta]$. La seconda frazione è una nota funzione continua con una discontinuità eliminabile in zero, quindi concludiamo che il prodotto delle due frazioni è integrabile, dandoci la possibilità di applicare il Lemma di Riemann-Lebesgue e ottenere la tesi. □

La condizione richiesta dalla proposizione precedente non è sempre facile da verificare. Analizziamola. Possiamo scrivere

$$R_{t_0}(s) = \frac{x(t_0+s) - x(t_0)}{s} - \frac{x(t_0-s) - x(t_0)}{-s}\,,$$

notando la presenza di due rapporti incrementali che ricordano quelli coinvolti in un limite da destra e in un limite da sinistra. Concludiamo quindi che, se $x \in C^1_t([0,T]) \cap C^0([0,T])$ abbiamo la convergenza puntuale della serie, in quanto sotto queste condizioni l'ipotesi della proposizione precedente è verificata. Possiamo rinunciare alla richiesta $x \in C^0([0,T])$ limitandoci a chiedere $x \in C^1_t([0,T])$?

Data una funzione periodica $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che $x \in C^1_t([0,T])$ possiamo introdurre la sua funzione **regolarizzata** $\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ come

$$\tilde{x}(t) = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{s\to t^-} x(s) + \lim_{s\to t^+} x(s)\right)$$

osservando che $x = \tilde{x}$ su tutti i punti su cui x è continua. Regolarizzare una funzione $x \in C^1_t([0,T])$, significa imporre che la funzione nei punti di discontinuità assume il valore dato dalla media tra limite sinistro e destro. Notiamo che possiamo scrivere in questo caso

$$R_{t_0}(s) = \frac{x(t_0+s) - x(t_0^+)}{s} - \frac{x(t_0-s) - x(t_0^-)}{-s}\,,$$

per ogni $t_0 \in [0,T]$, concludendo con il seguente risultato.

Teorema 36. *La serie di Fourier di un segnale periodico $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ di periodo T, $x \in C^1_t([0,T])$ e regolarizzato, converge puntualmente.*

3.1.3 Convergenza uniforme

Definizione 37. *Data una successione di funzioni $(x_n)_n \subset C^0([0,T])$, $x_n : [0,T] \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, consideriamo la successione delle ridotte $(s_n)_n$ dove*

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\,.$$

Diremo che la serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge totalmente se converge la serie delle sue norme infinito, ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_\infty < \infty\,.$$

Proposizione 38. *Se una serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ è totalmente convergente allora è uniformemente convergente (e quindi puntualmente convergente).*

Dimostrazione. Osserivamo che

$$\|s_{n+p} - s_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|_\infty \,, \qquad \forall p, n \in \mathbb{N} \,. \tag{12}$$

Poiché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_\infty$ è convergente, allora la successione $\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_\infty\right)_n$ è una successione di Cauchy. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n}$ tale che, se $n > \bar{n}$ allora per ogni $p > 0$ vale $\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|_\infty < \varepsilon$. Ne consegue che anche la successione s_n è di Cauchy nella norma uniforme e quindi uniformemente convergente. □

Teorema 39. *La serie di Fourier di un segnale periodico $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ di periodo T, tale che $x \in C_t^1([0,T]) \cap C^0([0,T])$ converge uniformemente.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per funzioni a valori in $\mathbb{R}$.

Dalle ipotesi abbiamo la convergenza puntuale della serie di Fourier e che $x' \in L^2([0,T])$ quindi la derivata ammette serie di Fourier convergente in energia. Possiamo scrivere

$$x(t) = \mathcal{F}[x](t) = a_0 \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \,,$$

$$\mathcal{F}[x'](t) = \alpha_0 \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(k\omega t) + \beta_k \sin(k\omega t) \,,$$

Notiamo che

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x'(t)\, dt = \frac{2}{T} [x(T) - x(0)] = 0 \,,$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x'(t) \cos(k\omega t)\, dt \\ &= \cancel{\frac{2}{T} [x(t) \cos(k\omega t)]_0^T} + \frac{2}{T}\ k\omega \int_0^T x(t) \sin(k\omega t)\, dt \\ &= k\omega b_k \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x'(t) \sin(k\omega t)\, dt \\ &= \cancel{\frac{2}{T} [x(t) \sin(k\omega t)]_0^T} - \frac{2}{T}\ k\omega \int_0^T x(t) \cos(k\omega t)\, dt \\ &= -k\omega a_k \,. \end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 \leq \frac{2}{T} \|x'\|_2^2 \,,$$

troviamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{2}{T\omega^2} \|x'\|_2^2 \,. \tag{13}$$

A questo punto calcoliamo

$$\|a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\|_\infty = \max_{[0,T]} |a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)| \leq |a_k| + |b_k| \,.$$

Ricordando che $0 \leq (u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv$, possiamo notare che $uv \leq \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ per ogni scelta di $u, v \in \mathbb{R}$. Usando questa maggiorazione otteniamo

$$
\begin{aligned}
|a_k| &= (k|a_k|) \cdot \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}\left(k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2}\right), \\
|b_k| &= (k|b_k|) \cdot \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}\left(k^2 b_k^2 + \frac{1}{k^2}\right), \\
|a_k| + |b_k| &\leq \frac{1}{2} k^2 (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Quindi abbiamo

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_n[x]\|_\infty &\leq |a_0|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \|a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\|_\infty \\
&\leq |a_0|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k| \\
&\leq |a_0|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} k^2 (a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Deduciamo quindi la totale convergenza (e quindi l'uniforme convergenza) della serie di Fourier usando (13). □

Osservazione 40. *La convergenza uniforme è garantita anche sotto ipotesi più deboli: basta chiedere che la funzione x sia assolutamente continua e che la sua derivata x' appartenga allo spazio $L^2([0,T])$. Una funzione $x : [0,T] \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ si dice assolutamente continua se esiste una funzione $\xi \in L^1([0,T])$ tale che*

$$
x(t) = x(0) + \int_0^t \xi(s)\, ds.
$$

In particolare, le funzioni assolutamente continue sono funzioni continue e sono derivabili quasi ovunque nel loro dominio, con derivata che coincide quasi ovunque con la funzione ξ che ne caratterizza la proprietà. Inoltre, date due funzioni x, y assolutamente continue vale la ben nota formula di integrazione per parti.

3.2 Proprietà della serie di Fourier

In quanto segue, ci concentriamo sulla formulazione complessa delle serie di Fourier

$$
\mathcal{F}[x](t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t}.
$$

Inoltre considereremo in questa sezione sempre un segnale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $x \in C_t^0([0,T])$ in modo da aver garantita la convergenza puntuale dei segnali ben regolarizzati.

3.2.1 Linearità

Dati due segnali $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, entrambi di periodo T, con coefficienti di Fourier rispettivamente $c_{1,k}, c_{2,k}$, avremo che, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, i coefficienti di Fourier del segnale $\lambda x_1 + \mu x_2$ saranno $c_k = \lambda c_{1,k} + \mu c_{2,k}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. La dimostrazione sfrutta la linearità dell'integrale ed è lasciata come **esercizio**.

3.2.2 Traslazione del segnale

La serie di Fourier del segnale $\tilde{x}(t) = x(t-\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$ ha coefficienti di Fourier $\tilde{c}_k = \mathrm{e}^{-ik\omega\tau} c_k$. Infatti, usando un opportuno cambio di variabile e la Proposizione 29,

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-ik\omega t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x(t-\tau)\mathrm{e}^{-ik\omega t}\,dt \qquad (s = t-\tau) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{e}^{-ik\omega(s+\tau)}\,ds \\
&= \mathrm{e}^{-ik\omega\tau}\frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{e}^{-ik\omega s}\,ds = \mathrm{e}^{-ik\omega\tau}\cdot c_k
\end{aligned}$$

3.2.3 Dilatazione/compressione in frequenza del segnale

Il segnale $\check{x}(t) = x(\alpha\tau)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ha periodo $\check{T} = T/\alpha$ e frequenza $\check{\omega} = \omega\alpha$. La sua serie di Fourier, che si scrive come

$$\check{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \check{c}_k \mathrm{e}^{ik\check{\omega}t},$$

ha gli stessi coefficienti di Fourier $\check{c}_k = c_k$. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}
\check{c}_k &= \frac{1}{\check{T}}\int_0^{\check{T}} \check{x}(t)\mathrm{e}^{-ik\check{\omega}t}\,dt \\
&= \frac{\alpha}{T}\int_0^{T/\alpha} \check{x}(t)\mathrm{e}^{-ik\omega\alpha t}\,dt \\
&= \frac{\alpha}{T}\int_0^{T/\alpha} x(\alpha t)\mathrm{e}^{-ik\omega\alpha t}\,dt \qquad (s = \alpha t) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x(s)\mathrm{e}^{-ik\omega s}\,ds = c_k
\end{aligned}$$

Se invece consideriamo il segnale $\check{x}(t) = x(-\alpha\tau)$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, in modo analogo si può mostrare che vale invece $\check{c}_k = c_{-k}$ trovando così

$$\check{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \check{c}_k \mathrm{e}^{ik\check{\omega}t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k}\mathrm{e}^{ik\check{\omega}t},$$

3.2.4 Serie di Fourier della derivata e della primitiva

Abbiamo già visto, in occasione della discussione della convergenza uniforme della serie di Fourier che, data $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, di periodo T, $x \in C^1_t([0,T]) \cap C^0([0,T])$ possiamo trovare una relazione tra i coefficienti delle serie di Fourier delle funzioni x e x'. In particolare, se

$$\mathcal{F}[x](t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t}$$

allora avremo

$$\mathcal{F}[x'](t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega\, c_k)\, \mathrm{e}^{ik\omega t}.$$

In modo analogo, se $x \in L^2([0,T])$ è periodica di periodo T e vale $\int_0^T x(t)\,dt = 0$, allora la funzione $X(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ è assolutamente continua (vedi Osservazione 40), periodica di periodo T e vale

$$X(t) = \mathcal{F}[X](t) = C_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik\omega}\,\mathrm{e}^{ik\omega t}.$$

dove

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt$$

e i coefficienti c_k sono quelli dalla serie di Fourier associata a x, ovvero tali che

$$x(t) = \mathcal{F}[x](t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t}\,.$$

In questo caso è interessante osservare che

$$0 = X(0) = C_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik\omega} \quad \Rightarrow \quad C_0 = -\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik\omega}\,.$$

Ricordiamo che, dal lemma di Riemann-Lebesgue, se $x \in L^1([0,T])$, allora la successione dei coefficienti di Fourier $(c_k)_k$, associati alla funzione x, è infinitesima.

Supponiamo che $x \in C^m(\mathbb{R})$, allora abbiamo che $x, x', x'', \ldots, x^{(m)}$ sono tutte funzioni continue e quindi i coefficienti di Fourier associati formano una successione infinitesima, in particolare

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}[x](t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ik\omega t}\,, \\ x'(t) = \mathcal{F}[x'](t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik\omega c_k)\mathrm{e}^{ik\omega t}\,, \\ x''(t) = \mathcal{F}[x''](t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-k^2\omega^2 c_k)\mathrm{e}^{ik\omega t}\,, \\ \ldots \quad \mathcal{F}[x^{(m)}](t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big((ik\omega)^m c_k\Big)\,\mathrm{e}^{ik\omega t}\,. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\lim_{|k|\to\infty} k^m c_k = 0\,.$$

Abbiamo dimostrato la prima implicazione del seguente teorema.

Teorema 41. *Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ periodica di periodo T, $x \in L^2([0,T])$.*

Se $x \in C^m(\mathbb{R})$, allora data la successione $(c_n)_n$ dei coefficienti di Fourier, vale

$$\lim_{|n|\to\infty} n^m c_n = 0\,.$$

Viceversa, se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^m c_n| < \infty$$

allora esiste una funzione $\xi \in C^m(\mathbb{R})$ tale che $x = \xi$ quasi ovunque su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione della seconda parte dell'enunciato. Consideriamo la serie di Fourier

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big((ik\omega)^\ell c_k\Big)\,\mathrm{e}^{ik\omega t}\,.$$

Tale serie, essendo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big((ik\omega)^\ell c_k\Big)\,\mathrm{e}^{ik\omega t} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\omega k)^\ell c_k| \le \omega^\ell \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^\ell c_k| < \infty\,,$$

converge totalmente, quindi uniformemente ad una funzione g_ℓ continua. Tale ragionamento può essere fatto per ogni $\ell = 0, \ldots, m$. Abbiamo quindi le funzioni continue $g_0, g_1, \ldots, g_m$. Tuttavia, riconoscendo che le serie ottenute sono una la serie derivata dell'altra, concludiamo che vale $g_\ell = g_0^{(\ell)}$, ottenendo la tesi. $\square$

4 Esercizi

Compito 1. *Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che*

$$x(t) = \begin{cases} -1 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

e verificare che vale

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}[1 - (-1)^k] \sin(kt) \,.$$

Analizzare il tipo di convergenza (in energia, puntuale, uniforme) e l'andamento asintotico dei coefficienti di Fourier. Scrivere il segnale $\tilde{x}$ regolarizzato per cui si ha la convergenza puntuale.

Usare le proprietà di calcolo per trovare la serie di Fourier associata alla funzione

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Scrivere il segnale $\tilde{y}$ regolarizzato di y.

Compito 2. *Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che $x(t) = |t|$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Verificare che vale (puntualmente o anche uniformemente?)*

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k - 1] \cos(kt) \,.$$

Da ciò dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \textit{and} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Suggerimento: per calcolare la seconda, usare la prima dopo aver dimostrato che, se $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = s/4$.

Compito 3. *Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che $x(t) = t^2$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Verificare che vale (puntualmente o anche uniformemente?)*

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos(kt) \,.$$

Da questa dedurre che

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \,.$$

Compito 4. *Calcolare la serie di Fourier associata alla funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 2\pi$ tale che $x(t) = t$ nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Verificare che*

$$x(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kt) \,.$$

Scrivere il segnale $\tilde{x}$ regolarizzato di x.

5 La trasformata di Fourier

Abbiamo visto che una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ periodica di periodo T è sviluppabile in serie di Fourier (sotto opportune ipotesi) nel modo seguente:

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{in\omega t}$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s) \mathrm{e}^{-in\omega s} \, ds \, .$$

Quindi possiamo scrivere direttamente l'espressione dei cofficienti c_n nella prima formula e ottenere

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \omega \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s) \mathrm{e}^{-in\omega s} \, ds \right) \mathrm{e}^{in\omega t}.$$

Qualora avessimo una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ che non fosse periodica, potremmo dire rozzamente che è una funzione di periodo $T = \infty$. Vediamo cosa succede se consideriamo il limite $T \to \infty$ nella formula precedente. Osserivamo che $\omega \to 0$, mentre l'integrale, ponendo $\lambda = n\omega$, diventerebbe

$$\hat{x}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \mathrm{e}^{-i\lambda s} \, ds$$

dando così

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \omega \hat{x}(n\omega) \mathrm{e}^{in\omega t} \, .$$

Potremmo interpretare la precedente somma come un'approssimazione dell'integrale della funzione $\hat{x}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda t}$ sull'asse reale effettuato sulla partizione $P = \{n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$ di passo costante ω. Quindi passando al limite $T \to \infty$ ($\omega \to 0$) ci aspetteremmo

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \, d\omega \, . \tag{14}$$

Notiamo che la funzione $\hat{x}$ gioca un ruolo particolare in questo ragionamento, quindi le daremo un nome formalizzandone la definizione come segue.

Definizione 42 (Trasformata di Fourier)**.** *Data una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, tale che $x \in L^1(\mathbb{R})$, definiamo la trasformata di Fourier di x la funzione*

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \, dt \, .$$

Dalla definizione, ricordando la (14) ci aspetteremmo di ottenere la seguente formula di inversione:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[x](\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \, d\omega \, , \tag{15}$$

Tuttavia, quali ipotesi aggiuntive dovremo chiedere affinché tale formula si possa calcolare?

La precedente definizione di trasformata di Fourier non è univoca, in alcuni libri si preferisce cambiarla leggermente. Ecco alcune possibili varianti:

- $\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \, dt \, ,$

  cosicché $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \, d\omega \, ,$
- $\hat{x}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i2\pi\nu t} \, dt \, ,$

  cosicché $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\nu) \mathrm{e}^{i2\pi\nu t} \, d\nu \, ,$

Vediamo ora alcune proprietà della trasformata di Fourier. Consideriamo quindi $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che $x \in L^1(\mathbb{R})$. Possiamo notare che

$$\begin{aligned} |\mathscr{F}[x](\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \, dt \right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt \le \|x\|_1 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\|\mathscr{F}[x]\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \mathscr{F}[x](\omega) \le \|x\|_1 \,. \tag{16}$$

5.1 Esempi ed esercizi

5.1.1 Funzione caratteristica

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $\chi_{[a,b]}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\chi_{[a,b]}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\ &= \int_a^b \mathrm{e}^{-i\omega t}\,,\,dt \\ &= \begin{cases} b-a & \omega = 0 \\ \left[-\frac{1}{i\omega}\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]_a^b = -\frac{1}{i\omega}\left(\mathrm{e}^{-i\omega b} - \mathrm{e}^{-i\omega a}\right) & \omega \ne 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\mathscr{F}[\chi_{[a,b]}](\omega) = \begin{cases} b-a & \omega = 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(\mathrm{e}^{-i\omega a} - \mathrm{e}^{-i\omega b}\right) & \omega \ne 0 \end{cases}$$

Esercizio 43. *Mostrare che $\mathscr{F}[\chi_{[a,b]}]$ è continua. Suggerimento: usare che $\mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a(\cos b + i\sin b)$ per $a, b \in \mathbb{R}$.*

Nel caso particolare $[a,b] = [-d,d]$ troviamo

$$\mathscr{F}[\chi_{[-d,d]}](\omega) = \begin{cases} 2d & \omega = 0 \\ \frac{2}{\omega}\sin(d\omega) & \omega \ne 0 \end{cases}$$

Più brevemente si scrive

$$\mathscr{F}[\chi_{[-d,d]}](\omega) = 2d\,\mathrm{sinc}\left(\frac{d\omega}{\pi}\right)$$

dove è stata introdotta la funzione *seno cardinale*

$$\mathrm{sinc}\, x = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & x \ne 0 \end{cases} \tag{17}$$

Osservazione 44. *Sebbene la funzione caratteristica non sia continua, notiamo che la sua trasformata di Fourier è continua. Inoltre la trasformata è infinitesima e va a zero come ω^{-1}.*

5.1.2 Le funzioni $\mathrm{e}^{-a|t|}$ e $\frac{1}{a^2+\omega^2}$.

Fissiamo $a > 0$ e calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $x_a(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$.

$$\mathscr{F}[x_a](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a+i\omega)t}\,dt \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{\mathrm{e}^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}\,.$$

Notiamo che la funzione è continua ma non derivabile, mentre la sua trasformata è di classe C^∞ e decresce a infinito come ω^{-2}.

Come secondo esempio notiamo che vale, posta $x(t) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$,

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt = \frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}\,.$$

Il risultato è un semplice esercizio di analisi reale per $\omega = 0$.

Se $\omega \neq 0$ l'integrale si risolve usando il metodo dei residui. Ne diamo una dimostrazione schematica. Grazie al lemma di Jordan possiamo considerare un percorso a semicerchio nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \leq 0\}$ per $\omega > 0$ (nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$ per $\omega > 0$) e notare che il contributo su questo arco va a zero se il raggio del semicerchio va a infinito. La funzione

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{-i\omega z}}{a^2+z^2}$$

ha poli semplici in $\pm ia$, con residui

$$\mathrm{Res}_g(ia) = \lim_{z\to ia} g(z)(z-ia) = \lim_{z\to ia}\frac{\mathrm{e}^{-i\omega z}}{z+ia} = \frac{\mathrm{e}^{az}}{i2a}\,,$$

$$\mathrm{Res}_g(-ia) = \lim_{z\to -ia} g(z)(z+ia) = \lim_{z\to -ia}\frac{\mathrm{e}^{-i\omega z}}{z-ia} = \frac{\mathrm{e}^{-az}}{-i2a}\,,$$

Il residuo del polo interno al semicerchio va quindi moltiplicato per $2\pi i$ se $\omega < 0$ (percorso in senso orario), per $-2\pi i$ se $\omega > 0$ (percorso in senso antiorario).

Facciamo alcune considerazioni: la funzione x è di classe C^∞ e ha trasformata di Fourier che va a zero più di qualsiasi potenza. Inoltre i due esercizi *sembrano portare ad una sorta di simmetria.*

In seguito noteremo che

- maggiore è la regolarità della funzione x, maggiore sarà l'ordine di infinitesimo di $\mathscr{F}[x]$ a infinito.
- maggiore sarà l'ordine di infinitesimo di x a infinito, maggiore sarà la regolarità della funzione $\mathscr{F}[x]$.
- c'è usa sorta di dualità/simmetria nel calcolo delle trasformata: $\mathscr{F}[\mathscr{F}[x]]$ *somiglia a* x.

Esercizio 45. *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione*

$$x(t) = \mathrm{sign}(t)\mathrm{e}^{-a|t|} = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-a|t|} & t<0 \\ 0 & t=0 \\ \mathrm{e}^{-a|t|} & t>0 \end{cases}$$

ottenendo

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \frac{-2i\omega}{a^2+\omega^2}$$

5.2 Teoremi

Teorema 46. *La funzione* $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ *che ad ogni funzione associa la sua trasformata di Fourier è lineare e continua.*

Dimostrazione. Per dimostrare la linearità notiamo che, date $x_1, x_2 \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\lambda x_1 + \mu x_2](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\lambda x_1 + \mu x_2\big)(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\big)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \lambda\mathscr{F}[x_1](\omega) + \mu\mathscr{F}[x_2](\omega)\,.
\end{aligned}$$

A questo punto proviamo la continuità. Consideriamo quindi una successione $(x_n)_n \subset L^1(\mathbb{R})$ tale che $\lim_n x_n = \bar{x}$, ovvero $\lim_n \|x_n - \bar{x}\|_1 = 0$. La formula (16) ci dà quindi

$$\Big\|\mathscr{F}[x_n] - \mathscr{F}[\bar{x}]\Big\|_\infty = \Big\|\mathscr{F}[x_n - \bar{x}]\Big\|_\infty \le \|x_n - \bar{x}\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

ovvero che la successione $(\mathscr{F}[x_n])_n$ tende all'elemento $\mathscr{F}[\bar{x}]$ nello spazio $L^\infty(\mathbb{R})$, concludendo la dimostrazione. $\square$

Proposizione 47. *Data una funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier è continua.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita come $h(t, \omega) = x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}$.

La restrizione $h(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, mentre la restrizione $h(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Infine essendo $|h(t, \omega)| \le |x(t)|$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $\omega \in \mathbb{R}$, con $x \in L^1(\mathbb{R})$, possiamo applicare il Teorema 9 per ottenere che la funzione

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \omega)\, dt$$

è continua rispetto ad ω. $\square$

Proposizione 48. *Data una funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ allora la sua trasformata di Fourier è infinitesima, ovvero vale*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \mathscr{F}[x](\omega) = 0\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto che la tesi vale se consideriamo la funzione caratteristica di un intervallo $\chi_{[a,b]}$. Inoltre grazie alla linearità della $\mathscr{F}$ abbiamo la tesi anche per una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, ovvero per ogni funzione a scala

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{[a_k, b_k]}\,.$$

Consideriamo quindi $x \in L^1(\mathbb{R})$. Per definizione, esiste una successione di funzioni a scala $(\varphi_n)_n$ tale che

$$\lim_n \varphi_n(t) = x(t) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi_n\|_1 = 0\,.$$

Inoltre essendo $L^1(\mathbb{R})$ uno spazio completo, vale

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - x\|_1 = 0\,.$$

A questo punto, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo individuare $\bar{n}$ tale che vale

$$\|\varphi_{\bar{n}} - x\|_1 \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Fissato tale $\bar{n}$, esisterà $\bar{\omega} > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $\omega > 0$ tale che $|\omega| > \omega_0$ vale

$$\Big|\mathscr{F}[\varphi_{\bar{n}}](\omega)\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Possiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned}
|\mathscr{F}[x](\omega)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \Big(x(t) - \varphi_{\bar{n}}(t)\Big)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\bar{n}}(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big|x(t) - \varphi_{\bar{n}}(t)\Big|\,dt + |\mathscr{F}[\varphi_{\bar{n}}](\omega)| \\
&\leq \|x - \varphi_{\bar{n}}\|_1 + |\mathscr{F}[\varphi_{\bar{n}}](\omega)| \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Il calcolo precedente porta quindi alla tesi. □

Osservazione 49. *Data una funzione $x \in L^1([a,b])$, definiremo la trasformata di Fourier di x come la trasformata di Fourier della sua estensione a zero*

$$\tilde{x} = \begin{cases} x(t) & x \in [a,b]\,, \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

osservando che $\tilde{x} \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre vale

$$0 = \lim_{|\omega|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt = \lim_{|\omega|\to\infty} \int_{a}^{b} x(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt\,.$$

5.3 Proprietà della trasformata di Fourier - parte 1

5.3.1 Traslazione in tempo

Data la funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, $x \in L^1(\mathbb{R})$, definiamo la funzione $\tilde{x}(t) = x(t-\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$. Abbiamo che vale

$$\mathscr{F}[\tilde{x}](\omega) = \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\mathscr{F}[x](\omega)\,.$$

Infatti, con semplici calcoli troviamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\tilde{x}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\mathrm{e}^{-i\omega(s+\tau)}\,dt \\
&= \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\mathrm{e}^{-i\omega s}\,dt \\
&= \mathrm{e}^{-i\omega\tau}\mathscr{F}[x](\omega)\,.
\end{aligned}$$

5.3.2 Traslazione in frequenza

Similmente a quanto visto nel precedente caso, data la funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo

$$\mathscr{F}[x](\omega - \omega_0) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{i\omega_0 t}x](\omega)\,.$$

Infatti, vale

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[x](\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)\mathrm{e}^{i\omega_0 t}]\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt\,.
\end{aligned}$$

5.3.3 Riscalamento

Data la solita funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, $x \in L^1(\mathbb{R})$, definiamo ora la funzione $\check{x}(t) = x(\alpha t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Abbiamo che vale

$$\mathscr{F}[\check{x}](\omega) = \mathscr{F}[x(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathscr{F}[x]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) .$$

Anche qui la tesi si ottiene mediante un semplice calcolo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\check{x}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \check{x}(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\mathrm{e}^{-i\omega \frac{s}{\alpha}}\, dt \\
&= \frac{1}{|\alpha|}\mathscr{F}[x]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

5.3.4 Derivata nel tempo

Supponiamo di avere una funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ che sia assolutamente continua, ovvero tale che

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \xi(s)\, ds .$$

per una opportuna funzione $\xi \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, ricordando che la funzione x è derivabile quasi ovunque con derivata $x' = \xi \in L^1(\mathbb{R})$, ha senso calcolarne la trasformata di Fourier. Si ottiene

$$\mathscr{F}[x'](\omega) = i\omega\mathscr{F}[x](\omega) .$$

Poiché x è assolutamente continua, vale la formula di integrazione per parti (vedi Osservazione 40), cosicché possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[x'](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \left[x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= i\omega\mathscr{F}[x](\omega)
\end{aligned}$$

Il termine di bordo va a zero in quanto x è infinitesima a infinito, essendo $x \in L^1(\mathbb{R})$. Consideriamo ora una funzione x derivabile $k-1$ volte, con $x, x', \dots, x^{(k-1)} \in L^1(\mathbb{R})$ e tale che $x^{(k-1)}$ sia assolutamente continua (si pensi a una funzione di classe C^k con tutte le derivate $x, x', \dots, x^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ per esempio). Possiamo iterare il ragionamento precedente e calcolare le trasformate di Fourier di tutte le derivate e ottenere

$$\mathscr{F}[x^{(m)}](\omega) = (i\omega)^m\mathscr{F}[x](\omega) ,$$

per ogni $m \in \{1, \dots, k\}$.

5.3.5 Derivata in frequenza

Supponiamo di avere una funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ tale che la funzione $y(t) = t\, x(t)$ appartenga anch'essa a $L^1(\mathbb{R})$ allora, ne possiamo calcolare la trasformata di Fourier e osservare che la funzione $\mathscr{F}[x]$ è di classe C^1 e vale

$$\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}[x](\omega) = -i\mathscr{F}[tx(t)](\omega) = -i\mathscr{F}[y](\omega)$$

Consideriamo la funzione $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita come $h(t, \omega) = x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}$.

La restrizione $h(\cdot,\omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, mentre la restrizione $h(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è di classe C^1 per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Infine essendo

$$|h(t,\omega)| \leq |x(t)| \,, \qquad |\tfrac{\partial}{\partial\omega} h(t,\omega)| = |-itx(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}| \leq |t\,x(t)|$$

per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dove le maggiorazioni sono tramite funzioni appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$, possiamo applicare il Teorema 10 per ottenere che la funzione

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\omega)\,dt$$

è di classe C^1 e vale

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\mathscr{F}[x](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\omega} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} t\,x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt = -i\mathscr{F}[y](\omega)\,.$$

Come in precedenza, possiamo iterare il procedimento di derivazione sotto opportune ipotesi.

Supponiamo che la funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ sia tale che la funzione $y_m(t) = t^m\,x(t)$ appartenga anch'essa a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $m \in \{1,\dots,k\}$. Allora possiamo calcolare le trasformate di Fourier di queste funzioni e osservare che $\mathscr{F}[x]$ è di classe C^k e vale la seguente formula

$$\frac{d^m}{d\omega^m}\mathscr{F}[x](\omega) = (-i)^m\mathscr{F}[t^m x(t)](\omega)$$

per ogni $m \in \{1,\dots,k\}$.

5.3.6 Trasformata di Fourier della Gaussiana

Consideriamo la funzione Gaussiana $x(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$ con $a > 0$. Abbiamo

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\,.$$

Il calcolo esplicito della trasformata di Fourier viene svolto nell'altro modulo del corso. In alternativa si può trovare in un qualsiasi libro di analisi complessa. Vediamo qui di seguito un approccio diverso da quello standard.

Notando che la funzione $X(t) = tx(t) = t\mathrm{e}^{-at^2}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ possiamo ricordare che

$$\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}[x](\omega) = -i\mathscr{F}[X](\omega)\,.$$

Inoltre, essendo $x'(t) = -2at\mathrm{e}^{-t^2} = -2aX(t)$ abbiamo

$$i\omega\mathscr{F}[x](\omega) = \mathscr{F}[x'](\omega) = -2a\mathscr{F}[X(\omega)]\,.$$

Unendo le due stime precedenti troviamo

$$\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}[x](\omega) = -i\left(-\frac{1}{2a}i\omega\mathscr{F}[x](\omega)\right) = -\frac{\omega}{2a}\mathscr{F}[x](\omega)\,,$$

ovvero troviamo che $\mathscr{F}[x](\omega)$ è soluzione dell'equazione differenziale, nella variabile ω,

$$z' = -\frac{\omega}{2a}z\,.$$

Ricordando che

$$\mathscr{F}[x](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

concludiamo che la trasformata di Fourier della gaussiana è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = -\frac{\omega}{2}z\,, \\ z(0) = \sqrt{\pi/a}\,. \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine a variabili separabili la cui risoluzione è lasciata per esercizio. Con semplici calcoli possiamo ottenere la soluzione

$$z(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}\,.$$

5.3.7 La trasformata di Fourier della *tenda*

Vista l'estetica del suo grafico, viene detta *tenda* la seguente funzione

$$\Lambda_a(t) = \begin{cases} 0 & |t| > a \\ a - |t| & |t| \le a \end{cases} = (a - |t|)^+ .$$

Con semplici calcoli è possibile calcolarne la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[\Lambda_a](\omega) &= \int_{\infty}^{\infty} \Lambda_a(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-a}^{a} (a - |t|)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-a}^{0} (a + t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{a} (a - t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\ &= \dots = \frac{1}{\omega^2}(2 - \mathrm{e}^{i\omega a} - \mathrm{e}^{-i\omega a}) , \end{aligned}$$

dove sono stati omessi alcuni calcoli lasciati per esercizio: la parte omessa si risolve integrando per parti.

Vediamo ora una possibile risoluzione alternativa. La funzione Λ_a è assolutamente continua, infatti possiamo scrivere

$$\Lambda_a(t) = a + \int_0^t \big(\chi_{[-a,0]} - \chi_{[0,a]}\big)(s)\, ds ,$$

ovvero, nel senso di $L^1(\mathbb{R})$, possiamo scrivere

$$\Lambda_a' = \chi_{[-a,0]} - \chi_{[0,a]}$$

e la sua trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[\Lambda_a'](\omega) &= \mathscr{F}[\chi_{[-a,0]}](\omega) - \mathscr{F}[\chi_{[0,a]}](\omega) \\ &= \begin{cases} a & \omega = 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(\mathrm{e}^{-i\omega\,(-a)} - \mathrm{e}^{-i\omega 0}\right) & \omega \neq 0 \end{cases} \\ &\qquad - \begin{cases} a & \omega = 0 \\ \frac{1}{i\omega}\left(\mathrm{e}^{-i\omega\, 0} - \mathrm{e}^{-i\omega\, a}\right) & \omega \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ \frac{2}{i\omega}\big(\cos(\omega a) - 1\big) & \omega \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A questo punto possiamo usare la formula per la trasformata di Fourier per la derivata e ottenere, per ogni $\omega \neq 0$,

$$\mathscr{F}[\Lambda_a](\omega) = \frac{1}{i\omega}\mathscr{F}[\Lambda_a'](\omega) = \frac{2}{\omega^2}\big(1 - \cos(\omega a)\big) = \frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega a}{2}\right) .$$

Introducendo la notazione del seno cardinale introdotta in (17), otteniamo, ricordando che la trasformata di Fourier è una funzione continua,

$$\mathscr{F}[\Lambda_a](\omega) = a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega a}{2\pi}\right) , \qquad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

5.3.8 Coniugio

Data $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \in L^1(\mathbb{R})$, osserviamo che

$$\mathscr{F}[x^*](\omega) = \left(\mathscr{F}[x](-\omega)\right)^* ,$$

infatti

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[x^*](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\right)^*\,dt \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt\right)^*
\end{aligned}$$

5.3.9 Parità e disparità

Consideriamo $x \in L^1(\mathbb{R})$.

Se la funzione x è pari e a valori reali allora la sua trasformata di Fourier $\mathscr{F}[x]$ è a valori in $\mathbb{R}$ ed è pari.

Se la funzione x è dispari e a valori reali allora la sua trasformata di Fourier $\mathscr{F}[x]$ è a valori in $i\mathbb{R}$ (immaginari puri) ed è dispari.

Notiamo innanzitutto che, se x è pari allora

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[x](-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \qquad \text{(parità)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt = \mathscr{F}[x](\omega)
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo mostrato che anche $\mathscr{F}[x]$ è pari. In modo analogo si può dimostrare che se x è dispari allora lo è anche la sua trasformata di Fourier.

Poiché per ipotesi $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (è a valori reali), usando la proprietà di coniugio otteniamo che, se x è pari,

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \mathscr{F}[x](-\omega) = \mathscr{F}[x^*](-\omega) = \left(\mathscr{F}[x](\omega)\right)^*.$$

Da cui concludiamo che la funzione $\mathscr{F}[x]$ è a valori in $\mathbb{R}$. In modo analogo se x è dispari troviamo

$$\mathscr{F}[x](\omega) = -\mathscr{F}[x](-\omega) = -\mathscr{F}[x^*](-\omega) = -\left(\mathscr{F}[x](\omega)\right)^*.$$

concludendo che $\mathscr{F}[x]$ ha valori negli immaginari puri.

Consideriamo ora una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e la sua trasformata di Fourier $\mathscr{F}[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Possiamo scrivere la trasformata di Fourier come somma di parte reale e immaginaria come $\mathscr{F}[x](\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$, dove $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Scriviamo la funzione x come somma di una funzione pari e di una dispari $x = x_p + x_d$, entrambe a valori reali. Ricordiamo che tale decomposizione si può ottenere ponendo

$$x_p = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x_d = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Dalla linearità della trasformata di Fourier abbiamo che

$$A(\omega) + iB(\omega) = \mathscr{F}[x](\omega) = \mathscr{F}[x_p](\omega) + \mathscr{F}[x_d](\omega).$$

Ricordando i risultati precedenti concludiamo che

$$\mathscr{F}[x_p] = A, \qquad \mathscr{F}[x_d] = iB.$$

6 Prodotto di convoluzione

Consideriamo due funzioni $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, tali che la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita come

$$h(t, s) = x(t - s)y(s)$$

soddisfi $h(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Definiamo *prodotto di convoluzione di x e y* la funzione $x * y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ definita per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ come

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)\, ds\,.$$

Mediante il cambio di variabile $\sigma = t - s$ possiamo verificare immediatamente la commutatività di questo prodotto

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)y(t-\sigma)\, d\sigma = (y * x)(t)$$

Proposizione 50. *Se $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ allora la funzione $h(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre $x * y \in L^1(\mathbb{R})$ e vale*

$$\|x * y\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$$

Dimostrazione. Possiamo facilmente notare che

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,s)|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)| \cdot |y(s)|\, dt \\ &= |y(s)| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)|\, dt = |y(s)| \int_{-\infty}^{\infty} |x(\sigma)|\, d\sigma\,,\end{aligned}$$

cosicché

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,s)|\, dt \right) ds = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y(s)|\, ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(\sigma)|\, d\sigma \right) < +\infty\,.$$

Abbiamo quindi mostrato che $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e come conseguenza del teorema di Fubini-Tonelli abbiamo che le restrizioni $h(t,\cdot)$ appartengono allo spazio $L^1(\mathbb{R})$ per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |(x * y)(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s)\, ds \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)| \cdot |y(s)|\, ds \right) dt \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y(s)|\, ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(\sigma)|\, d\sigma \right)\end{aligned}$$

da cui la formula richiesta e la fine della dimostrazione. □

Osservazione 51. *Vale anche il seguente risultato, che non dimostreremo. Siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ tali che*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\,,$$

con la convenzione che, in questa formula, intendiamo $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Se $x \in L^p(\mathbb{R})$ e $y \in L^q(\mathbb{R})$, allora $x * y \in L^r(\mathbb{R})$ con

$$\|x * y\|_r \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q\,.$$

Nel caso $p = q = 2$ troviamo $r = \infty$ ottenendo

$$x, y \in L^2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad x * y \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})\,.$$

Esempio 52. *Consideriamo ora una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ di periodo T, $x \in L^1([0,T])$. Ricordando la formula (10), possiamo considerare il troncamento del nucleo di Dirichlet*

$$\widetilde{D}_n(s) = \chi_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(s) D_n(s)$$

e osservare che possiamo calcolare il polinomio di Fourier di grado n associato a x nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n[x](t) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-s)D_n(s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)\widetilde{D}_n(s)\,ds = (x * \widetilde{D}_n)(t)\,.\end{aligned}$$

Esempio 53. *Consideriamo la funzione $\chi_{[-a,a]}$ e calcoliamo*

$$\begin{aligned}\big(\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-a,a]}\big)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(t-s)\chi_{[-a,a]}(s)\,ds \\ &= \int_{-a}^{a} \chi_{[-a,a]}(t-s)\,ds \\ &= \int_{[-a,a]\cap[t-a,t+a]} 1\,ds = \Lambda_{2a}(t)\end{aligned}$$

dove avevamo incontrato la funzione tenda *nella sezione 5.3.7.*

Diremo *nucleo di convoluzione* una funzione $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\,dt = 1\,.$$

Corrispondentemente possiamo definire la famiglia di nuclei di convoluzione

$$\eta_k(t) = k\eta(kt)\,, \quad k \in \mathbb{N}^+\,.$$

Esempio 54. *Diamo alcuni esempi di nuclei di convoluzione.*

$$\begin{aligned}G(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \quad \textit{Nucleo di Gauss} \\ P(t) &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} \quad \textit{Nucleo di Poisson}\end{aligned}$$

$$M(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

dove $c = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt$.

Notiamo che tutte queste funzioni appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre M è a supporto compatto.

Teorema 55. *Data una funzione $x \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ e un nucleo di convoluzione η, allora vale*

$$\lim_{k\to\infty} (x * \eta_k)(t) = x(t)\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}(x * \eta_k)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t-s)x(s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k\eta(k(t-s))x(s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\sigma)x(t-\tfrac{\sigma}{k})\,d\sigma\end{aligned}$$

Notiamo che per quasi ogni $z \in \mathbb{R}$ vale puntualmente

$$\lim_{k\to\infty} \eta(\sigma)x(t-\tfrac{\sigma}{k}) = \eta(\sigma)x(t)\,, \qquad |\eta(\sigma)x(t-\tfrac{\sigma}{k})| \leq |\eta(\sigma)|\|x\|_\infty\,.$$

Poiché $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ possiamo applicare il lemma di Lebesgue e ottenere

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\sigma)x(t - \tfrac{\sigma}{k})\, d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\sigma)\, x(t)\, d\sigma = x(t)\,.$$

□

Si può dimostrare, ma non è argomento di questo corso, che data $x \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \in \{1, 2\}$, scegliendo il nucleo di convoluzione M introdotto nell'esempio precedente, la funzione $M_k * x$ appartiene allo spazio $C^\infty(\mathbb{R})$, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, e che

$$\lim_{k\to\infty} \|M_k * x - x\|_p = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} (M_k * x)(t) = x(t)\,.$$

Quindi ogni funzione $x \in L^p(\mathbb{R})$, si può approssimare mediante una successione di funzioni appartenenti a $C^\infty(\mathbb{R})$. Più in generale abbiamo il seguente teorema.

Teorema 56. *Lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto è denso in $L^p(\mathbb{R})$, per ogni $p \geq 1$, ovvero per ogni $x \in L^p(\mathbb{R})$ esiste una successione $(\varphi_k)_k \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\lim_k \|x - \varphi_k\|_p = 0$.*

Osservazione 57. *Dato un nucleo di convoluzione η, possiamo osservare che vale*

$$(x * \eta)(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\eta(t - s)\, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t - s)\, dt}$$

La convoluzione, in un punto $t \in \mathbb{R}$ può essere interpretata come una media pesata sulla funzione peso $\eta(t - \cdot)$. Se per esempio consideriamo η del tipo M_k precedentemente introdotto possiamo notare che la media si concentra in un intorno dell'istante t. La convoluzione ha lo scopo quindi di regolarizzare un segnale*.*

6.1 Antitrasformata di Fourier

Obiettivo di questa parte è definire una formula di inversione della trasformata.

Definizione 58. *Sia $\xi \in L^1(\mathbb{R})$. L'antitrasformata di Fourier di ξ è la funzione*

$$\mathscr{F}^{-1}[\xi](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

La differenza con la definizione di trasformata di Fourier sta nel coefficiente $\frac{1}{2\pi}$ e nel segno dell'esponente nell'integrale ed è molto simile alla (15). Nonostante la notazione $\mathscr{F}^{-1}$ (che può quindi indurre in errore) non valgono sempre le identità

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x]](t) = x(t)\,, \quad \text{e} \quad \mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[\xi]](\omega) = \xi(\omega)\,. \tag{18}$$

Notiamo inoltre che dalla definizione

$$\mathscr{F}^{-1}[\xi](t) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\xi](-t)\,.$$

Vorremmo quindi poter trovare delle condizioni affinché le identità (18) valgano. Innanzitutto dovremmo ottenere

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x]](t) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\mathscr{F}[x]](-t) = x(t)\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ne consegue che la funzione x deve appartenere a $L^1(\mathbb{R})$ al fine di poter definire la $\mathscr{F}[x]$, ma deve anche appartenere a $C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ed essere infinitesima affinché possa essere la trasformata di Fourier di un'altra funzione. L'enunciato più semplice da porre è il seguente.

Proposizione 59. *Se $x \in L^1(\mathbb{R})$ e $\mathscr{F}[x] \in L^1(\mathbb{R})$ allora valgono le identità* (18)*.*

Si noti che esistono funzioni $x \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $\mathscr{F}[x] \notin L^1(\mathbb{R})$.

Per effettuare una dimostrazione verrebbe voglia di scrivere

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x]](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\mathrm{e}^{-i\omega s}\,ds\right)\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right)x(s)\,ds\end{aligned}$$

invertendo l'ordine di integrazione applicando il teorema di Tonelli, ma ciò non è possibile in quanto non esiste l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\,.$$

La soluzione si ottiene moltiplicando la funzione x per un *troncamento* $\phi_k(\omega)$ che decresca rapidamente all'infinito in modo da garantire l'integrabilità della funzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega(s-t)}\phi_k(\omega)\,d\omega\,,$$

per poi rimuovere questo termine passando al limite.

Dimostrazione semplificata. Supporremo $x \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ per evitare troppi tecnicismi. Il nostro obiettivo è dimostrare che la seguente identità vale per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[x](\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Consideriamo la famiglia di funzioni gaussiane

$$\phi_k(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2k^2}}\,,\quad k \in \mathbb{N}^+$$

e la funzione

$$X_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[x](\omega)\,\phi_k(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Dobbiamo provare che valgono entrambi i seguenti limiti

$$\lim_k X_k(t) = x(t)\,,\quad \lim_k X_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[x](\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

La tesi seguirà dal teorema di unicità del limite.

Primo limite. Possiamo scrivere per esteso la definizione di X_k come

$$X_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\mathrm{e}^{-i\omega s}\,ds\right)\phi_k(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega$$

ed osservare che, per ogni $t \in \mathbb{R}$ la funzione da integrare due volte

$$g_t(\omega, s) = x(s)\mathrm{e}^{-i\omega s}\phi_k(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}$$

è integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ in quanto abbiamo la stima

$$|g_t(\omega, s)| = |x(s)|\phi_k(\omega)\,,\quad \text{per ogni } (\omega, s) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Il teorema di Fubini permette di scambiare l'ordine di integrazione e ottenere

$$X_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right)x(s)ds\,.$$

Ricordando la formula della trasformata di Fourier della gaussiana

$$\mathscr{F}[e^{-a\omega^2}](t) = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4a}}\,,$$

calcoliamo il primo integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega(s-t)}\, d\omega = \mathscr{F}[\phi_k](s-t) = k\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{k^2(s-t)^2}{2}} .$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} X_k(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{k^2(s-t)^2}{2}} x(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t-s) x(s)\, ds = (\eta_k * x)(t)\,, \end{aligned}$$

dove

$$\eta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k \mathrm{e}^{-\frac{k^2 t^2}{2}} = k\eta(kt)\,,$$

ricordando il nucleo di convoluzione già visto in precedenza

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} .$$

Dal Teorema 55 segue che

$$\lim_k (\eta_k * x)(t) = x(t)$$

ottenendo la validità del primo limite.

Secondo limite. Notiamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quasi ogni $\omega \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_k \mathscr{F}[x](\omega)\phi_k(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} = \lim_k \mathscr{F}[x](\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2k^2}} \mathrm{e}^{i\omega t} = \mathscr{F}[x](\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} .$$

Inoltre

$$|\mathscr{F}[x](\omega)\phi_k(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}| \leq |\mathscr{F}[x](\omega)|\phi_k(\omega) \leq |\mathscr{F}[x](\omega)|$$

dove $\mathscr{F}[x] \in L^1(\mathbb{R})$ per ipotesi. Possiamo quindi applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue e passare al limite sotto segno di integrale e ottenere

$$\begin{aligned} \lim_k X_k(t) &= \lim_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[x](\omega)\, \phi_k(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_k \mathscr{F}[x](\omega)\, \phi_k(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[x](\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega\,, \end{aligned}$$

concludendo anche questa parte della dimostrazione. □

Immediata conseguenza del precedente teorema è la seguente formula, detta formula di dualità o di simmetria:

$$\mathscr{F}[\mathscr{F}[x]](t) = x(-t)\,. \tag{19}$$

Inoltre abbiamo il teorema di unicità della trasformata.

Corollario 60. *Siano $x_1, x_2 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $\mathscr{F}[x_1], \mathscr{F}[x_2] \in L^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\mathscr{F}[x_1] = \mathscr{F}[x_2] \text{ in } \mathbb{R} \iff x_1 = x_2 \text{ q.o. in } \mathbb{R}\,.$$

6.2 Proprietà della trasformata di Fourier - parte 2

6.2.1 Trasformata della convoluzione

Consideriamo ora due funzioni $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ appartenenti allo spazio $L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\mathscr{F}[x_1 * x_2](\omega) = \mathscr{F}[x_1](\omega) \cdot \mathscr{F}[x_1](\omega)$$

Infatti possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[x_1 * x_2](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 * x_2)(t) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-s) x_2(s)\, ds \right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-s) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt \right) x_2(s)\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\sigma) \mathrm{e}^{-i\omega(\sigma+s)}\, d\sigma \right) x_2(s)\, ds \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\sigma) \mathrm{e}^{-i\omega\sigma}\, d\sigma \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(s) \mathrm{e}^{-i\omega s}\, ds \right) \\
&= \mathscr{F}[x_1](\omega) \cdot \mathscr{F}[x_2](\omega)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 61. *Abbiamo visto nell'Esempio 53 che la funzione tenda Λ_a precedentemente introdotta nella sezione 5.3.7 può essere scritta come prodotto di convoluzione nel modo seguente*

$$\Lambda_a(t) = \chi_{[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]} * \chi_{[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]}\,.$$

Calcolare $\mathscr{F}[\Lambda_a]$ usando la formula precedente.

Analogamente possiamo mostrare che

$$\mathscr{F}^{-1}[x_1 * x_2](\omega) = 2\pi \mathscr{F}^{-1}[x_1](\omega) \cdot \mathscr{F}^{-1}[x_1](\omega)\,. \tag{20}$$

6.2.2 Trasformata del prodotto

Consideriamo $x_1, x_2 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che le seguenti quattro funzioni

$$x_1 \cdot x_2\,, \quad \mathscr{F}[x_1]\,, \quad \mathscr{F}[x_2]\,, \quad \mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]$$

appartengano tutte a $L^1(\mathbb{R})$. Allora valgono le formule di inversione (18) e possiamo calcolare, usando la (20),

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[x_1 \cdot x_2] &= \mathscr{F}\Big[\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x_1]] \cdot \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x_2]] \Big] \\
&= \mathscr{F}\Big[\tfrac{1}{2\pi} \mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]] \Big] \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \mathscr{F}\Big[\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]] \Big] \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\mathscr{F}[x_1 \cdot x_2] = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]\,.$$

In alternativa, supponendo che le funzioni

$$x_1 \cdot x_2\,, \quad \mathscr{F}[x_1]\,, \quad \mathscr{F}[x_2]\,, \quad \mathscr{F}[x_1 \cdot x_2]$$

appartengano tutte a $L^1(\mathbb{R})$, dove abbiamo cambiato l'ultima funzione, possiamo ottenere lo stesso risultato

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\big[\mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]\big](t) &= \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\big[\mathscr{F}[x_1] * \mathscr{F}[x_2]\big](-t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\mathscr{F}[\mathscr{F}[x_1]](-t) \cdot \mathscr{F}[\mathscr{F}[x_2]](-t)\Big) \\
&= 2\pi \cdot x_1(t) \cdot x_2(t)
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi applicando $\mathscr{F}$.

6.2.3 Legame tra trasformata di Fourier e trasformata di Laplace

Consideriamo una funzione $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, ovvero una funzione tale che $x \in L^1([0, K])$ per ogni $K > 0$. Supponiamo inoltre che esista un certo valore $s_0 \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $t \mapsto x(t)\,\mathrm{e}^{-st}$ appartenga a $L^1(\mathbb{R}^+)$ per ogni $s > s_0$ (l'ascissa di convergenza). Definiamo la funzione $y_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_s \in L^1(\mathbb{R})$, come segue

$$y_s(t) = x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\chi_{[0,+\infty)}(t)\,.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[y_s](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_s(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-(s+i\omega)t}\,dt \\
&= \mathscr{L}[x](s + i\omega)\,.
\end{aligned}$$

7 Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Abbiamo visto che per poter calcolare una trasformata di Fourier è necessario prendere una funzione in $L^1(\mathbb{R})$. Ricordiamo che l'energia di un segnale periodico di periodo T è data dalla sua norma come elemento di $L^2([0, T])$. In presenza di segnali non periodici possiamo considerare l'energia

$$\|x\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\,.$$

Abbiamo quindi che, in presenza di un segnale $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ possiamo calcolarne la trasformata di Fourier. Se invece $x \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, possiamo considerare la successione di funzioni

$$x_k = x\chi_{[-k,k]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

ricordando che, per intervalli limitati E vale $L^2(E) \subseteq L^1(E)$. Calcolando la trasformata di Fourier $\mathscr{F}[x_k]$ di queste funzioni possiamo definire il seguente limite nello spazio $L^2(\mathbb{R})$

$$\mathscr{F}[x] := \lim_k \mathscr{F}[x_k]\,.$$

Questa possibilità è riassunta nel seguente teorema.

Teorema 62. *L'operatore trasformata di Fourier $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ si può estendere in modo unico ad un operatore lineare continuo biiettivo $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tale che per ogni $x, y \in L^2(\mathbb{R})$ vale*

$$\langle \mathscr{F}[x]\,,\, \mathscr{F}[y]\rangle_2 = 2\pi\,\langle x\,,\, y\rangle_2\,, \qquad \|\mathscr{F}[x]\|_2^2 = 2\pi\|x\|_2^2\,.$$

La trasformata di Fourier è così definita per ogni $x \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{F}[x](\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt$$

mentre l'antitrasformata è definita per ogni $\xi \in L^2(\mathbb{R})$, come

$$\mathscr{F}^{-1}[\xi](t) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^{k} \xi(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t}\, d\omega$$

dove i limiti si intendono nel senso dello spazio $L^2(\mathbb{R})$.

7.1 Il teorema di Shannon

Definizione 63. *Dato $\varpi > 0$, diremo che una funzione $x \in L^1(\mathbb{R})$ ha* banda limitata da ϖ *se la sua trasformata di Fourier è nulla al di fuori dell'insieme $[-\varpi, \varpi]$, ovvero $\mathscr{F}[x]$ è a supporto compatto.*

Teorema 64. *Sia $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ a banda limitata da $\varpi > 0$, allora, definita la frequenza $\nu = \frac{\varpi}{2\pi}$, si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$:*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\tfrac{n}{2\nu}\right) \operatorname{sinc}(2\nu t - n)\,.$$

Dimostrazione. Poniamo per semplicità di notazione $\xi = \mathscr{F}[x]$. Sappiamo che ξ è continua e limitata, ed essendo nulla al di fuori di un compatto possiamo concludere che $\xi \in L^2([-\varpi, \varpi])$ e quindi $\xi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Quindi possiamo calcolare l'antitrasformata di ξ per riottenere la funzione x e scrivere

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varpi}^{\varpi} \xi(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega\,.$$

Se consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di ξ:

$$\xi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{2\varpi}\omega}$$

dove

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\varpi} \int_{-\varpi}^{\varpi} \xi(\omega) \mathrm{e}^{-in\frac{\pi}{\varpi}\omega}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\varpi} \int_{-\varpi}^{\varpi} \xi(\omega) \mathrm{e}^{i\left(-n\frac{\pi}{\varpi}\right)\omega}\, d\omega = \frac{2\pi}{2\omega} x\left(-n\tfrac{\pi}{\varpi}\right)\,. \end{aligned}$$

Ricordiamo che la serie di Fourier converge in energia, ovvero converge in $L^2([-\varpi, \varpi])$, ma anche in $L^1([-\varpi, \varpi])$. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varpi}^{\varpi} \xi(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varpi}^{\varpi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{in\frac{2\pi}{2\varpi}\omega} \right) \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varpi}^{\varpi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{2\omega} x\left(-n\tfrac{\pi}{\varpi}\right) \mathrm{e}^{in\frac{\pi}{\varpi}\omega} \right) \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\varpi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x\left(-n\tfrac{\pi}{\varpi}\right) \int_{-\varpi}^{\varpi} \mathrm{e}^{i\left(n\frac{\pi}{\varpi} + t\right)\omega}\, d\omega \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\mathscr{F}[\chi_{[-\varpi,\varpi]}](\omega) = 2\varpi \operatorname{sinc}\left(\tfrac{\varpi}{\pi}\omega\right)$$

e che sinc è una funzione pari, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\varpi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(-n\tfrac{\pi}{\varpi}\right) \mathscr{F}[\chi_{[-\varpi,\varpi]}]\left(-n\tfrac{\pi}{\varpi} - t\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(-n\tfrac{\pi}{\varpi}\right) \operatorname{sinc}\left(\tfrac{\varpi}{\pi}t + n\right) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} x\left(m\tfrac{\pi}{\varpi}\right) \operatorname{sinc}\left(\tfrac{\varpi}{\pi}t - m\right) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} x\left(\tfrac{m}{2\nu}\right) \operatorname{sinc}\left(2\nu t - m\right) . \end{aligned}$$

□

Osservazione 65. *Data una funzione $x \in L^2(\mathbb{R})$, allora notiamo che, definita la funzione*

$$\operatorname{sinc}_a(t) = \tfrac{a}{\pi} \operatorname{sinc}(\tfrac{a}{\pi}t) = \mathscr{F}^{-1}[\chi_{[-a,a]}](t)$$

allora la funzione $y = x * \operatorname{sinc}_\varpi$ è a banda limitata da $\varpi > 0$, essendo

$$\mathscr{F}[y] = \mathscr{F}[x * \operatorname{sinc}_\varpi] = \mathscr{F}[x] \cdot \mathscr{F}[\operatorname{sinc}_\varpi] = \mathscr{F}[x] \cdot \chi_{[-a,a]} .$$

8 Teoria delle distribuzioni

Definiamo l'insieme delle funzioni test $C_0^\infty(\mathbb{R})$ come l'insieme delle funzioni φ di classe C^∞, aventi supporto compatto. Ovvero, diremo che la funzione φ è una funzione test se esiste un intervallo limitato, al di fuori del quale la funzione φ è identicamente nulla. Tali funzioni possono essere prese a valori complessi. Un esempio di funzione test è la funzione M nell'esempio 54.

Nello spazio vettoriale $C_0^\infty(\mathbb{R})$ si introduce una nozione di convergenza. Diremo che una successione $(\varphi_n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ è convergente a zero in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ se

- esiste un compatto $[-K, K]$ tale che ogni elemento della successione ha supporto contenuto in questo intervallo, ovvero ogni funzione della successione è identicamente nulla al di fuori di questo insieme.
- per ogni naturale k la successione delle derivate $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge uniformemente a zero nell'intervallo $[-K, K]$.

Più in generale, diremo che una successione $(\varphi_n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ è convergente a φ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ se la successione $(\varphi_n - \varphi)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ è convergente a zero in $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Lo spazio delle funzioni test, dotato di questa nozione di convergenza è denotato come $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Lo spazio duale di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, denotato con $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è detto spazio delle distribuzioni.

Definizione 66. *Una distribuzione è un funzionale $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ lineare e continuo, ovvero tale che*

- *per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vale*

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

- *se la successione $(\varphi_n)_n$ è convergente a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora la successione $(T(\varphi_n))_n$ è convergente a $T(\varphi)$ in $\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$.*

Spesso, al posto della notazione $T(\varphi)$ si preferisce scrivere $\langle T\,,\, \varphi\rangle$ dove il "prodotto scalare" $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ denota la *dualità* tra $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Proposizione 67. *Ogni funzione $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ induce una distribuzione $T_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nel modo seguente:*

$$T_x(\varphi) = \langle T_x\,,\, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \varphi(t)\, dt\,.$$

Dimostrazione. Dobbiamo verificare la validitá delle richieste presenti nella Definizione 66. Mostrare per esercizio il primo punti, ovvero la linearitá del funzionale T_x. Supponiamo di avere una successione $(\varphi_n)_n$ convergente a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ne consegue che esiste un compatto $[-K, K]$ al di fuori del quale gli elementi della successione sono identicamente nulli. Inoltre la successione converge uniformemente in tale intervallo. Quindi

$$\begin{aligned}
|T_x(\varphi_n) - T_x(\varphi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \big(\varphi_n(t) - \varphi(t)\big)\, dt \right| \\
&= \left| \int_{-K}^{K} x(t) \big(\varphi_n(t) - \varphi(t)\big)\, dt \right| \\
&\leq \int_{-K}^{K} |x(t)|\, |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\, dt \\
&\leq \left(\int_{-K}^{K} |x(t)|\, dt \right) \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \\
&\leq \|x\|_1\, \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to 0\,.
\end{aligned}$$

□

Teorema 68. *Date due funzioni $x, y \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tali che i funzionali indotti coincidono, ovvero vale $\langle T_x\,,\, \varphi\rangle = \langle T_y\,,\, \varphi\rangle$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, allora $x = y$ quasi ovunque su $\mathbb{R}$.*

Questo risultato ci permette di vedere lo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ come un sottinsieme di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ne consegue che anche gli spazi $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ possono essere visti come sottinsiemi di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

A questo punto sorge spontanea una domanda. Esistono elementi di $D'(\mathbb{R})$ che non possono essere visti come funzioni di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$?

Definizione 69 (delta di Dirac)**.** *Fissato $\tau \in \mathbb{R}$ possiamo definire il funzionale $\delta_\tau \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ come*

$$\langle \delta_\tau\,,\, \varphi\rangle = \varphi(\tau)\,,$$

ovvero la valutazione in τ della funzione test. La distribuzione è detta delta di Dirac centrata in τ. Con la semplice espressione di delta di Dirac, intenderemo la delta di Dirac centrata in $\tau = 0$.

Mostriamo ora che la delta di Dirac (centrata in $\tau = 0$) non ha un rapppresentante in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Supponiamo per assurdo che esista $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \varphi(x)\, dx = \langle \delta_0\,,\, \varphi\rangle = \varphi(0)\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Scegliamo la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{1-t^2}} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}$$

e da essa definiamo la famiglia di funzioni $\varphi_n(t) = \varphi(nt)$. Notiamo che $\varphi_n(0) = 1$, $\varphi_n(t) \in [0, 1]$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e che $\varphi_n(t) = 0$ se $x \geq \frac{1}{n}$. Ne consegue che $(\varphi_n(t))_n$ converge puntualmente a zero per ogni $t \neq 0$. Quindi abbiamo la seguente convergenza

$$\lim_n \varphi_n(t)\, x(t) = 0 \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}\,.$$

Contemporaneamente tale successione è dominata in $L^1([-1, 1])$ come segue

$$|\varphi_n(t)\, x(t)| \leq x(t) \chi_{[-1,1]}(t) \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}\,.$$

Usando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue otteniamo la seguente contraddizione

$$0 = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \lim_n \varphi_n(0) = 1\,.$$

Definizione 70 (Convergenza nel senso delle distribuzioni)**.** *Diremo che una successione di distribuzioni $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ converge ad una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se*

$$\lim_n \langle T_n \, , \, \varphi \rangle = \langle T \, , \, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \, .$$

Teorema 71 (Teorema di completezza)**.** *Data una successione $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esiste finito*

$$\lim_n \langle T_n \, , \, \varphi \rangle \in \mathbb{R} \, ,$$

allora definendo, $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ come

$$\langle T \, , \, \varphi \rangle := \lim_n \langle T_n \, , \, \varphi \rangle$$

abbiamo che T è una distribuzione.

Teorema 72 (Teorema di approssimazione)**.** *Per ogni distribuzione T esiste una successione di funzioni test $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che*

$$\langle T \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_{x_n} \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) \, \varphi(t) \, dt \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \, .$$

Potendo identificare $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ come sottinsieme dello spazio delle distribuzioni, spesso si dice che una sucessione $(x_n)_n \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nel senso delle distribuzioni se vale

$$\langle T \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_{x_n} \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) \, \varphi(t) \, dt \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \, .$$

I prossimi esercizi, richiedono la verifica del precedente limite per una scelta qualsiasi della funzione test. Si vedano i corrispettivi testi per le soluzioni.

Esercizio 73 (cf. [C , pag. 135ss])**.** *Mostrare che valgono i seguenti limiti nel senso delle distribuzioni*

1. $\lim_n \chi_{[0,2n]} = \chi_{\mathbb{R}^+}$*;*
2. $\lim_n n \, \chi_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]} = \delta_0$*;*
3. $\lim_n x_n = \delta_0$*, dove* $x_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+(nt)^2}$*;*
4. $\lim_n x_n = \delta_0$*, dove* $x_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \mathrm{e}^{-nt^2}$*;*
5. $\lim_n z_n = 0$*, dove* $z_n(t) = \mathrm{e}^{int}$*;*
6. $\lim_n x_n = \delta_0$*, dove* $x_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$.

Esercizio 74 (cf. [B , pag. 272ss])**.** *Mostrare che valgono i seguenti limiti nel senso delle distribuzioni*

1. $\lim_n x_n = 0$*, dove* $x_n(t) = \sin(nt)$*; analogo risultato si ha per* $x_n(t) = \cos(nt)$*. Confrontare tale risultato con il punto 5 dell'esercizio precedente;*
2. $\lim_n x_n = \frac{1}{2}$*, dove* $x_n(t) = \sin^2(nt)$*;*

Esempio 75. *Consideriamo una funzione $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, dt = 1$ e definiamo la famiglia di funzioni $x_n = nx(nt)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora abbiamo che la successione $(x_n)_n \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ converge a δ_0 nel senso delle distribuzioni. Infatti, usando il cambio di variabile $s = nt$, abbiamo*

$$\langle x_n \, , \, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} nx(nt) \, \varphi(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \, \varphi(s/n) \, dt \, .$$

Notiamo che l'integrando è dominato come segue $|x(s) \, \varphi(s/n)| \leq \|\varphi\|_\infty \, |x(s)|$, quindi possiamo usare il teorema della convergenza dominata. Poiché puntualmente vale $x(s) \, \varphi(s/n) \to x(s)\varphi(0)$ concludiamo che

$$\lim_n \langle x_n \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \, \varphi(s/n) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\varphi(0) \, dt = \varphi(0) \, .$$

Esercizio 76. *Usare l'esempio precedente per ottenere i risultati dell'Esercizio 73 che coinvolgono la delta di Dirac. A quale successione non è applicabile il ragionamento?*

Esempio 77. *Ricordando la definizione del nucleo di Dirichlet*

$$D_n(t) = \frac{1}{T}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega s)}{\sin(\frac{1}{2}\omega s)}\,,$$

e che l'integrale sull'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ *vale 1, otteniamo che la famiglia di funzioni* $D_n\chi_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}$ *approssima la delta di Dirac.*

8.1 Valore principale di $\frac{1}{t}$

La funzione $\frac{1}{t}$ è il classico esempio di funzione che non appartiene allo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Quindi questa funzione non induce in modo canonico una distribuzione.

Possiamo tuttavia sfruttare il Teorema 71 di completezza introducendo una adeguata successione di funzioni che appartengano a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ che convergano in un qualche senso alla funzione $\frac{1}{t}$. Consideriamo quindi le funzioni $h_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definite come

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{t} & \text{se } |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

e la distribuzione T_{h_n} da loro indotte

$$\langle T_{h_n}\,,\,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\varphi(t)\,dt\,, \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Proviamo che esiste finito il limite $\lim_n \langle T_{h_n}\,,\,\varphi\rangle$ per ogni scelta di $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Fissiamo una generica funzione test. Essa ha supporto contenuto in un intervallo del tipo $[-K, K]$, quindi

$$\begin{aligned}\langle T_{h_n}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{\frac{1}{n}\le|t|\le K} \frac{1}{t}\varphi(t)\,dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}\le|t|\le K} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt + \int_{\frac{1}{n}\le|t|\le K} \frac{1}{t}\varphi(0)\,dt\end{aligned}$$

Il secondo integrale dà risultato zero, essendo $\frac{1}{t}$ una funzione dispari. Definiamo la funzione

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi'(0) & t = 0 \\ \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} & t \neq 0 \end{cases}$$

che risulta essere continua nell'intervallo $[-K, K]$. Allora abbiamo

$$\lim_n \langle T_{h_n}\,,\,\varphi\rangle = \lim_n \int_{\frac{1}{n}\le|t|\le K} \psi(t)\,dt = \int_{|t|\le K}\psi(t)\,dt \in \mathbb{R}\,.$$

Possiamo allora usare il teorema di completezza e definire una distribuzione T come limite e ottenere

$$\langle T\,,\,\varphi\rangle = \lim_n \langle T_{h_n}\,,\,\varphi\rangle = \lim_n \int_{|x|>\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,\varphi(t)\,dt\,.$$

La distribuzione T, viene detta valore principale di $\frac{1}{t}$ e denotata con

$$T = v.p.\,\frac{1}{t}\,.$$

8.2 Operazioni con le distribuzioni

L'insieme $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, la dimostrazione di questo fatto segue direttamente dalla definizione di distribuzione.

8.2.1 Traslazione di distribuzioni

Fissato $a \in \mathbb{R}$, possiamo definire nello spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'operazione τ_a di traslazione di una funzione come

$$(\tau_a x)(t) = x(t-a)\,, \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}\,.$$

In modo analogo possiamo definire la traslazione $\tau_a T$ della distribuzione T come

$$\langle \tau_a T\,,\,\varphi\rangle = \langle T\,,\,\tau_{-a}\varphi\rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{21}$$

Il fatto che $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è di verifica immediata, in quanto la traslazione è un'operazione lineare nel senso che $\tau_a(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\tau_a(x_1) + c_2\tau_a(x_2)$.

Il segno meno nella definizione (21) è giustificato dal fatto che per ogni $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ci aspettiamo che valga $\tau_a T_x = T_{\tau_a x}$ e quindi

$$\begin{aligned}\langle \tau_a T_x\,,\,\varphi\rangle = \langle T_{\tau_a x}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-a)\,\varphi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\,\varphi(s+a)\,ds = \langle T_x\,,\,\tau_{-a}\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Definizione 78. *Diremo che una distribuzione T è periodica di periodo $p > 0$ se vale $\tau_p T = T$.*

Esempio 79. *Dato $p > 0$, il* treno di impulsi*,*

$$s_p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{kp}$$

è una distribuzione periodica di periodo p. Notiamo che vale

$$\langle s_p\,,\,\varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(kp)$$

e che tale somma in realtà ha un numero finito di addendi non nulli essendo φ una funzione a supporto compatto. Dimostrare per esercizio che s_p soddisfa le proprietà elencate nella Definizione 66.

8.2.2 Dilatazione di distribuzioni

Fissato $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, possiamo definire nello spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'operazione di dilatazione di una funzione λ_a come

$$(\lambda_a x)(t) = x(at)\,, \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}\,.$$

In modo analogo possiamo definire la dilatazione $\lambda_a T$ della distribuzione T come

$$\langle \lambda_a T\,,\,\varphi\rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle T\,,\,\lambda_{\frac{1}{a}}\varphi\right\rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,. \tag{22}$$

Come per le traslazioni si dimostra facilmente che $\lambda_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: anche la dilatazione è un'operazione lineare ovvero $\lambda_a(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\lambda_a(x_1) + c_2\lambda_a(x_2)$.

Anche in questo caso la forma anomala della definizione (22) è giustificata dal fatto che per ogni $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ci aspettiamo che valga $\lambda_a T_x = T_{\lambda_a x}$ e quindi

$$\begin{aligned}\langle \lambda_a T_x\,,\,\varphi\rangle = \langle T_{\lambda_a x}\,,\,\varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\,\varphi(t)\,dt \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\,\varphi(s/a)\,ds = \frac{1}{|a|}\left\langle T_x\,,\,\lambda_{\frac{1}{a}}\varphi\right\rangle\,.\end{aligned}$$

Definizione 80. *Una distribuzione si dirà pari se $\lambda_{-1}T = T$, viceversa si dirà dispari se $\lambda_{-1}T = -T$.*

8.2.3 Prodotto

In generale non è possibile definire il prodotto tra due distribuzioni (non possiamo definire il quadrato della delta di Dirac). Una definizione del tipo

$$\langle ST\,,\,\varphi\rangle = \langle S\,,\,\varphi\rangle\,\langle T\,,\,\varphi\rangle$$

non soddisferebbe le condizioni di linearità.

Invece, data una distribuzione T e una funzione $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ è possibile definire la distribuzione prodotto xT come

$$\langle xT\,,\,\varphi\rangle = \langle T\,,\,x\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Il passaggio di x al secondo membro della dualità ci obbliga a considerare funzioni di classe C^∞ affinché $x\varphi$ sia una funzione test.

Esempio 81. *Il prodotto tra la funzione identica $I(t) = t$ e la delta di Dirac δ_0 è la funzione nulla:*

$$\langle I\,\delta_0\,,\,\varphi\rangle = \langle \delta_0\,,\,I\,\varphi\rangle = I(0)\varphi(0) = 0\,.$$

Alla stessa conclusione si giunge scegliendo una qualsiasi funzione $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ che si annulla nel centro della delta di Dirac considerata.

Inoltre il prodotto tra la funzione $I(t) = t$ e v.p. $\frac{1}{t}$ è la distribuzione indotta dalla funzione costante 1:

$$\begin{aligned}\left\langle I\,v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,\varphi\right\rangle = \left\langle v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,I\varphi\right\rangle &= \lim_n \int_{|t|\geq\frac{1}{n}} \tfrac{1}{t}\,t\,\varphi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1\,\varphi(t)\,dt = \langle 1\,,\,\varphi\rangle\end{aligned}$$

8.3 Derivate nel senso delle distribuzioni

Consideriamo una funzione $x \in C^1(\mathbb{R})$ e le distribuzioni T_x e $T_{x'}$ indotte da x e dalla sua derivata. Possiamo notare che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, una volta determinato l'intervallo $[-K, K]$ al di fuori del quale la funzione φ è identicamente nulla,

$$\begin{aligned}\langle T_{x'}\,,\,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\,\varphi(t)\,dt &= \int_{-K}^{K} x'(t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= [x(t)\varphi(t)]_{-K}^{K} - \int_{-K}^{K} x(t)\,\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\,\langle T_x\,,\,\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Ne consegue che è coerente adottare la seguente definizione di derivata.

Definizione 82. *Data una distribuzione T si può definire la derivata di T nel modo seguente*

$$\langle T'\,,\,\varphi\rangle = -\,\langle T\,,\,\varphi'\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Si può introdurre la derivata di qualsiasi ordine come segue

$$\left\langle T^{(k)}\,,\,\varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle T\,,\,\varphi^{(k)}\right\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

Denoteremo la derivata nel senso delle distribuzioni anche come $D(T)$, e con $D^k(T)$ la derivata di ordine k nel senso delle distribuzioni.

Dalla definizione segue che una funzione $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ è derivabile infinite volte nel senso delle distribuzioni. Se $x \in C^1(\mathbb{R})$ allora la sua derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la sua derivata classica. Inoltre, ricordiamo che se x è una funzione assolutamente continua, allora la funzione $\xi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \xi(s)\, ds$$

è la derivata di x nel senso delle distribuzioni.

Si noti che la proprietà di linearità dell'operazione di derivazione è preservata.

Esempio 83. *La derivata della funzione* $\chi_{[0,+\infty)}$ *è la delta di dirac* δ_0. *Infatti*

$$\begin{aligned} \big\langle D(\chi_{[0,+\infty)})\,,\,\varphi\big\rangle &= -\big\langle \chi_{[0,+\infty)}\,,\,\varphi'\big\rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,+\infty)}(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_0^K \varphi'(t)\,dt = \varphi(0) = \langle \delta_0\,,\,\varphi\rangle \end{aligned}$$

dove la funzione φ *è nulla al di fuori di* $[-K, K]$.

Esempio 84. *Supponiamo di avere una funzione* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ *che sia derivabile con continuità in* $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ *e tale che* x' *presenti una discontinuità di prima specie in* t_0. *In particolare, definiamo l'*altezza del salto

$$h = \lim_{t\to t_0^+} x'(t) - \lim_{t\to t_0^-} x'(t)\,.$$

La funzione $x_0 = x - h\chi_{[t_0,+\infty)}$ *risulta di classe* C^1, *e vale* $x_0'(t) = x'(t)$ *per ogni* $t \neq t_0$. *Ne consegue che la derivata nel senso delle distribuzioni di* x *risulta*

$$D(x) = D(x_0 + h\chi_{[t_0,+\infty)}) = D(x_0) + hD(\chi_{[t_0,+\infty)}) = x' + h\delta_{t_0}\,.$$

Osservazione 85. *Il precedente esempio ci porta ad osservare che la presenza di una discontinuità di prima specie con un* salto di altezza h *comporta la presenza, nella derivata, di una delta di Dirac centrata nel punto di discontinuità moltiplicata per l'altezza del salto.*

Esempio 86. *La derivata della funzione caratteristica dell'intervallo* $[a, b]$ *è*

$$D(\chi_{[a,b]}) = \delta_a - \delta_b\,.$$

Esempio 87. *La funzione* $x(t) = |t|$, *ammette derivata nel senso delle distribuzione uguale alla funzione segno:*

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0\,, \\ 1 & t > 0\,. \end{cases}$$

Non abbiamo specificato il valore in zero, in quanto, ragionando in termini di funzioni di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *è sufficiente dare le definizioni quasi ovunque su* $\mathbb{R}$. *La presenza di una discontinuità in zero di altezza* $h = 2$ *ci porta a concludere che*

$$D^2(|t|) = 2\delta_0\,.$$

Esempio 88. *La funzione* $x(t) = \log|t|$ *ha derivata distribuzionale uguale a v.p.*$\frac{1}{t}$. *Infatti, ricordando che* $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle D(\log|t|)\,,\,\varphi\rangle &= -\langle \log|t|\,,\,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|t|\,\varphi'(t)\,dt = -\lim_n \int_{\frac{1}{n}<|t|<K} \log|t|\,\varphi'(t)\,dt \\ &= -\lim_n \big[\log|-\tfrac{1}{n}|\,\varphi(-\tfrac{1}{n}) - \log|\tfrac{1}{n}|\,\varphi(\tfrac{1}{n})\big] + \lim_n \int_{\frac{1}{n}<|t|<K} \frac{1}{t}\,\varphi(t)\,dt \\ &= \big\langle v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,\varphi\big\rangle \end{aligned}$$

dove la funzione φ è identicamente nulla fuori dall'insieme $[-K, K]$. Il termine di bordo va a zero per il seguente ragionamento:

$$\begin{aligned}\log|-\tfrac{1}{n}|\,\varphi(-\tfrac{1}{n}) - \log|\tfrac{1}{n}|\,\varphi(\tfrac{1}{n}) &= \log|\tfrac{1}{n}|\big(\varphi(-\tfrac{1}{n}) - \varphi(-\tfrac{1}{n})\big) \\ &\le \log n\,\frac{2}{n}\,|\varphi'(\xi)| \\ &\le 2\,\frac{\log n}{n}\,\max_{t\in[-1,1]}|\varphi'(t)|\,,\end{aligned}$$

e ricordando che $\lim_n \frac{\log n}{n} = 0$.

Esempio 89. *Calcoliamo la derivata della delta di Dirac:*

$$\langle D(\delta_\tau)\,,\,\varphi\rangle = -\,\langle \delta_\tau\,,\,\varphi'\rangle = -\varphi'(\tau)\,.$$

Similmente abbiamo $\left\langle D^k(\delta_\tau)\,,\,\varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle \delta_\tau\,,\,\varphi^k\right\rangle = (-1)^k\varphi^{(k)}(\tau)$.

Osservazione 90. *Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che $T' = 0$ allora esiste $c \in \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ tale che $T = c$, ovvero T è indotta da una funzione costante.*

9 Trasformata di Fourier per distribuzioni

In precedenza abbiamo introdotto la trasformata di Fourier per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$. Questi insiemi inducono automaticamente delle distribuzioni. Tuttavia non siamo ancora in grado di definire le trasformate di Fourier di funzioni molto semplici come le funzioni costanti non nulle, il seno, il coseno...

La prima idea potrebbe essere quella di introdurre le trasformate di Fourier per dualità come fatto per le derivate, ottenendo qualcosa come

$$?\;\;\langle \mathscr{F}(T)\,,\,\varphi\rangle = \langle T\,,\,\mathscr{F}[\varphi]\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\;?$$

tuttavia dovremmo poter affermare che, data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, possiamo assicurare che $\mathscr{F}[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Nella sezione 7.1, abbiamo considerato le funzioni a banda limitata, che sono funzioni aventi trasformata di Fourier a supporto compatto. Tali funzioni, per il teorema di Shannon, non sono a supporto compatto.

Ecco l'idea operativa ideata da Schwartz: estendiamo lo spazio delle funzioni test ad un certo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ valga $\mathscr{F}[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Poi Introduciamo lo spazio duale $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e la nozione di trasformata di Fourier anche in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per dualità come accennato inizialmente. Successivamente dobbiamo sperare che $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ contenga lo spazio $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Questo obiettivo sarà raggiunto parzialmente, dovremo infatti accontentarci di un suo sottinsieme.

Definizione 91 (Spazio di Schwartz)**.** *Diremo che una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ è a decrescita rapida se, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, vale*

$$\lim_{|t|\to\infty} |t|^m|\varphi^{(n)}(t)| = 0\,.$$

In parole povere, tutte le derivate di φ devono andare a zero più velocemente di qualsiasi potenza.

L'insieme delle funzioni a decrescita rapida è detto spazio di Schwartz e lo indicheremo con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale che contiene $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ strettamente, in quanto vi appartiene anche la funzione gaussiana e^{-x^2}.

Inoltre, poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, allora possiamo calcolare la trasformata di Fourier in questo spazio. In aggiunta, se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $\varphi^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ per ogni k. Ricordando che

$$\mathscr{F}[\varphi^{(k)}](\omega) = (i\omega)^k\mathscr{F}[\varphi](\omega)$$

e che le trasformate di Fourier sono continue e infinitesime, otteniamo che ogni elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ha trasformata di Fourier a decrescita rapida. Concludiamo quindi che la trasformata di Fourier è un'operazione chiusa in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Inoltre, possiamo calcolare anche le antitrasformate.

Definizione 92 (Convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)**.** *Diremo che una successione $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge a zero in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, abbiamo che*

$$\lim_k \left\| |t|^m |\varphi_k^{(n)}(t)| \right\|_\infty = 0 \, .$$

Diremo che $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, se la successione $(\varphi_k - \varphi)_k$ converge a zero in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definizione 93 (Distribuzioni temperate)**.** *Una distribuzione temperata è un funzionale lineare e continuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$, ovvero tale che*

- *per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vale*

$$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

- *se la successione $(\varphi_k)_k$ è convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora la successione $(T(\varphi_k))_k$ è convergente a $T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$.*

Denoteremo lo spazio delle distribuzioni temperate con $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Se una successione $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ allora converge anche in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quindi ogni distribuzione temperata appartiene anche a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Di conseguenza le operazioni sono definite in modo analogo.

Definizione 94 (Funzioni a crescita lenta)**.** *Consideriamo la funzione $x(t) = p(t)y(t)$ dove p è un polinomio e $y \in L^1(\mathbb{R})$. La funzione x induce una distribuzione temperata definita come*

$$\langle T_x \, , \, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, \varphi(t) \, dt \, , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \, .$$

Infatti l'integrale è computabile perché la decrescita rapida della φ fa sì che

$$|x(t)\varphi(t)| = |y(t)| \, |p(t)\varphi(t)| \leq |y(t)|$$

quando $|t|$ è sufficientemente grande. Quindi lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ contiene gli insiemi $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$, ma anche i polinomi. Invece le funzioni esponenziali, come e^x non sono distribuzioni temperate. Dobbiamo quindi rinunciare a funzioni di questo tipo.

Anche per le distribuzioni temperate abbiamo i seguenti teoremi.

Teorema 95 (Teorema di completezza)**.** *Data una successione $(T_n)_n \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ esiste finito*

$$\lim_n \langle T_n \, , \, \varphi \rangle \in \mathbb{R} \, ,$$

allora definendo, $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ come

$$\langle T \, , \, \varphi \rangle := \lim_n \langle T_n \, , \, \varphi \rangle$$

abbiamo che T è una distribuzione temperata.

Teorema 96 (Teorema di approssimazione)**.** *Per ogni $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ esiste una successione di funzioni test $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che*

$$\langle T \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_{x_n} \, , \, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) \, \varphi(t) \, dt \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \, .$$

Definizione 97 (Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)**.** *Data $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definiamo la trasformata di Fourier $\mathscr{F}[T] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ponendo*

$$\langle \mathscr{F}[T] \, , \, \varphi \rangle = \langle T \, , \, \mathscr{F}[\varphi] \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \, .$$

L'antitrasformata di Fourier viene definita nello stesso modo:

$$\left\langle \mathscr{F}^{-1}[T]\,,\,\varphi \right\rangle = \left\langle T\,,\,\mathscr{F}^{-1}[\varphi] \right\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,.$$

Continuano a valere le formule usuali per il calcolo delle trasformate di Fourier. Ne consegue che l'operatore *trasformata di Fourier* $\mathscr{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è invertibile nello spazio delle distribuzioni temperate.

In più abbiamo la seguente proprietà.

Proposizione 98. *Dato $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e una successione $(\psi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che*

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t)\,\varphi(t)\,dt = \langle T\,,\,\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

allora vale anche

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}[\psi_n](\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \langle \mathscr{F}[T]\,,\,\varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.$$

In particolare, se $x \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo che x induce una distribuzione T_x tale che $\mathscr{F}[T_x] = T_{\mathscr{F}[x]}$.

9.1 Trasformate di Fourier di distribuzioni temperate

In questa sezione, data una funzione $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, al fine di semplificare le notazioni, indicheremo sempre con x la distribuzione indotta dalla funzione x.

Consideriamo la delta di Dirac δ_0, allora $\mathscr{F}[\delta_0] = 1$ (ovvero la funzione costante di valore 1). Infatti

$$\langle \mathscr{F}[\delta_0]\,,\,\varphi \rangle = \langle \delta_0\,,\,\mathscr{F}[\varphi] \rangle = \mathscr{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-i0\cdot t}}_{=1}\,\varphi(t)\,dt = \langle 1\,,\,\varphi \rangle\,.$$

In modo analogo abbiamo che $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta_0$. Infatti

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}[1]\,,\,\varphi \rangle = \langle 1\,,\,\mathscr{F}[\varphi] \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{1}_{\mathrm{e}^{i\omega\cdot 0}}\,\mathscr{F}[\varphi](\omega)\,d\omega \\ &= 2\pi\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[\varphi](0) = 2\pi\varphi(0) = 2\pi\,\langle \delta_0\,,\,\varphi \rangle\,.\end{aligned}$$

Esercizio 99. *Calcolare $\mathscr{F}[\delta_t]$ e $\mathscr{F}[c]$ dove c è la distribuzione indotta dalla funzione costante di valore c.*

La trasformata di Fourier di $v.p.\frac{1}{t}$ è $-i\pi\,\mathrm{sign}(\omega)$. Infatti

$$\left(\mathscr{F}[v.p.\tfrac{1}{t}]\right)' = -i\mathscr{F}[t \cdot v.p.\tfrac{1}{t}] = -i\mathscr{F}[1] = -2\pi i\delta_0$$

da cui, ricordando che la funzione segno ha come derivata distribuzionale il doppio della delta di Dirac, abbiamo che esiste una costante tale che

$$\mathscr{F}[v.p.\tfrac{1}{t}] = -\pi i\,\mathrm{sign} + c$$

Dopo aver notato che la trasformata di Fourier di una distribuizione dispari è ancora una distribuzione dispari, essendo sign una funzione dispari, possiamo concludere che $c = 0$.

Ricordando che $\mathscr{F}[\mathscr{F}[x]](t) = 2\pi x(-t) = 2\pi\lambda_{-1}x$, possiamo notare che $\mathscr{F}[\mathrm{sign}] = -2iv.p.\frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}[\mathrm{sign}]\,,\,\varphi \rangle = \langle \mathrm{sign}\,,\,\mathscr{F}[\varphi] \rangle &= \left\langle \frac{i}{\pi}\mathscr{F}[v.p.\tfrac{1}{t}]\,,\,\mathscr{F}[\varphi] \right\rangle \\ &= \frac{i}{\pi}\left\langle v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,\mathscr{F}[\mathscr{F}[\varphi]] \right\rangle = \frac{i}{\pi}\left\langle v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,2\pi\lambda_{-1}\varphi \right\rangle \\ &= 2i\left\langle \lambda_{-1}v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,\varphi \right\rangle = 2i\left\langle v.p.\tfrac{1}{t}\,,\,\varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Le proprietà di derivazione ci permettono di calcolare anche $\mathscr{F}[t] = 2\pi i\delta_0'$ nel modo seguente

$$-i\mathscr{F}[t] = \mathscr{F}[-it \cdot 1] = (\mathscr{F}[1])' = (2\pi\delta_0)' = 2\pi\delta_0'\,.$$

Esercizio 100. *Calcolare* $\mathscr{F}[t^k]$ *e* $\mathscr{F}[\delta_0^{(k)}]$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Consideriamo ora le funzioni trigonometriche: innanzitutto abbiamo

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{i\omega_0 t}] = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \cdot 1] = \tau_{\omega_0}\mathscr{F}[1] = 2\pi\tau_{\omega_0}\delta_0 = 2\pi\delta_{\omega_0} .$$

Esercizio 101. *Dimostrare che*

$$\mathscr{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi(\delta_{\omega_0} + \delta_{-\omega_0}) , \qquad \mathscr{F}[\sin t] = -i\pi(\delta_{\omega_0} - \delta_{-\omega_0}) ,$$

Inoltre

$$\mathscr{F}\left[\sum_{k=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{in\omega_0 t}\right] = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} c_n \delta_{n\omega_0} .$$

Conseguenza del calcolo dell'ultimo esercizio unito alla Proposizione 98, è il seguente teorema.

Teorema 102. *Consideriamo una funzione* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *periodica di periodo* 2π *tale che* $x \in L^2([0, 2\pi])$*. Possiamo scrivere la sua serie di Fourier come*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{int} .$$

Allora

$$\mathscr{F}[x] = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n \delta_n$$

dove la serie è intesa come elemento nello spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *delle distribuzioni temperate, ovvero vale*

$$\langle \mathscr{F}[x] \, , \, \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n \langle \delta_n \, , \, \varphi \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n \varphi(n) .$$