

Università degli Studi di Trieste

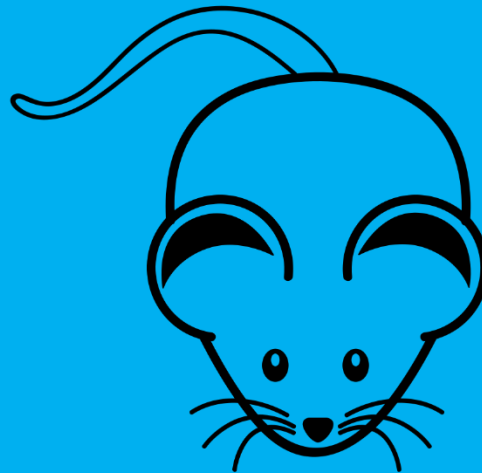
Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

TOPOLOGIA IN \mathbb{R}^n

Parte 1



$$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n \}$$

PRODOTTO SCALARE IN \mathbb{R}^m

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

PROPRIETA' $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

4) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Dalle precedenti proprietà si ricava

$$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

(NB: usare la proprietà 2))

Le proprietà 1), 2), 3), 4) definiscono un prodotto scalare.

X sp. vettoriale su \mathbb{R} , $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa 1), 2), 3), 4)

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ è un **PRODOTTI SCALARE** e X è detto **PRE-HILBERTIANO**.

NORMA IN \mathbb{R}^n

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

PROPRIETÀ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

Vale anche la proprietà

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Dim: $\|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$

↑ DISEG. TRIANGOLARE

$\|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \|x-y\| = \|x-y\|$

↑ PROPR. 2)

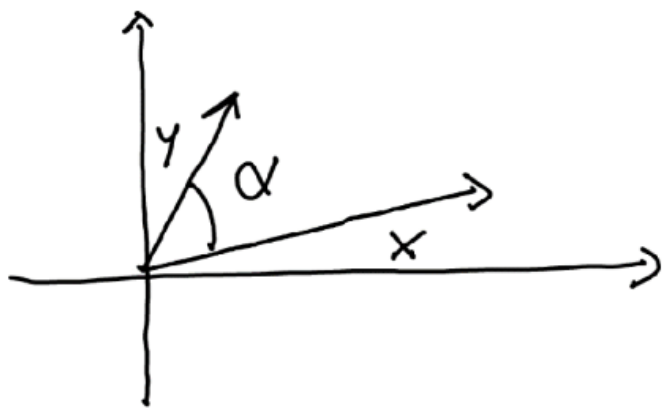
$\Rightarrow -\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

$\Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$



$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$$

Le proprietà 1), 2), 3) definiscono la nozione di NORMA

X sp. vettoriale su \mathbb{R} $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa 1), 2), 3)

$\Rightarrow \|\cdot\|$ è una NORMA su X e X è detto NORMATO

NB: OGNI SPAZIO DOTATO DI PRODOTTO SCALARE

È AUTOMATICAMENTE NORMATO CON LA NORMA

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(MA NON È VERO IL VICEVERSA)

DISTANZA IN \mathbb{R}^n

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

PROPRIETÀ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

DISTANZA
EUCLIDEA

LE PROPRIETÀ 1, 2, 3) DEFINISCONO LA NOZIONE DI DISTANZA

X INSIEME $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ SODDISFA 1, 2, 3)

$\Rightarrow d$ È UNA DISTANZA (O METRICA) SU X E X È UNO
SPAZIO METRICO

NB: X normato $\Rightarrow X$ metrico con la distanza

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

(ma non viceversa)

Esempi

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \leftarrow \text{NORMA EUCLIDEA}$$

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \} = \max \{ |x_i|, i=1, \dots, n \}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

sono tre esempi di norme in \mathbb{R}^n

Queste norme inducono le distanze

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad \leftarrow \text{DISTANZA EUCLIDEA}$$

$$d_\infty(x, y) = \max \{ |x_i - y_i|, i=1, \dots, n \}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

SALVO DIVERSA INDICAZIONE $\|\cdot\|$ e $d(\cdot, \cdot)$ INDICHERANNO
LA NORMA E LA DISTANZA EUCLIDEA

Dimostriamo che

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$$

è una distanza in \mathbb{R}^m

$$1) \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \geq 0 \quad \text{poiché} \quad |x_i - y_i| \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

$$2) d_1(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^m |y_i - x_i| = d_1(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

$$3) d_1(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^m |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^m |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = \\ = \sum_{i=1}^m |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^m |z_i - y_i| = d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

TOPOLOGIA IN \mathbb{R}^n

Parte 2



TOPOLOGIA IN \mathbb{R}^m

Def: Dati $x \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$

$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid d(x, y) = r\}$ è detto SFERA
di centro x e raggio r

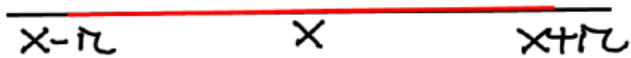
$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid d(x, y) < r\}$ è detto INTORNO SFERICO
o PALLA di centro x e raggio r

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2} \quad \text{distanza euclidea in } \mathbb{R}^m$$

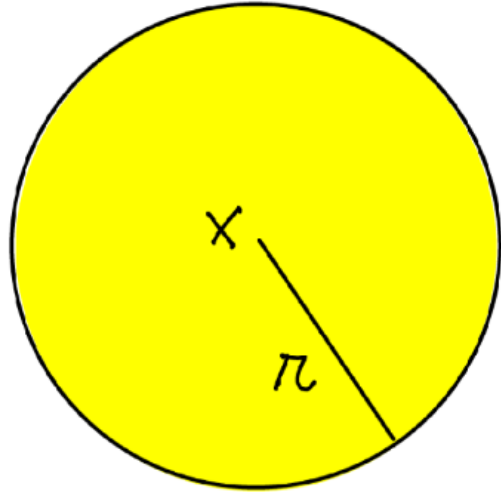
$$m = 1$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

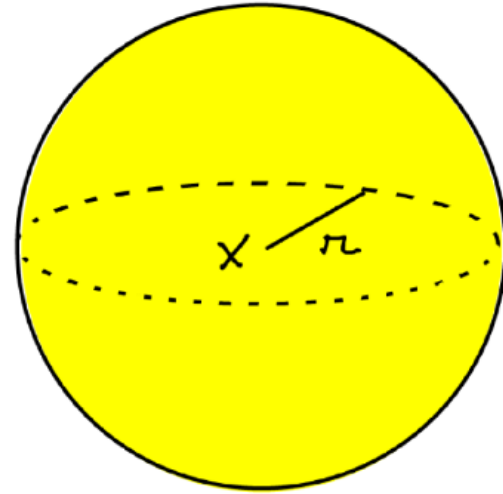
$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\} =]x - r, x + r[$$



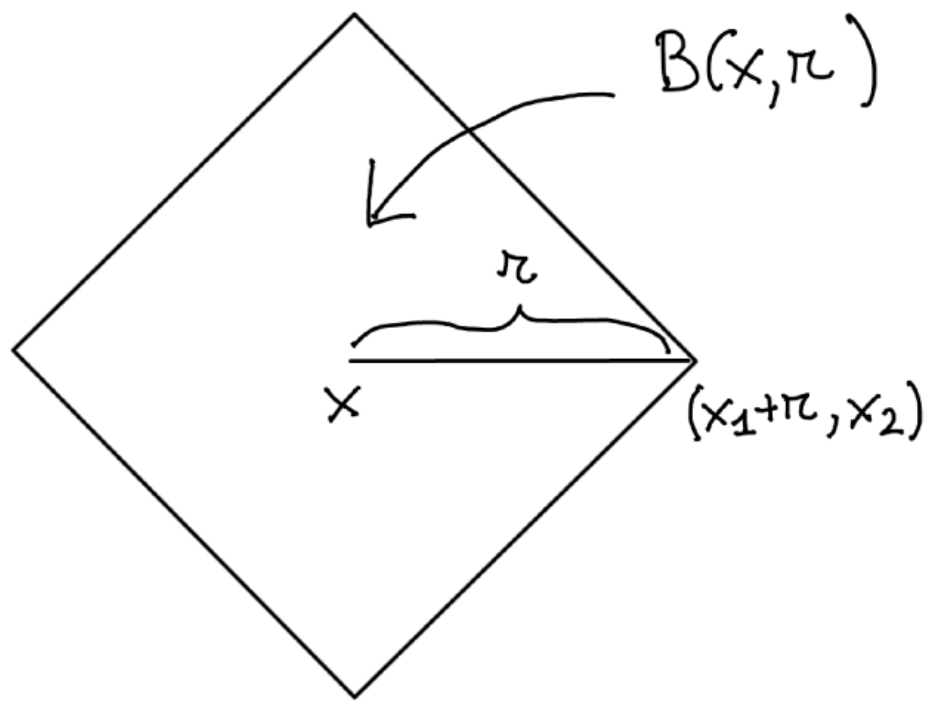
$$n=2$$



$$n=3$$

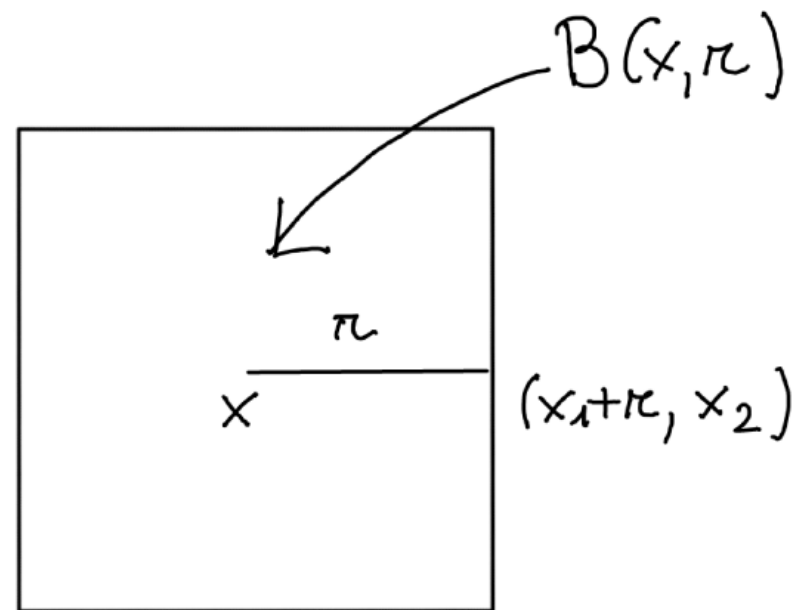


$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$$



$$n = 2$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i=1, \dots, n\}$$



$$n = 2$$

Def. Dato $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ è INTORNO di x_0

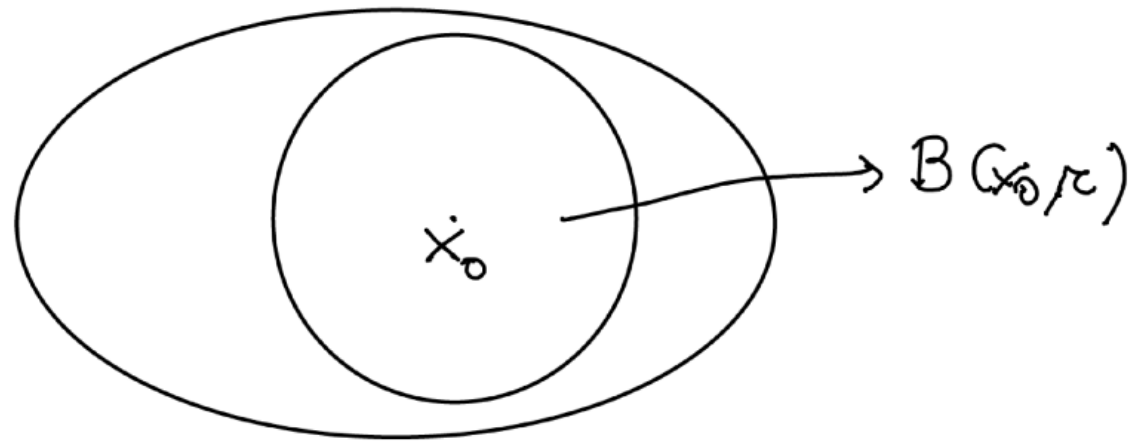
$$\Leftrightarrow \exists B(x_0, r) : B(x_0, r) \subseteq U$$

(NB: scriviamo U_{x_0}, V_{x_0}, \dots per indicare un intorno di x_0)

Esempio

L'area racchiusa dall'ellisse (compresa o meno l'ellisse stessa)
è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}^2$

NB: $\forall r > 0$ $B(x_0, r)$
è intorno di x_0



PROPRIETÀ DEGLI INTORNI

1) U_{x_0} intorno di $x_0 \Rightarrow x_0 \in U_{x_0}$

OVVIA: $\exists B(x_0, r):$
 $x_0 \in B(x_0, r) \subseteq U_{x_0}$

2) U_{x_0}, V_{x_0} intorno di $x_0 \Rightarrow U_{x_0} \cap V_{x_0}$ intorno di x_0

Dim: $\exists B(x_0, r_1) \subseteq U_{x_0}, B(x_0, r_2) \subseteq V_{x_0}$

Sia $r = \min \{ r_1, r_2 \}$

$\Rightarrow B(x_0, r) \subseteq U_{x_0} \cap V_{x_0}$

$$3) \forall y_0 \in B(x_0, \pi) \exists B(y_0, \pi_1) \subseteq B(x_0, \pi)$$

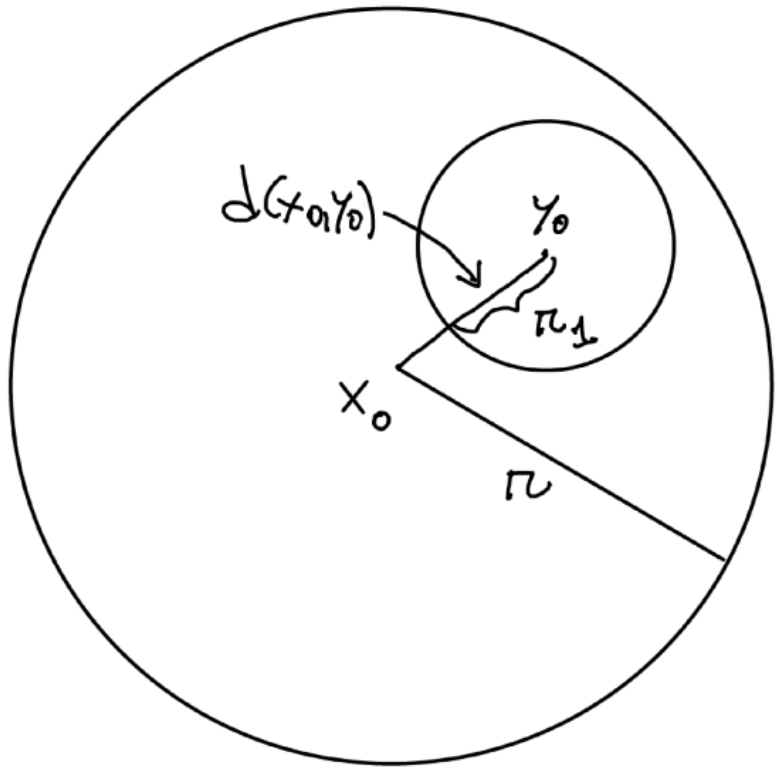
Dim: Sia $\pi_1: 0 < \pi_1 < \pi - d(x_0, y_0) \leftarrow \text{È POSITIVO PERCHÉ } y_0 \in B(x_0, \pi)$

$$\Rightarrow \forall y \in B(y_0, \pi_1), d(x_0, y) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, y) <$$

$$< d(x_0, y_0) + \pi_1 <$$

$$< d(x_0, y_0) + \pi - d(x_0, y_0) =$$

$$= \pi$$



$$\Rightarrow \forall y \in B(y_0, r_1), y \in B(x_0, r)$$

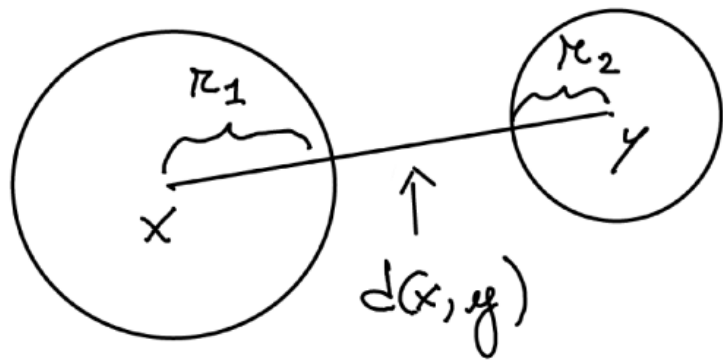
$$\text{cioe } B(y_0, r_1) \subseteq B(x_0, r)$$

$$4) \quad x \neq y \Rightarrow \exists B(x, \pi_1), B(y, \pi_2) : B(x, \pi_1) \cap B(y, \pi_2) = \emptyset$$

Dim: Basta prendere $\pi_1, \pi_2 < \frac{d(x, y)}{2}$

Se per assurdo fosse $z \in B(x, \pi_1) \cap B(y, \pi_2)$, si avrebbe

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \pi_1 + \pi_2 < 2 \frac{d(x, y)}{2} = d(x, y)$$



QUESTA PROPRIETÀ È DETTA
"SEPARAZIONE DI HAUSDORFF"

Def.: Dato $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $x_0 \in E$ INTERNO AD $E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists B(x_0, r) \subseteq E$

$\Leftrightarrow \exists$ un intorno U_{x_0} di x_0 : $U_{x_0} \subseteq E$

\uparrow SEGUE DAL FATTO CHE $\forall U_{x_0}$ INTORNO DI $x_0 \exists B(x_0, r) \subseteq U_{x_0}$

Def.: Dato $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $x_0 \notin E$ ESTERNO ad E

$\Leftrightarrow x_0$ è interno a E^c (complementare di E)

Def.: Dato $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \bar{E}$ DI FRONTIERA PER \bar{E}

$\Leftrightarrow x_0$ non è né interno né esterno ad E

Notazione $E \subseteq \mathbb{R}^n$

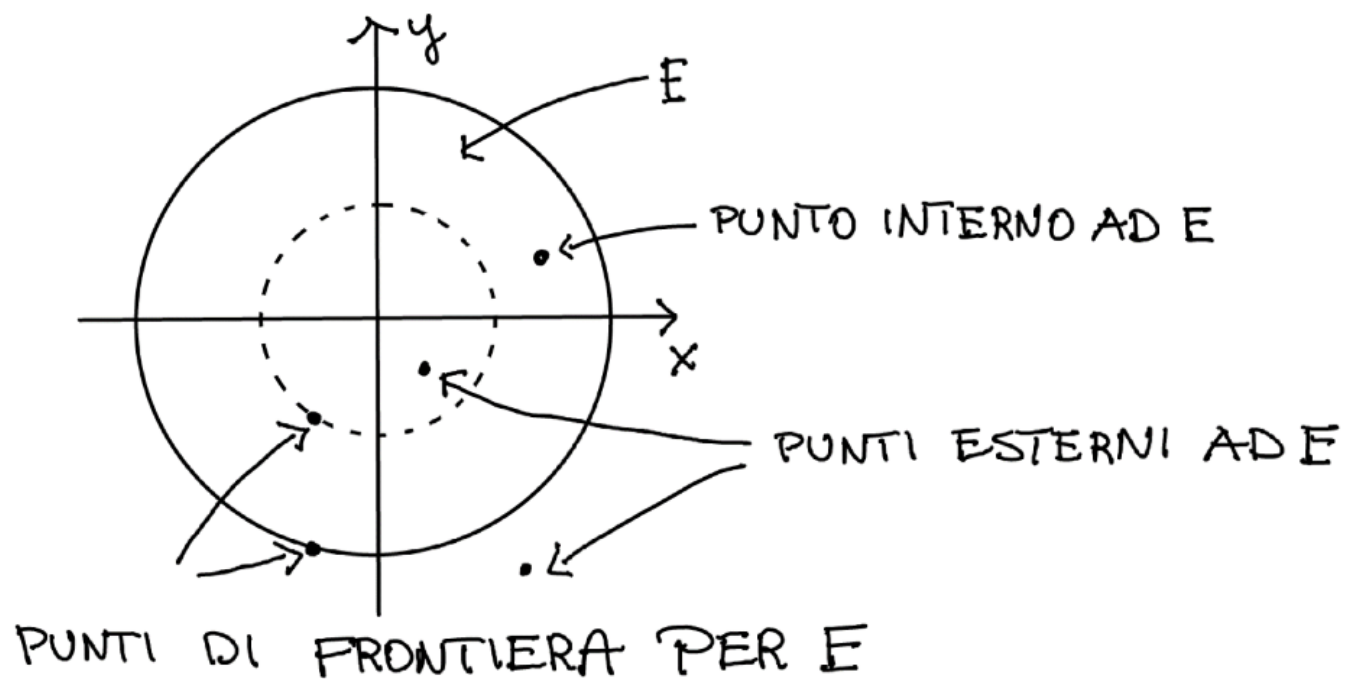
$\overset{\circ}{E}$ PARTE INTERNA DI E = insieme dei punti interni ad E

$\overset{\circ}{E}^c$ PARTE ESTERNA DI E = insieme dei punti esterni ad E

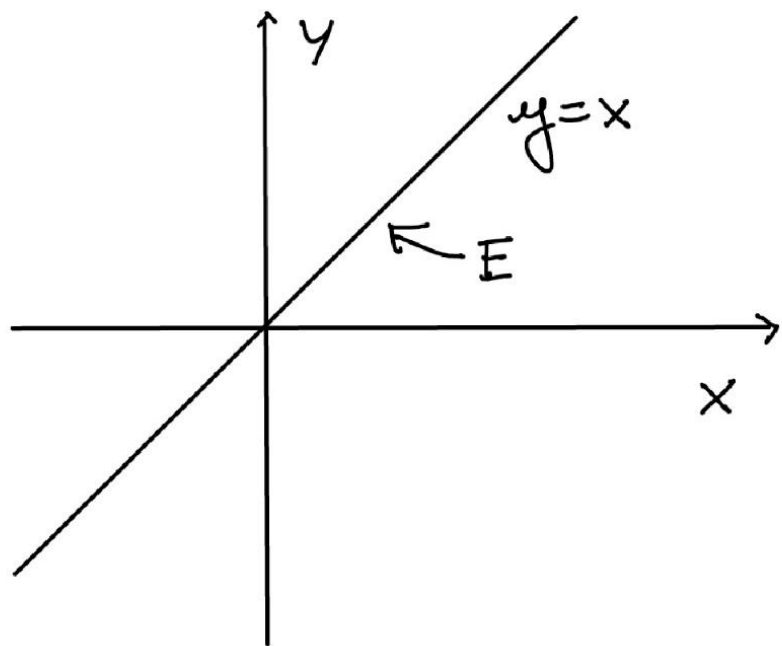
∂E o $\text{Fr}(E)$ FRONTIERA DI E = insieme dei punti di frontiera di E

Esempi

$$1) E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$



$$2) E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \}$$



$$E^{\circ} = \emptyset \quad (\text{NON CI SONO PUNTI INTERNI})$$

$$E^c = E^c \quad (\text{TUTTI E SOLO I PUNTI DI } E^c \text{ SONO ESTERNI})$$

$$\partial E = E \quad (E \text{ COINCIDE CON LA SUA FRONTIERA})$$

Proposizione

$x_0 \in \text{Int}(E) \Leftrightarrow \forall U_{x_0}$ intorno di x_0 , $U_{x_0} \cap E \neq \emptyset$ e $U_{x_0} \cap E^c \neq \emptyset$.

Dim:

$x_0 \in \text{Int}(E) \Leftrightarrow x_0 \notin \overset{\circ}{E}^c$ e $x_0 \notin \overset{\circ}{E}$

$\Leftrightarrow \neg (\exists U_{x_0}$ intorno di $x_0: U_{x_0} \subseteq E^c)$ e $\neg (\exists U_{x_0}$ int. di $x_0: U_{x_0} \subseteq E)$

$\Leftrightarrow \forall U_{x_0}$ intorno di x_0 , $U_{x_0} \cap E^c \neq \emptyset$ e $U_{x_0} \cap E \neq \emptyset$

Def.: x_0 è ADERENTE ad E

$\Leftrightarrow \forall U_{x_0}$ intorno di x_0 , $U_{x_0} \cap E \neq \emptyset$

L'insieme dei punti aderenti ad E si dice CHIUSURA di E
e si indica con \overline{E}

$$\text{N.B.: } \overline{\cdot} \text{ sempre } \quad \overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$$

Esempi

$$1) E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \Rightarrow \overline{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$2) E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \Rightarrow \overline{E} = E$$

Def.: $x_0 \bar{e}$ DI ACCUMULAZIONE PER E

$\Leftrightarrow \forall U_{x_0}$ intorno di x_0 , $U_{x_0} \cap E - \{x_0\} \neq \emptyset$

a) L'insieme dei punti di accumulazione di E è detto DERIVATO di E

b) $x_0 \in E$ è detto ISOLATO se non è di accumulazione per E

c) Ogni $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ è di accumulazione per E

d) Se x_0 è di accumulazione per E allora $x_0 \in \bar{A}$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

TOPOLOGIA IN \mathbb{R}^n

Parte 3



Def.: E è APERTO $\Leftrightarrow E = \overset{\circ}{E}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \exists U_x$ intorno di x : $U_x \subseteq E$

$\Leftrightarrow \forall x \in E \exists B(x, r) \subseteq E$

E è CHIUSO $\Leftrightarrow E^c$ è aperto

NB: \emptyset e \mathbb{R}^m sono gli unici sottoinsiemi di \mathbb{R}^m
contemporaneamente aperti e chiusi

Esempi

1) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \}$ non è né aperto né chiuso

$E_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4 \}$ è aperto e $E_1 = \overset{\circ}{E}$

$E_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$ è chiuso e $E_2 = \overline{E}$

2) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \}$ è chiuso (E^c è aperto)

3) $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \{x\}$ è chiuso

Infatti, $\forall y \neq x$, preso $\varepsilon \in \mathbb{R}: 0 < \varepsilon < d(x, y)$, si ha $x \notin B(y, \varepsilon)$, dunque $B(y, \varepsilon) \subseteq \{x\}^c$, cioè $\{x\}^c$ è aperto. Ne segue che $\{x\}$ è chiuso

PROPRIETÀ DI APERTI E CHIUSI

1) $\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia di aperti (anche infinita)
 $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto

Dim: Sia $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Allora $\exists A_{i_0}: x \in A_{i_0}$.

A_{i_0} aperto $\Rightarrow \exists B(x, r) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
 $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto

2) $\{A_i\}_{i \in I}$ famiglia **finita** di aperti $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ è aperto

Dim: Sia $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Allora $x \in A_i \forall i \in I$

$\Rightarrow \exists B(x, r_i) \subseteq A_i \forall i \in I$

Preso $r = \min\{r_i \mid i \in I\}$, sarà $r > 0$ ✓

e $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq A_i \forall i \in I$

$\Rightarrow B(x, r) \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ aperto

QUI SERVE IL
FATTO CHE LA
FAMIGLIA SIA FINITA
SE FOSSE INFINITA
POTREBBE ESSERE
 $r = 0$

3) $\{C_i\}_{i \in I}$ famiglia **finita** di chiusi $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} C_i$ chiuso

4) $\{C_i\}_{i \in I}$ famiglia (anche infinita) di chiusi $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ chiuso

Dim: 3) e 4) si dimostrano ponendo $A_i = C_i^c \forall i \in I$, per cui $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti.

Si applicano 1) e 2) a $\{A_i\}_{i \in I}$, osservando che

$$\left. \begin{aligned} \bigcup_{i \in I} C_i &= \bigcup_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c \\ \bigcap_{i \in I} C_i &= \bigcap_{i \in I} A_i^c = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \end{aligned} \right\} \text{LEGGI DI DE MORGAN}$$

Usando 3) si può dimostrare che i sottoinsiemi finiti di \mathbb{R}^n sono chiusi.

Infatti, sia $E = \{x_1, \dots, x_m\} = \bigcup_{i=1}^m \{x_i\}$

$\{x_i\}$ chiuso $\forall i=1, \dots, m$

\Rightarrow per 3) E è chiuso perché unione finita di chiusi

Proposizione

$\overline{E^c} = \overset{\circ}{E^c}$ (il complementare della chiusura di un insieme coincide con la sua parte esterna)

Dim: $x \in \overline{E^c} \iff x$ non è aderente ad E

$\iff \exists U_x$ intorno di x : $U_x \cap E = \emptyset$

$\iff \exists U_x$ intorno di x : $U_x \subseteq E^c$

$\iff x \in \overset{\circ}{E^c}$

Proposizione

$$E \text{ chiuso} \Leftrightarrow E = \overline{E}$$

$$\text{Dim: } E = \overline{E} \Leftrightarrow E^c = \overline{E}^c \Leftrightarrow E^c = \overset{\circ}{E}^c \Leftrightarrow E^c \text{ aperto} \\ \Leftrightarrow E \text{ chiuso}$$

Si dimostra facilmente anche che, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E} \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{\overset{\circ}{E}} = \overset{\circ}{E}$$

$\Rightarrow \overline{E}$ chiusura \bar{E} chiuso, $\overset{\circ}{E}$ $\overset{\circ}{E}$ aperto.

Proposizione

1) E chiuso \Leftrightarrow 2) $\text{Gr}(E) \subseteq E \Leftrightarrow$ 3) Ogni punto di accumulazione di E appartiene a E

Dim: $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Siano E chiuso, $x \in \text{Gr}(E)$.

Allora $\forall U_x$ intorno di x , $U_x \cap E \neq \emptyset$ e $U_x \cap E^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall U_x$ intorno di x , $U_x \cap E \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \overline{E} = E$ (perché E è chiuso).

$2) \Rightarrow 3)$ Siano $\text{Gr}(E) \subseteq E$ e x di accumulazione per E

Allora $\forall U_x$ intorno di x , $U_x \cap E - \{x\} \neq \emptyset$.

Se fosse $x \notin E$, allora $x \in E^c$ e quindi $U_x \cap E^c \ni \{x\}$,
da cui $U_x \cap E^c \neq \emptyset$. Poiché anche $\emptyset \neq U_x \cap E - \{x\} \subseteq U_x \cap E$,
 $x \in \text{Gr}(E) \subseteq E$. Assurdo. Quindi $x \in E$.

$3) \Rightarrow 1)$ Sia E tale che ogni suo punto di accumulazione appartiene a E .

Dimostriamo che $\overline{E} \subseteq E$. Sia $x \in \overline{E}$ e per assurdo $x \notin E$.

Allora $\forall U_x$ intorno di x , $U_x \cap E - \{x\} = U_x \cap E \neq \emptyset$

Quindi $x \in \text{Gr}(E)$ ma $x \notin E$. Assurdo. Quindi $x \in E$.

Proposizione

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\Leftrightarrow E \cap \text{Int}(E) = \emptyset$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dim: } \text{Int}(E) = \overline{E} \cap \overline{E^c} \\ \text{Int}(E^c) = \overline{E^c} \cap \overline{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Int}(E) = \text{Int}(E^c)$$

E aperto $\Leftrightarrow E^c$ chiuso $\Leftrightarrow \text{Int}(E^c) = \text{Int}(E) \subseteq E^c$

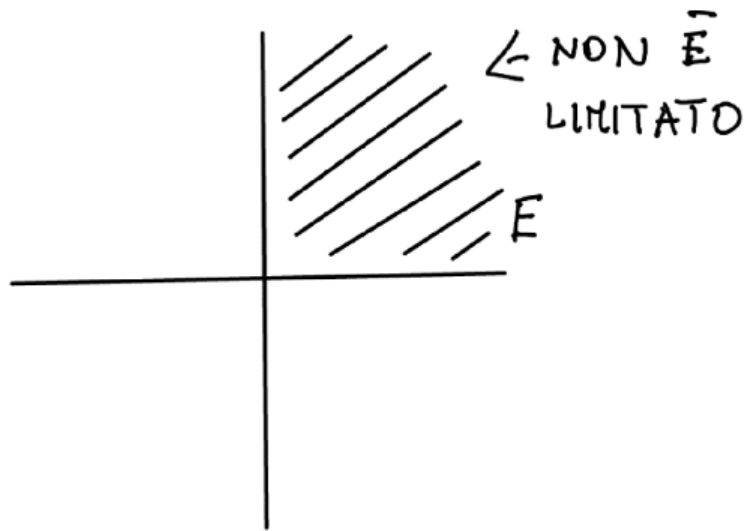
$$\Leftrightarrow \text{Int}(E) \cap E = \emptyset$$

□

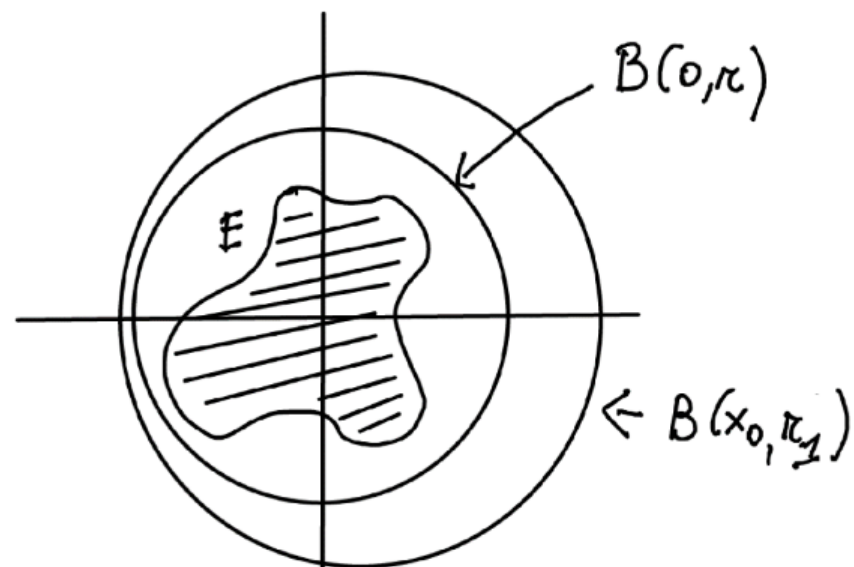
Def.: $E \subseteq \mathbb{R}^m$ è LIMITATO $\Leftrightarrow \exists r > 0: E \subseteq B(0, r)$

In maniera equivalente si può dire che E è limitato
 $\Leftrightarrow \exists r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^m: E \subseteq B(x_0, r)$

Esempi



$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$



E è limitato

Def.: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$. Si dice DIAMETRO di E

$$\text{diam}(E) = \sup \{ \|x-y\| : x, y \in E \}$$

Si può dimostrare che E è limitato $\Leftrightarrow \text{diam}(E) \in \mathbb{R}$.

Esempi

$$E = B(x_0, r) \Rightarrow \text{diam}(E) = 2r$$

$$E \text{ quadrato di lato } \ell \Rightarrow \text{diam}(E) = \ell\sqrt{2}$$

$$E = \mathbb{R}^m \Rightarrow \text{diam}(E) = +\infty$$

Teorema (di Bolzano-Weierstrass)

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e infinito $\Rightarrow \exists$ almeno un punto di accumulazione
per E

Def.: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di aperti tale che

$E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ è detta COPERTURA di E

Def.: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è COMPATTO \Leftrightarrow da ogni sua copertura è possibile estrarre una famiglia FINITA di aperti che sia una copertura di E .

Teorema (di Heine-Borel)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. E è compatto $\Leftrightarrow E$ è chiuso e limitato.

Esempi

1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ non è compatto, non essendo limitato. Infatti:

$$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}}]n-\varepsilon, m+\varepsilon[\quad \text{con } \varepsilon \in]0, 1[$$

ma se togliamo anche un solo $]n-\varepsilon, m+\varepsilon[$ dalla copertura, non abbiamo più una copertura di \mathbb{N} .

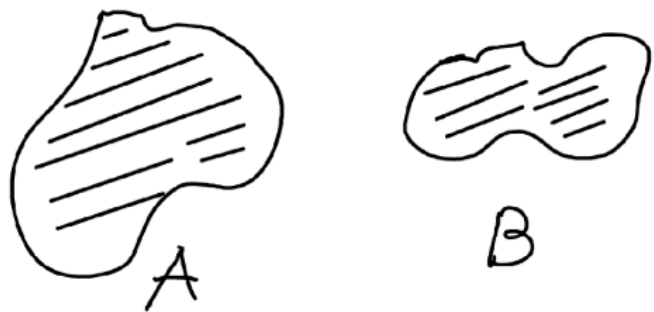
Anche \mathbb{R}^n non è compatto

2) Gli insiemi finiti in \mathbb{R}^n sono compatti

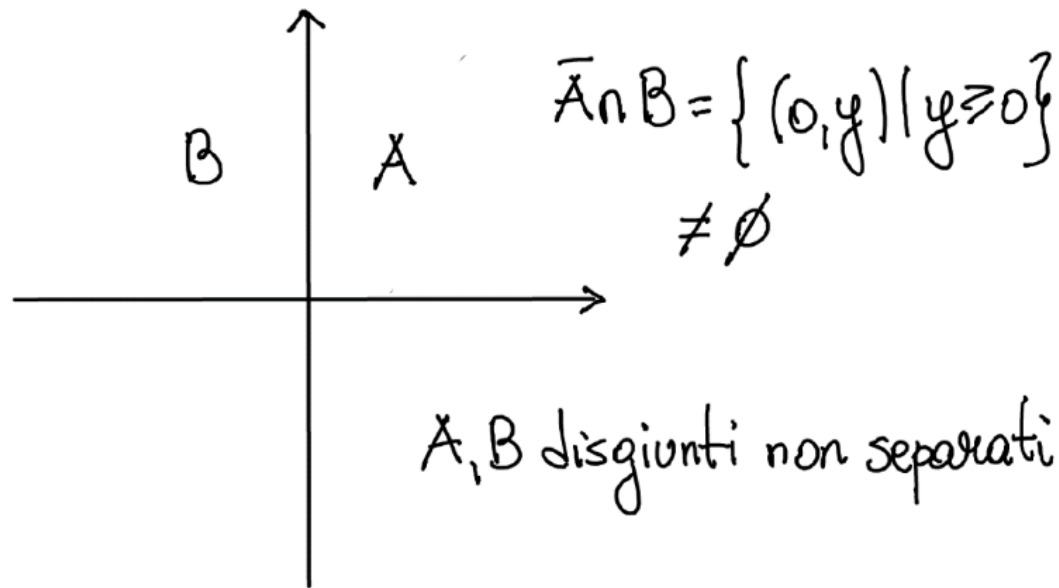
Segue immediatamente dalla definizione di compattezza o osservando che gli insiemi finiti sono ovviamente limitati e, come già visto, chiusi.

Def.: Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

A, B sono SEPARATI $\Leftrightarrow \overline{A} \cap B = \emptyset, A \cap \overline{B} = \emptyset$



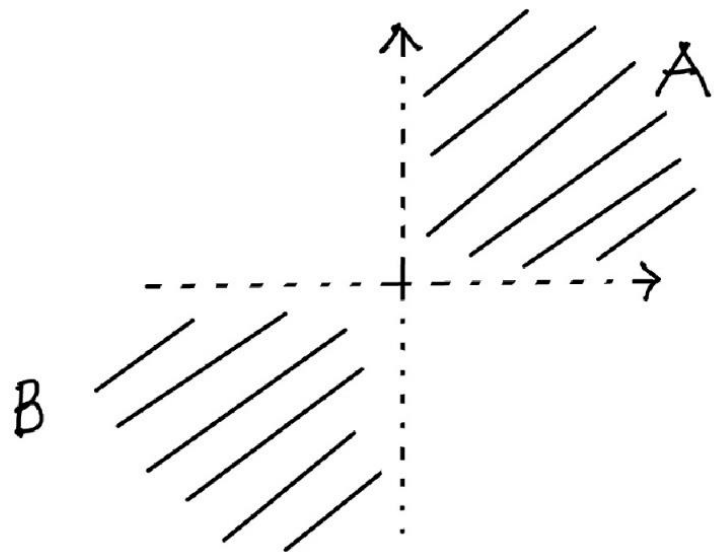
A, B sono disgiunti e separati



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \geq 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0\}$$

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONNESSO $\Leftrightarrow E$ non si può rappresentare come unione di due insiemi non vuoti e separati.

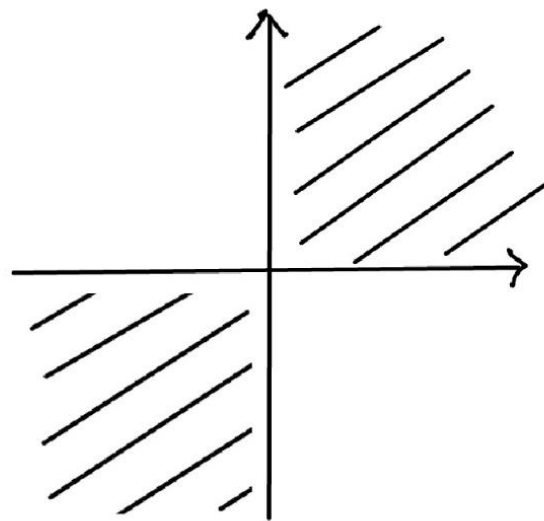


$$E = \{(x, y) \mid xy > 0\}$$

non è connesso

A e B separati

$$A \cup B = E$$



$$E = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$$

è connesso

Def.: Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice RETTA passante per x e y
l'insieme

$$\{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}.$$

Si dice SEGMENTO congiungente x e y , indicato con
 $[x, y]$, l'insieme combinazione lineare convessa di x e y

$$[x, y] = \{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}$$

Si dice SPEZZATA POLIGONALE congiungente x e y l'unione di un numero finito di segmenti del tipo
 $[x, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, y]$ con $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONNESSO PER SEGMENTI (o PER POLIGONALI)
 $\Leftrightarrow \forall x, y \in E \exists$ una spezzata poligonale congiungente
 x e y contenuta in E .

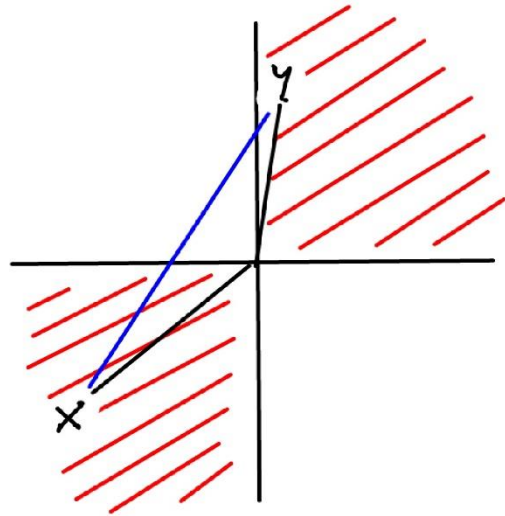
Def.: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è CONVESSO $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, [x, y] \subseteq E$

Si può dimostrare quanto segue

- 1) E convesso $\Rightarrow E$ connesso per segmenti $\Rightarrow E$ connesso
- 2) Se E è aperto, E connesso $\Leftrightarrow E$ connesso per segmenti
- 3) $E \subseteq \mathbb{R}$ convesso $\Leftrightarrow E$ è un intervallo
- 4) $E \subseteq \mathbb{R}$ connesso $\Leftrightarrow E$ è un intervallo

Esempio

$E = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$ è connesso per poligonali, ma non è convesso



Posso unire x e y con una poligonale, passando per $(0,0)$, ma non con un segmento, rimanendo in E .