

Figure 3: Interazione coulombiana tra particella carica incidente ed elettroni atomici appartenenti a un guscio cilindrico di raggio b , spessore db e altezza dx

che possiamo interpretare come il prodotto della forza coulombiana nel punto di massimo avvicinamento $\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}$ per il tempo caratteristico $(\frac{2b}{v})$ dell'interazione. L'energia cinetica acquistata dall'elettrone sarà allora nell'approssimazione non relativistica ($E_k \ll mc^2$ è garantito dall'ipotesi $v < c$):

$$E_k(b) = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 m v^2} = \frac{2mc^2 r_e^2 z^2}{\beta^2 b^2} \quad (5)$$

essendo $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 mc^2$ il raggio classico dell'elettrone. $E_k(b)$ rappresenta l'energia persa dalla particella incidente per singolo urto con un elettrone a parametro d'impatto b .

Considerazioni

- L'energia trasferita diminuisce all'aumentare di b ,
- Le particelle incidenti perdono meno energia all'aumentare della velocità,
- La dipendenza con l'inverso della massa del bersaglio indica che l'energia persa a causa di urti con i nuclei è trascurabile rispetto a quella persa in urti con gli elettroni.

Se vogliamo ora calcolare l'energia totale persa nel passaggio attraverso uno spessore dx di un materiale con N_0 elettroni per unità di volume, allora l'energia persa (nello spessore dx) a causa dell'interazione con gli elettroni situati a una distanza (parametro d'impatto) compresa tra b e $(b + db)$ sarà pari alla somma di tutti gli $N_0 2\pi b db dx$ contributi di perdita di energia dovuti ad urti con gli elettroni che si trovano nel guscio cilindrico di raggio interno b e raggio esterno $b+db$ (vedi figura 3):

$$-dE(b) = N_0 2\pi b db dx E_k(b)$$

ovvero

$$-\frac{d^2 E(b)}{db dx} = 2\pi N_0 b E_k(b)$$

da cui otteniamo la perdita di energia della particella incidente per unità di cammino integrando dal limite inferiore a quello superiore del parametro d'urto:

$$-\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi N_0 b E_k(b) db = \frac{4\pi N_0 r_e^2 m c^2 z^2}{\beta^2} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (6)$$

Non resta ora che procedere all'integrazione sul parametro d'urto, ma questo richiede una certa attenzione in quanto le ipotesi fatte limitano l'intervallo di parametri

d'urto b a disposizione. Ad esempio collisioni con b molto grandi implicano un lungo intervallo di interazione, contrariamente alle nostre ipotesi per il calcolo dell'impulso trasferito (non potremmo in tal caso considerare l'elettrone fermo a parametro di impatto b) mentre al tendere a zero di b troveremmo un trasferimento di energia infinito. La nostra integrazione, quindi, deve essere fatta entro limiti di b_{min} e b_{max} opportunamente scelti.

b_{max} : Per quanto concerne b_{max} dobbiamo ricordare ora che gli elettroni non sono liberi, ma legati ad atomi con una frequenza orbitale ν . Per il *principio dell'invarianza adiabatica* affinché l'elettrone assorba energia la perturbazione causata dalla particella incidente deve avvenire in un tempo breve rispetto al periodo $T = \frac{1}{\nu}$ dell'elettrone legato (altrimenti non c'è trasferimento di energia). Essendo il tempo di interazione tipico pari a $t \sim \frac{b}{v}$, (relativisticamente $t \sim \frac{b}{\gamma v}$) possiamo assumere $b_{max} \sim \frac{\gamma v}{\bar{\nu}}$, ove $\bar{\nu}$ è la frequenza media dei vari stati legati degli elettroni dell'atomo in questione.

b_{min} : Per quanto concerne b_{min} , bisogna considerare che il parametro d'urto non può essere minore della dimensione dell'elettrone (caratterizzata dalla lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$) così' come visto dalla particella incidente. In tale sistema l'impulso dell'elettrone è $p = \beta\gamma mc$. Dalla condizione $b \geq \lambda$ segue $b_{min} \approx \frac{h}{\beta\gamma mc}$. Si noti che il valore di b_{min} ricavato da Bohr era diverso da questo, essendo basato su considerazioni solamente cinematiche sul massimo impulso trasferibile.

Integrando infine l'equazione 7 otteniamo la cidetta formula di Bohr:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi r_e^2 m c^2 \frac{N_A Z \rho}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln \left(\frac{m c^2 \beta^2 \gamma^2}{h \bar{\nu}} \right) \quad (7)$$

avendo espresso N_0 in funzione della densità ρ , del numero (Z) e della massa atomica (A) e del numero di Avogadro N_A :

$$N_0 = N_A \frac{\rho Z}{A}.$$

Infine, essendo $4\pi m c^2 N_A r_e^2 = 0.3 \frac{MeV}{g} cm^2$, $I = \hbar \bar{\nu}$ il potenziale medio di eccitazione e riscrivendo la formula in funzione dello spessore massico $X = \rho x$

$$-\frac{dE}{dX} = 0.3 \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \ln \left(\frac{\beta^2 \gamma^2 m c^2}{I} \right) \left[\frac{MeV}{g} cm^2 \right] \quad (8)$$

La formula precedente è la cosiddetta formula di Bohr, rivisitata per quanto concerne b_m , è un'ottima approssimazione per particelle pesanti e ci permette di capire come la perdita di energia dipende dalle caratteristiche della particella e del mezzo attraversato, come discuteremo a breve. Tuttavia, un calcolo più accurato che tiene conto degli effetti quantistici è stata formalizzata da Bethe e Bloch nel 1930 nella seguente formula:

$$-\frac{dE}{dX} = 0.3 \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{\beta^2 \gamma^2 m c^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right] \left[\frac{MeV}{g} cm^2 \right] \quad (9)$$

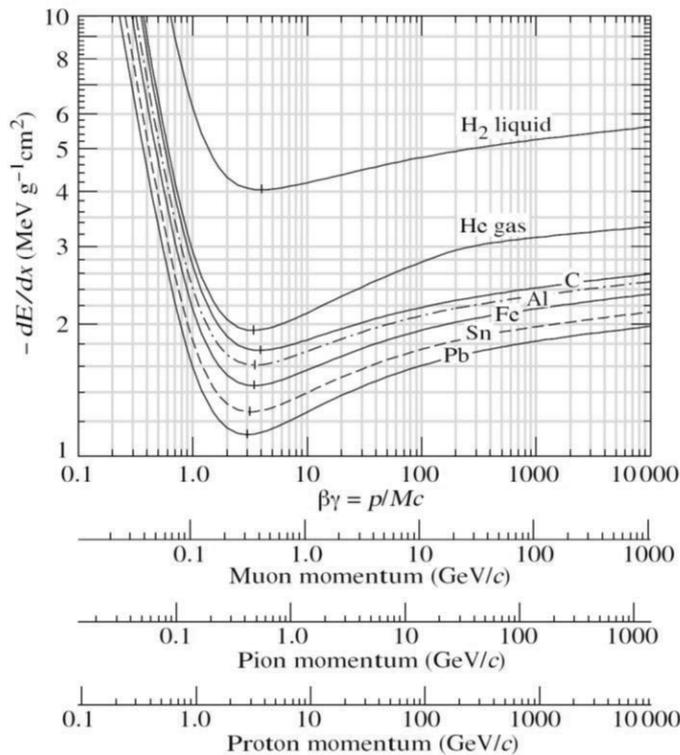


Figure 4: Andamento della perdita di energia per ionizzazione in funzione della variabile $\beta\gamma$ della particella incidente per diversi materiali. In basso sono riportate le scale per i corrispondenti valori dell'impulso relativi a muoni, pioni e protoni

La formula di Bethe e Bloch è valida per particelle più pesanti dell'elettrone e positrone e velocità maggiori di qualche centesimo della velocità della luce. La correzione δ (*correzione di densità*), che non discuteremo nel dettaglio, è dovuta alla polarizzazione del mezzo, dipende dalla densità di quest'ultimo e limita la crescita relativistica fino al punto da poterla, in prima approssimazione, considerare costante. Discuteremo direttamente la formula di Bethe-Bloch invece che quella di Bohr.

2.2.1 Osservazioni

- La perdita di energia per unità di percorso per collisione (nota anche come *potere frenante* ovvero come *stopping power* o *collision energy loss* in inglese) dE/dX è (all'incirca) indipendente dall'assorbitore se espressa in funzione dello spessore massico e se trascuriamo la dipendenza logaritmica contenuta nel termine di potenziale di ionizzazione ($I \approx Z$). Questo perché il termine Z/A è in prima approssimazione approssimabile con $Z/A \approx 1/2$ per tutti gli elementi della tavola periodica (l'idrogeno ne è l'ovvia eccezione).
- La perdita di energia per unità di cammino ha una dipendenza quadratica dalla carica della particella incidente.
- La perdita di energia per unità di cammino *per collisione* non contiene alcuna dipendenza dalla massa, energia o impulso della particella incidente e pertanto la curva di Bethe Bloch è da considerarsi una curva universale, se espressa in

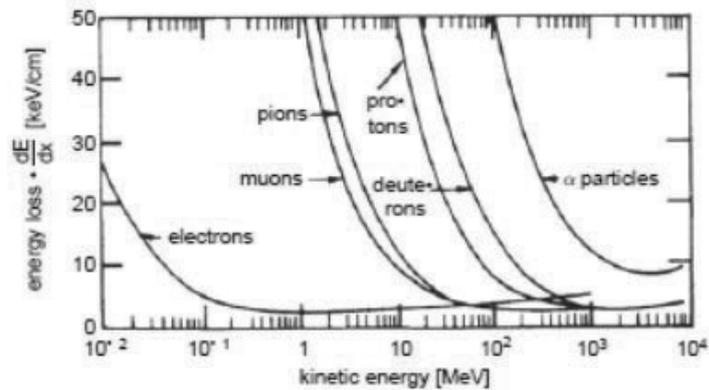


Figure 5: Andamento della perdita di energia per ionizzazione in funzione dell'energia della particella incidente per diverse particelle incidenti

funzione della velocità o di qualsiasi funzione della velocità della particella incidente (ad esempio di $\beta\gamma$). In figura 7 è possibile osservare l'andamento del potere frenante in funzione di $\beta\gamma$ ($= P/Mc$). Si noti

1. come il comportando della curva di B-B sia dominato dalla dipendenza da $1/\beta^2$ per piccoli β ($\beta \ll 1$)
 2. sviluppi un minimo (*minimo di ionizzazione*) per $\beta\gamma \sim 3$ (tale valore dipende debolmente dall'assorbitore, tramite I , così come la perdita di energia al minimo che vale $1 \div 2 \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2$). Le particelle al minimo di ionizzazione sono dette minimo ionizzanti o MIP (dall'inglese, minimum ionizing particles).
 3. presenti una lenta crescita logaritmica ($\sim \ln(\gamma^2)$) nella regione relativistica (*risalita relativistica*) dopo il minimo di ionizzazione. Nella regione relativistica ed ultrarelativistica tale risalita viene in realtà quasi completamente compensata dalla correzione di densità.
- Risulta infine ovvia conseguenza dell'osservazione precedente, che qualora si osservi la dE/dX in funzione dell'impulso (così come da altra variabile dipendente dalla massa) di una particella, la curva relativa a ciascuna particella differirà per un diverso fattore di scala (la massa) e in generale, a parità di impulso, la perdita di energia per unità di cammino sarà diversa per masse diverse (vedasi fig. 5). Questa osservazione sarà la base di una tecnica molto importante e diffusa per la determinazione della massa delle particelle, come discuteremo più avanti (v.par. 4.1).

Sebbene la curva di Bethe-Bloch(9) non si possa usare per la descrizione del comportamento di elettroni e positroni, l'andamento della perdita di energia di tali particelle risulta molto simile.

Si vedano in fig. 6 alcuni esempi (delle prime misure) di rivelazione mediante misura della ionizzazione in camere a nebbia (vedi par. 4.2.1) di particelle con diverso potere frenante (il diverso potere frenante si traduce in tracce più o meno marcate). In fig. 8 è invece mostrata, in funzione dell'impulso, la risposta di un rivelatore a gas a particelle di diverse masse.

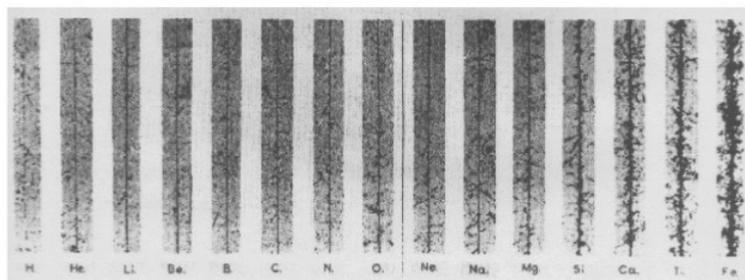
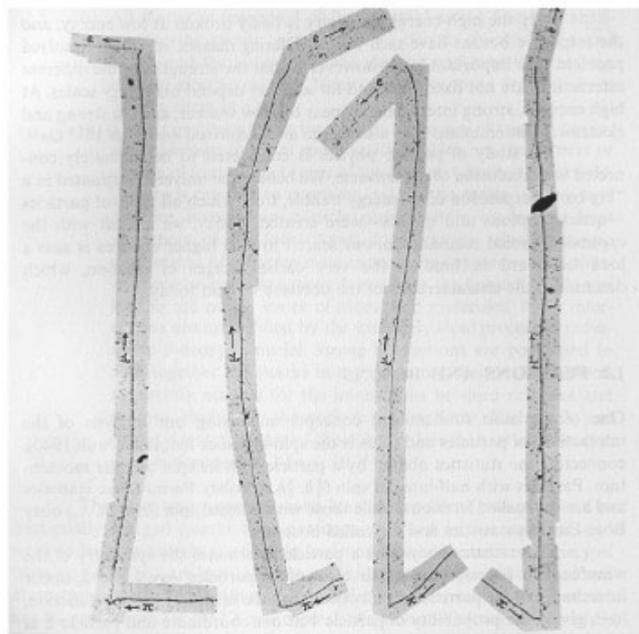
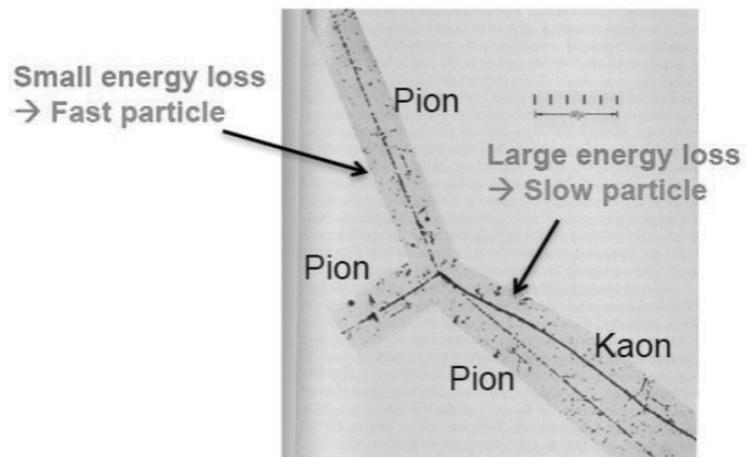


Figure 6: Tracce, raccolte mediante camera a nebbia, di particelle con diverso potere frenante

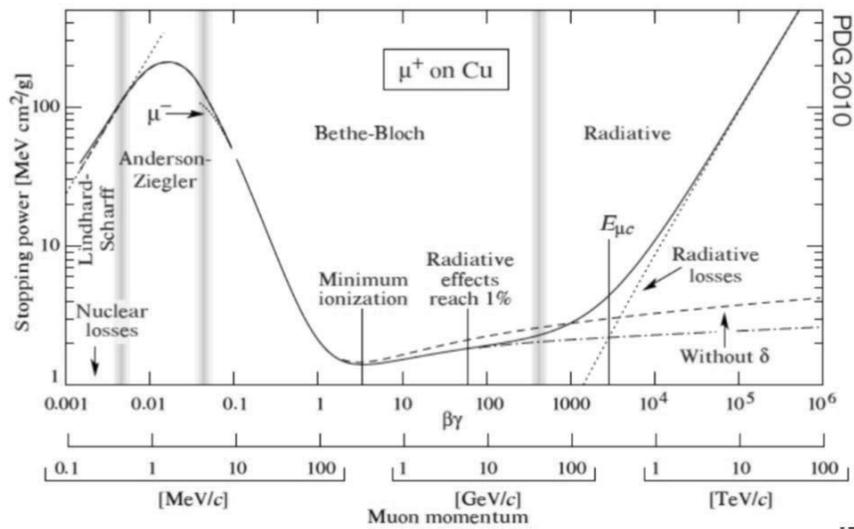


Figure 7: Andamento della perdita di energia per ionizzazione in funzione della variabile $\beta\gamma$ della particella incidente in rame. In basso sono riportate le scale per i corrispondenti valori dell'impulso relativi a muoni

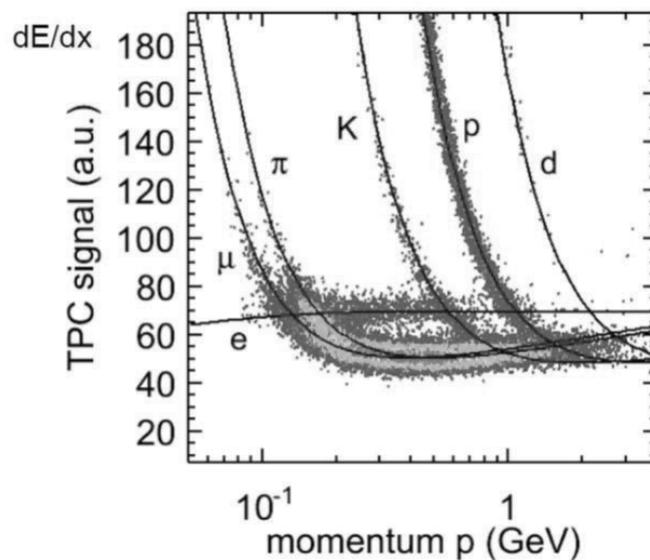


Figure 8: Potere frenante (energia rilasciata per unità di cammino) misurato all'interno di una camera ripiena di gas per particelle di masse diverse al variare dell'impulso misurato