

06.06 Analisi in frequenza con la DTFT e DFT

Per calcolare lo spettro di un segnale a tempo continuo o a tempo discreto abbiamo bisogno di tutti i campioni del segnale da $-\infty$ a $+\infty$. In realtà, siamo in grado di osservarlo solo su di una “finestra” temporale di durata finita. Se il segnale è un segnale analogico, lo filtreremo dapprima con un filtro anti-aliasing e lo andremo quindi a campionare con una frequenza di campionamento $F_s \geq 2B$, dove B è la larghezza di banda del segnale. Dopodiché limiteremo la durata del segnale a soli L campioni (ovvero a una finestra di TL secondi, con T il periodo di campionamento e $T = 1/F_s$).

L'intervallo di durata finita pone un limite alla *risoluzione in frequenza*, ovvero limita la nostra capacità di distinguere due frequenze con separazione inferiore a $\frac{1}{LT}$.

Indichiamo con $\{x(n)\}$ la sequenza da analizzare. Limitare la durata della sequenza a soli L campioni, ovvero all'intervallo $0 \leq n \leq L - 1$ equivale a moltiplicare campione per campione $\{x(n)\}$ con una funzione finestra rettangolare $w(n)$ di lunghezza L :

$$\hat{x}(n) = x(n) \cdot w(n)$$

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In questo modo lo spettro del segnale da analizzare, $\hat{X}(e^{j\omega})$ è dato da

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Dimostriamo l'ultima relazione. Sappiamo che

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$$

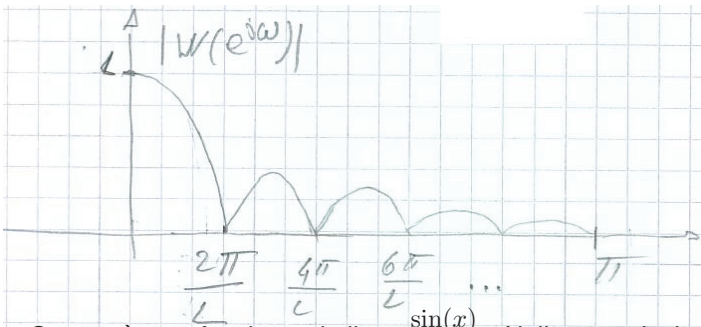
$$\begin{aligned} \text{DTFT}[x(n)w(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) e^{-j(\omega-\theta)n} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

L'ultimo integrale viene anche chiamato *integrale di convoluzione*.

Lo spettro della finestra rettangolare $W(e^{j\omega})$ è

$$\text{DTFT}[w(n)] = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = \left/ \cdot \frac{e^{j\omega \frac{L}{2}} e^{-j\omega \frac{L}{2}}}{e^{j\omega \frac{L}{2}} e^{-j\omega \frac{L}{2}}} \right. \\
 &= \frac{e^{j\omega \frac{L}{2}} - e^{-j\omega \frac{L}{2}}}{e^{j\omega \frac{L}{2}} - e^{-j\omega \frac{L}{2}}} \cdot e^{-j\omega \frac{L-1}{2}} = \\
 &= \frac{j \sin\left(\omega \frac{L}{2}\right)}{j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j\omega \frac{L-1}{2}}
 \end{aligned}$$



Questa è una funzione simile a $\frac{\sin(x)}{x}$. Nella convoluzione con $X(e^{j\omega})$, ha l'effetto di "spalmare" lo spettro di $x(n)$ su tutte le frequenze. Questo fenomeno viene detto *leakage*.

Consideriamo ad esempio:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} [e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n}] .$$

Per la proprietà dello slittamento in frequenza:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [W(e^{j(\omega+\omega_0)}) + W(e^{j(\omega-\omega_0)})]$$

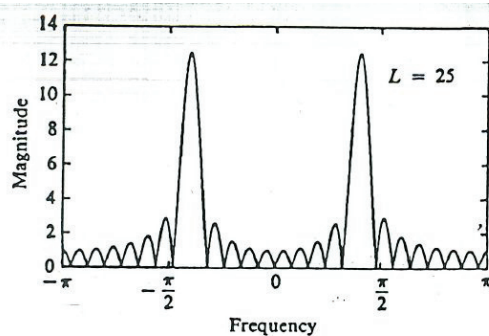


Figure 5.12 Magnitude spectrum for $L = 25$ and $n = 2048$, illustrating the occurrence of leakage.

Vediamo che lo spettro, invece di essere costituito da una linea (un impulso di Dirac in $\pm\omega_0$), è dato da un lobo la cui larghezza dipende dal numero di campioni L che osserviamo. In generale, maggiore è L e migliore è la risoluzione spettrale. Infatti, consideriamo

$$x(n) = \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

con $\omega_1 \simeq \omega_2$,

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [W(e^{j(\omega+\omega_1)}) + W(e^{j(\omega+\omega_2)}) + W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + W(e^{j(\omega-\omega_2)})]$$

Solo quando $|\omega_1 - \omega_2| \geq \frac{2\pi}{L}$ (metà della larghezza del lobo) diviene possibile distinguere due lobi separati.

Esempio:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(\omega_1 n) + \cos(\omega_2 n)$$

con $\omega_0 = 0.2\pi$, $\omega_1 = 0.22\pi$, e $\omega_2 = 0.6\pi$

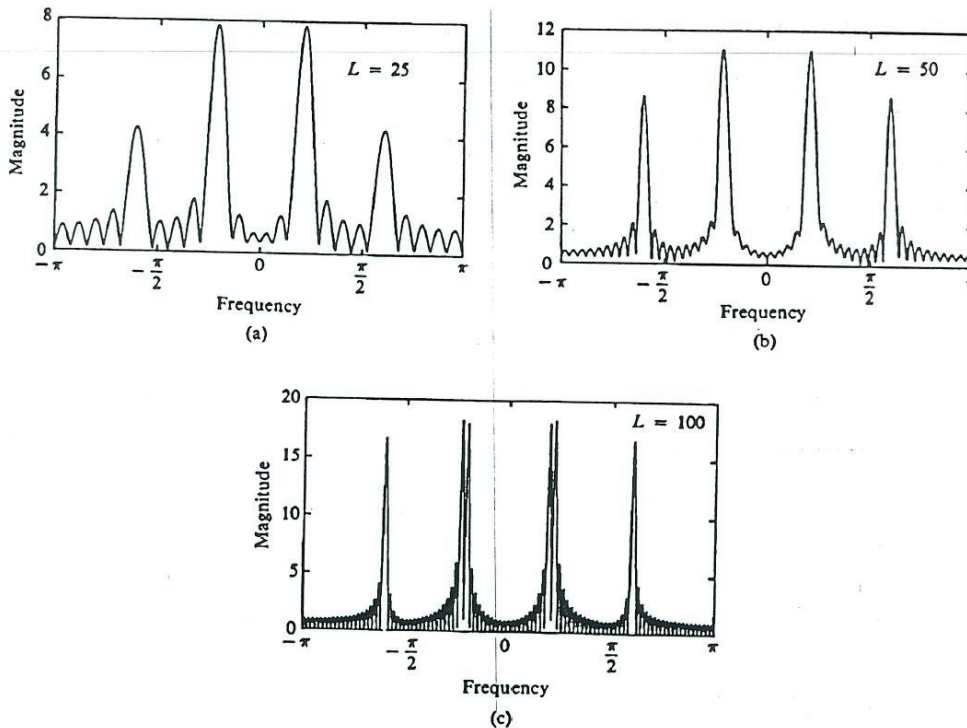


Figure 5.13 Magnitude spectrum for the signal given by (5.4.8), as observed through a rectangular window.

Aumentando la larghezza della finestra di osservazione, ovvero L , possiamo ridurre la larghezza del lobo principale $W(e^{j\omega})$ ma i lobi secondari non vengono attenuati, ovvero permane l'effetto del leakage. Per ridurre questi lobi secondari e conseguentemente il leakage possiamo utilizzare una opportuna funzione finestra $w(n)$.

Per esempio, molto utilizzate sono le finestre di *Hanning* (a coseno rialzato):

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) \right] & \text{per } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

o ancora di *Hamming*:

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) & \text{per } 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per queste funzioni finestra i lobi secondari sono molto più attenuati della finestra rettangolare. La riduzione dei lobi secondari però viene ottenuta a spese di un allargamento del lobo principale e quindi a spese di una perdita di risoluzione (che però può essere compensata aumentando L). Siccome

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

se lo spettro di $w(n)$ è stretto rispetto allo spettro di $x(n)$, la funzione finestra ha solo un piccolo effetto passa-basso (un effetto di smoothing, smussamento) sullo spettro di $X(e^{j\omega})$. Al contrario, se $w(n)$ ha un lobo largo (come nel caso di L piccolo) lo spettro di $w(n)$ verrà a mascherare i dettagli dello spettro $X(e^{j\omega})$.

Tipicamente lo spettro viene valutato ricorrendo all DFT, che per sequenze di durata finita L coincide con il campionamento della DTFT su L punti equidistanti nell'intervallo $[0, 2\pi]$,

$$\text{DFT}[\hat{x}(n)] = \hat{x}(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{L}k}$$

Prolungando $\hat{x}(n)$ con $N - L$ zeri (ovvero calcolando la DFT su N), siamo in grado di aumentare a piacere la risoluzione con cui stimiamo $\hat{X}(e^{j\omega})$. Si noti però che la DFT è il campionamento della $\hat{X}(e^{j\omega})$ e che all'aumentare di N noi non otteniamo una migliore risoluzione nella stima di $X(e^{j\omega})$. La risoluzione con cui si stima $X(e^{j\omega})$ dipende unicamente dalla lunghezza della finestra di osservazione L .

Funzioni finestra usate nella pratica e il loro spettro

TABLE 8.1 WINDOW FUNCTIONS FOR FIR FILTER DESIGN

Name of window	Time-domain sequence, $h(n), 0 \leq n \leq M - 1$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$
Blackman	$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$
Kaiser	$\frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \left(\frac{M-1}{2} \right) \right]}$
Lanczos	$\left\{ \frac{\sin \left[2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / (M-1) \right]}{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right\}^L \quad L > 0$
Tukey	$\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{n - (1+a)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right]$ $\alpha(M-1)/2 \leq \left n - \frac{M-1}{2} \right \leq \frac{M-1}{2}$

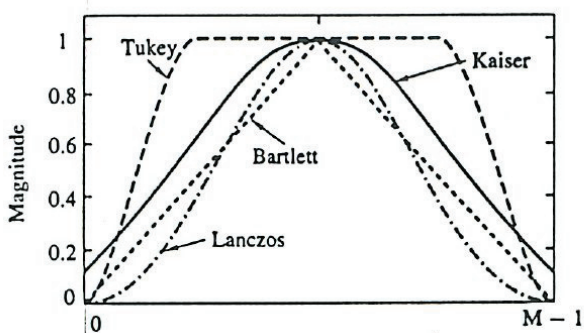
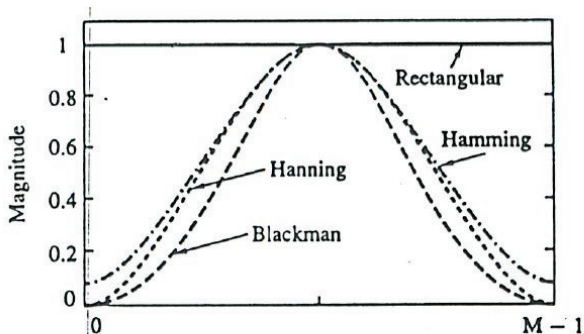


Figure 8.5 Shapes of several window functions.

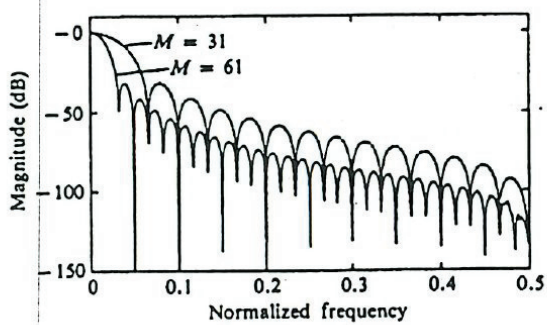


Figure 8.6 Frequency responses of Hanning window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

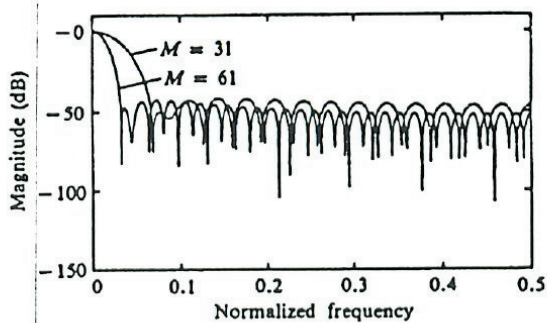


Figure 8.7 Frequency responses for Hamming window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

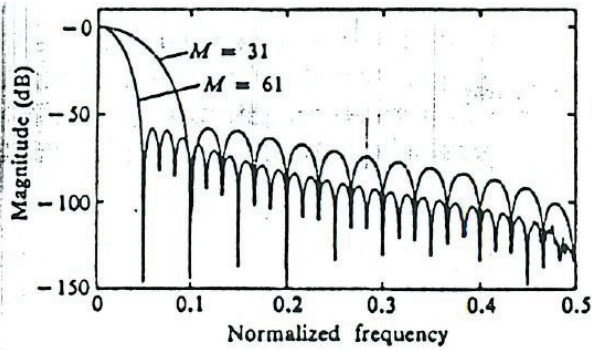


Figure 8.8 Frequency responses for Blackman window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

TABLE 8.2 IMPORTANT FREQUENCY-DOMAIN CHARACTERISTICS OF SOME WINDOW FUNCTIONS

Type of window	Approximate transition width of main lobe	Peak sidelobe (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	-13
Bartlett	$8\pi/M$	-27
Hanning	$8\pi/M$	-32
Hamming	$8\pi/M$	-43
Blackman	$12\pi/M$	-58