PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

5 febbraio 2021

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo A
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1.1

Noti i campioni di una realizzazione di un **processo stocastico stazionario a valore atteso nullo** raggruppati nella tabella seguente:

t_i	1	2	3	4	5	6
$y(t_i)$	1.94	-0.575	1.479	0.207	0.371	0.029

si vuole identificare per il processo stocastico in questione un modello di tipo AR(2). Si chiede di:

- determinare i parametri del modello sfruttando i dati a disposizione;
- valutare l'incertezza della stima dei parametri del modello.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

$\mathcal{M}$ AR(2) $y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \eta(t)$

con $\eta(\cdot) \sim WN(0, \sigma^2)$

Uso algoritmo PEM batch

predittore ad 1 passo $\hat{\mathcal{M}}(\theta)$:

$$\hat{y}(t|t-1) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2)$$

Lo posso applicare ai campioni osservati agli istanti $t = 3, 4, 5, 6$, ma non ai primi 2 (per mancanza di osservazioni agli istanti precedenti)

Il funzionale di costo da minimizzare è allora:

$$J(\theta) = \left[\sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \hat{y}(t)\right]^2\right] \cdot \frac{1}{4}$$

NB Il costo è errore quadratico medio!

$$= \sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \varphi(t)^T \theta\right]^2$$

Lo voglio minimizzare, quindi il termine $\frac{1}{4}$ è ininfluente!

con $\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $\qquad \varphi(t) = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix}$

In forma compatta le equazioni normali ai minimi quadrati sono [cfr L12-p6]

$$\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t) = \left[\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, \varphi^T(t)\right] \theta$$

Calcolo la matrice

$$S = \left[\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, \varphi^T(t)\right]$$

$$= \sum_{t=3}^{6} \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$S=\sum_{3\;t}^{6}\begin{bmatrix} y(t-1)\\ y(t-2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2)\end{bmatrix}$$

4

ju indess

$$S=\begin{bmatrix} y(2)\\ y(1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(2) & y(1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y(3)\\ y(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(3) & y(2)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} y(4)\\ y(3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(4) & y(3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y(5)\\ y(4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(5) & y(4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} y^2(2) & y(2)y(1)\\ y(1)y(2) & y^2(1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y^2(3) & y(3)y(2)\\ y(2)y(3) & y^2(2)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} y^2(4) & y(4)y(3)\\ y(3)y(4) & y^2(3)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y^2(5) & y(5)y(4)\\ y(4)y(5) & y^2(4)\end{bmatrix}=$$

$$S=\begin{bmatrix} [y^2(2)+y^2(3)+y^2(4)+y^2(5)] & \begin{bmatrix} y(1)y(2)+y(2)y(3)+\\ +y(3)y(4)+y(4)y(5)\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix} y(1)y(2)+y(2)y(3)+y(3)y(4)+\\ +y(4)y(5)\end{bmatrix} & [y^2(1)+y^2(2)+y^2(3)+y^2(4)]\end{bmatrix}$$

Sostituisco:

$$S(1,1) = \left[y^2(2) + y^2(3) + y^2(4) + y^2(5)\right] =$$

$$= (-0,575)^2 + (1,479)^2 + (0,207)^2 + (0,371)^2 =$$

$$\simeq 2,698556$$

$$S(2,2) = \left[y^2(1) + y^2(2) + y^2(3) + y^2(4)\right] =$$

$$= (1,940)^2 + (-0,575)^2 + (1,479)^2 + (0,207)^2 =$$

$$\simeq 6,324515$$

$$S(1,2) = S(2,1) = \left[y(1)\cdot y(2) + y(2)\cdot y(3) + y(3)\cdot y(4) + y(4)\cdot y(5)\right] =$$

$$= 1,940\cdot(-0,575) + (-0,575)\cdot 1,479 + 1,479\cdot 0,207 + 0,207\cdot 0,371 =$$

$$\simeq -1,582375$$

$S_{1,1} > 0$

$$S \simeq \begin{bmatrix} 2,699 & -1,583 \\ -1,583 & 6,324 \end{bmatrix}$$

$$\det S = 2,699 \cdot 6,324 - 1,583^2 \simeq 14,562 > 0$$

simmetrica e def positiva (ok)

$$S \cong \begin{bmatrix} 2,699 & -1,583 \\ -1,583 & 6,324 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{14,562} \cdot \begin{bmatrix} 6,324 & +1,583 \\ +1,583 & 2,699 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4343 & 0,1087 \\ 0,1087 & 0,1853 \end{bmatrix}$$

La soluzione cercata è allora

$$\hat{\theta} = S^{-1} \cdot \sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t)$$

con

$$\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t) = \varphi(3)\cdot y(3) + \varphi(4)\cdot y(4) + \varphi(5)\cdot y(5) + \varphi(6)\, y(6)$$

$$= \begin{bmatrix} y(2) \\ y(1) \end{bmatrix} \cdot y(3) + \begin{bmatrix} y(3) \\ y(2) \end{bmatrix} \cdot y(4) + \begin{bmatrix} y(4) \\ y(3) \end{bmatrix} y(5) + \begin{bmatrix} y(5) \\ y(4) \end{bmatrix} y(6) \Longrightarrow$$

$$\sum_{t=3}^{6} \varphi(t)\, y(t) = \begin{bmatrix} -0{,}575 \\ +1{,}940 \end{bmatrix} \cdot 1{,}479 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1{,}479 \\ -0{,}575 \end{bmatrix} \cdot 0{,}207 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0{,}207 \\ 1{,}479 \end{bmatrix} \cdot 0{,}371 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}207 \end{bmatrix} \cdot 0{,}029 = \begin{bmatrix} -0{,}4567 \\ 3{,}3049 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4343 & 0{,}1087 \\ 0{,}1087 & 0{,}1853 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}4567 \\ 3{,}3049 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}1609 \\ 0{,}5628 \end{bmatrix}$$

Incertezza della stima

Utilizzo l'espressione in L12-p14

$$var(\hat{\vartheta}_N) \simeq \hat{\lambda}^2 \cdot S(N)^{-1}$$

$S(N)^{-1}$ è già stata determinata

$\hat{\lambda}^2$ è stima della varianza del rumore bianco del modello.

Determino $\hat{\lambda}^2$ così:

$$\hat{\lambda}^2 = J(\hat{\vartheta})$$

NB qui SERVE il termine $\frac{1}{N}$ del funzionale di costo

valuto il minimo del funzionale di costo in corrispondenza del vettore dei parametri $\hat{\vartheta}$

$$J(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{4}\sum_{t=3}^{6} \left[y(t) - \varphi(t)^T \hat{\vartheta}\right]^2 = \hat{\lambda}^2$$

$= 0,5821 \cdot 0,75 = 0,1455$

adesso il termine $\frac{1}{N}$ serve per valutare l'errore quadratico MEDIO

Applicando la formula si ottiene

$$\operatorname{var}(\hat{\theta}) \approx 0,5821 \cdot \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0,4343 & 0,1087 \\ 0,1087 & 0,1853 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0,2528 & 0,0633 \\ 0,0633 & 0,1078 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\approx 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 6,32 & 1,58 \\ 1,58 & 2,70 \end{bmatrix}$$

Domanda 1.2

Di un **processo stocastico stazionario a valore atteso nullo** si hanno a disposizione 221 **campioni** di una realizzazione. Facendo uso di questi campioni, si vuole determinare il migliore modello di tipo AR(n), con n variabile tra 1 e 10.
Applicando l'algoritmo di identificazione di tipo LS batch per identificare modelli di complessità crescente, si ottengono i seguenti valori del minimo del funzionale di costo $J(\hat{\theta}_N)$

AR(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J(\hat{\theta}_N)$	1.1030	1.0974	1.0021	0.9962	0.9618	0.9597	0.9546	0.9482	0.9266	0.9271

SI chiede di:

- valutare gli indici FPE ed MDL sulla base dei dati a disposizione;
- indicare la complessità ottima suggerita da ciascuno dei due indicatori e commentare il risultato ottenuto.

$\boxed{\text{FPE}}$

$$FPE(n) = \frac{N+n}{N-n} J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$$

$N \leftarrow$ n° di dati a disposizione

$n \leftarrow$ indice della complessità del modello e cui corrisponde $J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$

$J(\hat{\theta}_N)^{(n)} \leftarrow$ minimo del funzionale di costo in corrispondenza del vettore di parametri $\hat{\theta}_N$, stimato per il modello di complessità n

$\boxed{MDL}$

$$MDL(n) = (\ln N)\frac{n}{N} + \ln\left[J(\hat{\theta}_N)^{(n)}\right]$$

Come prima:

$N \leftarrow$ n° di dati a disposizione

$n \leftarrow$ indice della complessità del modello e cui corrisponde $J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$

$J(\hat{\theta}_N)^{(n)} \leftarrow$ minimo del funzionale di costo in corrispondenza del vettore di parametri $\hat{\theta}_N$, stimato per il modello di complessità n

---

Nel caso dell'esercizio

$$FPE(n) = \frac{221+n}{221-n} J(n) \qquad n = 1, 2 \dots 10$$

$$MDL(n) = (\ln 221)\frac{n}{221} + \ln\left[J(n)\right] \qquad n = 1, 2 \dots 10$$

dove $J(n) = J(\hat{\theta}_N)^{(n)}$

$$FPE(1) = \frac{221+1}{221-1} \cdot 1{,}1030 =$$

$$FPE(2) = \frac{221+2}{221-2} \cdot 1{,}0974 =$$

$$FPE(3) = \frac{221+3}{221-3} \cdot 1{,}0021 =$$

$$FPE(4) = \frac{221+4}{221-4} \cdot 0{,}9962 =$$

$$FPE(5) = \frac{221+5}{221-5} \cdot 0{,}9618 =$$

$$FPE(6) = \frac{221+6}{221-6} \cdot 0{,}9597 =$$

$$FPE(7) = \frac{221+7}{221-7} \cdot 0{,}9546 =$$

ecc. ...

$$FPE(8) = \frac{221+8}{221-8} \cdot 0{,}9482 =$$

$$FPE(9) = \frac{221+9}{221-9} \cdot 0{,}9266 =$$

$$FPE(10) = \frac{221+10}{221-10} \cdot 0{,}9271 =$$