PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2020/2021

26 febbraio 2021

Nome e Cognome:
gruppo: Gruppo A
esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Soluzione

Domanda 1.1

Si consideri il modello di **regressione lineare**

$$\mathcal{M}_1 : \quad y(t) = a + bt + \epsilon(t)$$

Noti i campioni raggruppati nella tabella seguente:

t_i	1	2	3	4	5
$y(t_i)$	7.9881	6.0534	-5.3018	-6.3354	-12.9157

Si chiede di:

1. determinare la stima ai minimi quadrati dei parametri del modello sfruttando i dati a disposizione;
2. si supponga di voler stimare il parametro a con

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} y(t) \quad \text{N: numero dei campioni}$$

   Analizzare lo stimatore: è stimatore polarizzato oppure non polarizzato? Motivare la risposta.

   - Suggerimento: vale che
$$\sum_{t=1}^{N} t = \frac{N(N+1)}{2}$$

3. Si vuole ora stimare il parametro b, con la stima ai minimi quadrati, facendo uso del modello

$$\mathcal{M}_2 \quad y(t) - \hat{a} = z(t) = bt + \epsilon(t)$$

   Confrontare la stima ottenuta per il parametro b con quella ottenuta al punto 1. Commentare il risultato alla luce dell'analisi svolta al punto 2.

Es 1 Dati i campioni

t	1	2	3	4	5
y	7,9881	6,0534	-5,3018	-6,3354	-12,9157

Gruppo A

si consideri il modello di regressione lineare

$\mathcal{M}_1$ $\qquad y(t) = a + bt + \varepsilon(t)$

con $\varepsilon(\cdot) \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

(a) Determinare la stima ai minimi quadrati dei parametri a, b utilizzando i dati a disposizione.

(b) Si consideri la quantità $S_0 = \sum_{1}^{5} t\, y(t)$

e si supponga di stimare il parametro a con $\qquad \hat{a} = \frac{1}{5} S_0$

(b2) Si vuole stimare il parametro b (col metodo dei minimi quadrati) facendo uso del modello

$$\mathcal{M}_2 \qquad y(t) - \hat{a} = bt + \eta(t)$$

con $\eta(\cdot) \sim WN(0, \sigma_\eta^2)$

Confrontare la stima ottenuta con quella fornita al punto (a). Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione

(a) regressione lineare

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix}}_{\varphi^T(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta} + \varepsilon(t)$$

Scrivo le equazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix}$$

moltiplico a sx entrambi per ϕ →

$$\phi^T \theta = Y$$

$$\phi \phi^T \theta = \phi Y$$

è matrice quadrata + se invertibile →

$$\hat{\theta} = \left(\phi \phi^T\right)^{-1} \phi Y$$

Ninaino:

$$\hat{\Theta} = \left(\Phi \Phi^T\right)^{-1} \Phi Y$$

$$\Phi \Phi^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1^2+1^2+1^2+1^2+1^2 & 1+2+3+4+5 \\ 1+2+3+4+5 & 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5) \\ y(1)+2y(2)+3y(3)+4y(4)+5y(5) \end{bmatrix}$$

eq. normali ai minimi quadrati (L8-P6)

$$\underbrace{\left[\sum_{1}^{N} {}_t\, \varphi(t)\,\varphi^T(t)\right]}_{\Phi\Phi^T} \vartheta = \underbrace{\sum_{1}^{N} {}_t\, \varphi(t)\, y(t)}_{\Phi y}$$

con $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$

$$\Phi\Phi^T = \sum_{1}^{N} {}_t \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{1}^{N} {}_t \begin{bmatrix} 1^2 & 1\cdot t \\ 1\cdot t & t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\sum_1^N {}_t\, 1^2\right) & \left(\sum_1^N {}_t\, t\right) \\ \left(\sum_1^N {}_t\, t\right) & \left(\sum_1^N {}_t\, t^2\right) \end{bmatrix} =$$

$$\phi\phi^T = \left[\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\varphi^T(t)\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\sum_{t=1}^{N} 1^2\right) & \left(\sum_{t=1}^{N} t\right) \\ \left(\sum_{t=1}^{N} t\right) & \left(\sum_{t=1}^{N} t^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{t=1}^{N} 1 = N \qquad \sum_{t=1}^{N} t = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{t=1}^{N} t^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

(cfr. Analisi Matematica I)

Sostituendo i valori si arriva a:

$$\left[\sum_{t=1}^{5} \varphi(t)\,\varphi^T(t)\right] = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} = S$$

$$\left[\sum_{t=1}^{5} \varphi(t)\cdot y(t)\right] = \begin{bmatrix} -10,5014 \\ -85,7206 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$a^{\circ} = 12,3000$

$$\hat{\theta} = S^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -10,5014 \\ -85,7206 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,1646 \\ -5,4216 \end{bmatrix}$$

$b^{\circ} = -4,5600$

risposta a

risposta (b)

$$\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)$$

$$y(t) = a + bt + \varepsilon(t)$$

quindi:

$$\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} a + bt + \varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} a + \frac{1}{N} b \sum_{t=1}^{N} t + \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)$$

$$= a + \frac{b}{N}\underbrace{\sum_{t=1}^{N} t}_{= \frac{N(N+1)}{2}} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)}_{\xrightarrow{N\to+\infty} E[\varepsilon]}$$

$$E[\hat{a}] = a + b\left(\frac{N+1}{2}\right) + \cancel{0}$$

$b\left(\frac{N+1}{2}\right) \to +\infty$!!!

$\neq 0$ BIAS !!

Risposta (c)

$$\hat{a} = \frac{1}{5}\sum_{t=1}^{5} y(t) = -2{,}10028$$

$z(t) = y(t) - \hat{a} =$

10,0984	8,1537	-3,2015	-4,2357	-10,8154
1	2	3	4	5

$$\left[\sum_{t=1}^{5} \varphi(t)\,\varphi^T(t)\right] = \left[\sum_{t=1}^{5} t^2\right] = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = 55$$

$$\left[\sum_{t=1}^{5} \varphi(t)\cdot z(t)\right] = -54,264$$

da cui $\quad \hat{b} = \frac{1}{55}\left(-54,264\right) \simeq -0,985753$

La stima di $\hat{a}$ è polarizzata oppure no?

Suggerimento:

nota che $$\sum_{t=1}^{N} t = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$y(t) = a + bt + \varepsilon(t) \longrightarrow S_0 = \sum_{t=1}^{N} y(t)$$

$$= Na + b\sum_{t=1}^{N} t + \sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{N} S_0 = a + \frac{1}{N} b\left(\sum_{t=1}^{N} t\right) + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \varepsilon(t)}_{}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}}_{}$$

$N \to \infty$

Termine divergente!

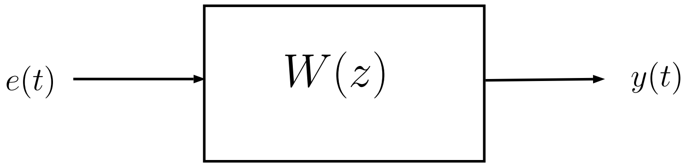
$N \to +\infty$

$E[\varepsilon] = 0$

$\frac{1}{N} S_0$ è stima non consistente (c'è bias divergente al crescere di N!)

Domanda 1.2

Si consideri il processo stocastico stazionario $y(\cdot)$, generato dal sistema



dove

$$W(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \qquad e(\cdot) \sim \mathrm{WN}(0, 1)$$

SI chiede di:

- ricavare il predittore ottimo ad 1 passo di $y(t)$, basato sulle misure $y(t-1)$, $y(t-2)$, ...
- calcolare la varianza dell'errore di predizione associato al predittore determinato al punto precedente;
- facendo ancora riferimento al medesimo processo stocastico, si supponga ora che il rumore bianco $e(\cdot)$ sia **misurabile**. Determinare allora il predittore ottimo ad 1 passo basato sulle misure $e(t-1)$, $e(t-2)$, ... e calcolare la varianza del relativo errore di predizione.

$$W(z) = \frac{1+2z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

c'è uno zero in $z_1 = -2$!

zeri e poli: zeri $z_1 = -2$ poli $p_1 = +\frac{1}{2}$

$z_2 = 0$ $p_2 = -\frac{1}{3}$

NON è in forma canonica a causa di z_1 ($|z_1| > 1$!)

Per determinare il predittore ottimo ad 1 passo è necessario che la FdT sia fattore spettrale canonico (cfr. L10-p17).

Per determinare il fattore spettrale canonico $\hat{W}(z)$ allora utilizzo il filtro passatutto

$$T(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}}$$

e così ottengo:

$$\hat{W}(z) = T(z)\,W(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

che ora è fattore spettrale canonico!

Verifica: $\hat{W}(z) = \dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)} \cdot \dfrac{z^2}{z^2}$ lo riscrivo in potenze positive di z

$$= \frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)} \qquad \frac{N(z)}{D(z)}$$

- $N(z)$, $D(z)$ polinomi di 2° grado (stesso grado) ✓
- coeff. di grado max pari ad 1 (polinomi monici) ✓
- zeri e poli a modulo minore di 1 ✓

$\hat{W}(z)$ è fattore spettrale canonico

Affinché l'uscita di $\hat{W}(z)$ sia un processo stocastico col medesimo spettro del processo stocastico originario $y(\cdot)$ deve accadere che:

$$\Phi_y(z) = W(z)\cdot W(z^{-1})\cdot 1 = \hat{W}(z)\cdot\hat{W}(z^{-1})\cdot \lambda_\eta^2$$

$$\cancel{W(z)}\cdot\cancel{W(z^{-1})} = \cancel{W(z)}\cdot T(z)\cdot\cancel{W(z^{-1})}\cdot T(z^{-1})\cdot\lambda_\eta^2$$

$$T(z)\cdot T(z^{-1})\,\lambda_\eta^2 = 1 \quad \text{Con} \quad T(z) = \frac{z+1/2}{z+2}$$

$$\frac{z+1/2}{z+2}\cdot\underbrace{\frac{z^{-1}+1/2}{z^{-1}+2}}\cdot\lambda_\eta^2 = 1$$

$$\frac{1+z/2}{1+2z} = \frac{\frac{1}{2}(z+2)}{2\,(z+1/2)}$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\cancel{z+1/2}^{\,1}}{\cancel{z+2}_{\,1}}\cdot\frac{\cancel{z+2}^{\,1}}{{}_{1}\cancel{z+1/2}}\cdot\lambda_\eta^2 = 1$$

$$\lambda_\eta^2 = 4$$

Il processo stocastico di $y(\cdot)$ allora è descritto da

$$\eta(t) \longrightarrow \boxed{\hat{W}(z)} \longrightarrow y(t)$$

$$\eta(\cdot) \sim WN(0,4)$$

Trovo il predittore ottimo ad 1 passo alimentato dai dati.

Se scrivo $\hat{W}(z) = \dfrac{C(z)}{A(z)}$

allora il processo di $y(\cdot)$ è: $A(z)y(t) = C(z)\eta(t)$

Il predittore ottimo ad 1 passo lo posso determinare utilizzando l'espressione di [10-p27

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z)-A(z)}{C(z)}\, y(t)$$

cioè:

$$\hat{W}(z) = \frac{\overbrace{1+\frac{1}{2}z^{-1}}^{C(z)}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}_{A(z)}}$$

$$\frac{C(z)-A(z)}{C(z)} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\left[1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}\right]}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{\cancel{1}+\frac{1}{2}z^{-1}-\cancel{1}+\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{2}{3}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

In definitiva:

$$z^{-1}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}z^{-1}\right)y(t)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\, y(t-1)$$

predittore ad 1 passo dedotto

$$\hat{y}(t|t-1) = -\frac{1}{2}\hat{y}(t-1|t-2)+\frac{2}{3}y(t-1)+\frac{1}{6}y(t-2)$$

caso b) rumore misurabile $\rightarrow$ predittore ad 1 passo alimentato dal rumore

considero la descrizione iniziale del processo stocastico, quella in cui compare il rumore bianco $e(t)$

NON il fattore spettrale canonico [perché il fattore spettrale canonico ha in ingresso un rumore bianco diverso, NON equivalente ad $e(\cdot)$:

$$\text{var}\, e(\cdot) = 1 \leftrightarrow \text{var}\, \eta(\cdot) = 4 \quad]$$

Quindi ora il processo è:

$$e(t) \rightarrow \boxed{W(z)} \rightarrow y(t) \qquad W(z) = \frac{1+2z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Se indico così $W(z)$: $W(z) = \dfrac{C(z)}{A(z)}$

allora il predittore ottimo ad 1 passo alimentato dal rumore è (cfr. L10-p25)

$$e(t) \rightarrow \boxed{\hat{W}_1(z)} \rightarrow \hat{y}(t+1|t)$$

$$\hat{W}_1(z) = \frac{z\left[C(z)-A(z)\right]}{A(z)}$$

$$\hat{W}_1(t) = \frac{z\left[C(z)-A(z)\right]}{A(z)} =$$

$$= \frac{z\left[1+2z^{-1}-\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}\right)\right]}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}} =$$

$$= \frac{z\left(\cancel{1}+2z^{-1}-\cancel{1}+\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right)}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}} =$$

$$= \frac{z\left(\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right)}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{\frac{13}{6}+\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$$

predittore ad 1 passo alimentato da rumore

L'equazione alle differenze del predittore alimentato dal rumore è:

$$\hat{y}(t+1|t) = \frac{1}{6}\hat{y}(t|t-1) + \frac{1}{6}\hat{y}(t-1|t-3) + \frac{13}{6}e(t) + \frac{1}{6}e(t-1)$$