Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SERIE NUMERICHE

Parte 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

SERIE NUMERICHE

<u>Def.:</u> Sia $(a_n)_n$ successione in $\mathbb{R}$ e sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

La successione $(S_n)_n$ è detta SERIE DI TERMINI a_n

S_n è la SOMMA PARZIALE (o RIDOTTA) N-SIMA DELLA SERIE

La serie è $\begin{cases} \text{CONVERGENTE} \\ \text{DIVERGENTE} \\ \text{INDETERMINATA (o IRREGOLARE)} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ lo è la successione $(S_n)_n$

CARATTERE DELLA SERIE

$\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$ (se esiste) è detto SOMMA DELLA SERIE

<u>Notazione</u>: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum a_n$ indicano la serie ma anche il suo limite (cioè si indica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$)

<u>NB</u>: Talvolta non si parte da indice zero. Si può quindi avere: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $(s_n)_{n\geq n_0}$

Esempi

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} n$ $\qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \lim_{n \to +\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n = +\infty$ DIVERGE

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ $\qquad S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} s_n \Rightarrow$ la serie è indeterminata

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} 0$ $\qquad s_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ la serie converge a 0.

Def.: Si scrive talvolta, per un certo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s_n + R_n$$ con R_n RESTO n-simo della serie

Se la serie converge, R_n è ben definito e si ha

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - s_n \,,$$ da cui

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} s_n}_{= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n} = 0,$$ cioè il resto n-simo $\to 0$.

SERIE GEOMETRICA

Sia $q \neq 1$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. $(s_n)_n$ è la SERIE GEOMETRICA

Si ha: $q s_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k$

$\Rightarrow (1-q) s_n = s_n - q s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$

$$\Rightarrow s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Se $q=1$ si ha ovviamente $s_n = n+1$

Studiamo la convergenza per casi.

a) $q=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

b) $q=-1 \Rightarrow S_{2n}=1,\ S_{2n+1}=0 \Rightarrow$ la serie è indeterminata

$q^{n+1} \longrightarrow 0$

c) $|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$

$q^{n+1} \longrightarrow +\infty$

d) $q>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = +\infty$

<0

$q^{2n+1} \longrightarrow -\infty$

$q^{2n} \longrightarrow +\infty \Rightarrow q^{n+1} \to \infty$

e) $q<-1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{CONVERGE A } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ \text{DIVERGE SE } |q|>1 \text{ o } q=1 & \\ \text{È INDETERMINATA} & \text{se } q=-1 \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (criterio di Cauchy per serie)

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n,m \geq \bar{n}\ \ |s_n - s_m| < \varepsilon$,

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n,m \geq \bar{n},\ n>m\ \ |a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_n| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ (posto $m+1=p$, $n=p+q$ con $q\geq 0$) si ha

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall p \geq \bar{n}, \forall q \geq 0$ si ha $\left|\sum_{n=p}^{p+q} a_n\right| < \varepsilon$

(o equivalentemente $\left|\sum_{n=0}^{q} a_{p+n}\right| < \varepsilon$)

Serie di Mengoli: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Si ha $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

per $n \to +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SERIE NUMERICHE

Parte 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Serie di Mengoli: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Si ha $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \text{ per } n \to +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

<u>Def.</u>: Si dicono TELESCOPICHE le serie che si possono rappresentare nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$$

Per queste serie si ha $S_n = a_0 - a_{n+1}$

$\Rightarrow (S_n)_n$ si comporta come $(a_n)_n$

Se $(a_n)_n$ converge, allora la somma della serie sarà $a_0 - \lim_{n \to +\infty} a_n$.

Esempio (dalla prova scritta del 7/12/2020)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$\frac{\alpha}{3n+1} + \frac{\beta}{3n-2} = \frac{3\alpha n - 2\alpha + 3\beta n + \beta}{(3n+1)(3n-2)} \doteq \frac{3(\alpha+\beta)n + \beta - 2\alpha}{(3n+1)(3n-2)} =$$

$$= \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} \iff \begin{cases} 3(\alpha+\beta) = 0 \\ \beta - 2\alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 3\beta = 1 \end{cases}$$

$$\iff \alpha = -\frac{1}{3}, \ \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \cancel{\frac{1}{3n-2}} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}$$

Serie armonica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Si ha $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

con $k \leq 2n \ \forall k = n+1, \dots, 2n$, dunque $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \ \forall k = n+1, \dots, 2n$

$$\Rightarrow s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il criterio di Cauchy non è rispettato

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge (anzi, diverge, come si vedrà dopo)

Proposizione

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dim: $a_n = S_n - S_{n-1}$ con $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Oppure, alternativamente, usando il criterio di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall p \geq \bar{n}, \forall q \geq 0 \quad \left| \sum_{n=p}^{p+q} a_n \right| < \varepsilon.$

Posto $q = 0$, si ha $\left| \sum_{n=p}^{p} a_n \right| = |a_p| < \varepsilon \ \forall p \geq \bar{n} \Rightarrow a_p \to 0$ per $p \to +\infty$

$\square$

NB: la Proposizione non è invertibile!

Controesempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge, ma $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

La condizione è solo NECESSARIA!

Si può usare per provare che una serie NON converge

<u>Esempio:</u> $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ non converge per $|q| \geq 1$ perché

$\lim_{n\to+\infty} q^n \neq 0$.

Osservazione

Come per le successioni, il carattere di una serie non cambia se si tolgono o si aggiungono un numero finito di termini. In caso di convergenza però la somma può cambiare.

Serie a termini non negativi

Teorema

Una serie a termini non negativi o converge o diverge a $+\infty$

Dim: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \Rightarrow (s_n)_n$ è successione crescente

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \sup\{s_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \begin{cases} \ell\in\mathbb{R} & \text{se } (s_n)_n \text{ è limitata} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\square$

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge, $\frac{1}{n} \geq 0 \ \forall n\geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$

Teorema (criterio del confronto per serie)

Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ serie tali che $0 \le a_n \le b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ a) $\sum_n b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente

b) $\sum_n a_n$ divergente $\Rightarrow \sum_n b_n$ divergente

Dim: a) $\sum_n b_n$ convergente $\Rightarrow t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \to \sup_{n\in\mathbb{N}}\{t_n\} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n} b_k = t_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{t_n\} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow s_n$ è limitata superiormente $\Rightarrow s_n$ converge.

b) $\sum_n b_n$ è a termini $\ge 0 \Rightarrow$ o converge o diverge.

Se per assurdo $\sum_n b_n$ converge, $\sum_n a_n$ converge per a). Quindi $\sum_n b_n$ diverge

NB: il criterio del confronto può essere applicato anche a serie che siano a termini DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI e con $a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE. Ciò vale in generale anche per altri criteri.

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 1$ diverge

Infatti, se $\alpha = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (già visto).

Se $\alpha < 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per il criterio del confronto.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$ converge

Se $\alpha = 2$ $\quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ $\forall n \geq 2$ e si ha

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{(serie di Mengoli)}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per il criterio del confronto

Se $\alpha > 2$ si ha $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per il criterio del confronto.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SERIE NUMERICHE

Parte 3

$$\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b}{n^2 - b^2} = \sum_{n=1}^{2b} \frac{1}{2n}$$

Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ serie a termini positivi ($a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n$)

tali che $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty]$. Allora

1) $\ell \in]0, +\infty[\Rightarrow$ le 2 serie hanno lo stesso comportamento

2) $\ell = 0 \Rightarrow$ se $\sum_n b_n$ converge, allora $\sum_n a_n$ converge

3) $\ell = +\infty \Rightarrow$ se $\sum_n b_n$ diverge, allora $\sum_n a_n$ diverge

Dim: 1) Sia $\varepsilon > 0 : \ell - \varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[$,

$\exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$.

$$\Rightarrow (\ell - \varepsilon) b_n < a_n < b_n (\ell + \varepsilon) \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n' (\ell + \varepsilon) b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n' a_n$ converge (crit. confronto)

$\sum_n' b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n' (\ell - \varepsilon) b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n' a_n$ diverge (crit. confronto)

NB: $\ell - \varepsilon > 0$ serve a garantire che $\sum_n (\ell - \varepsilon) b_n$ sia a termini positivi.

2) Sia $\varepsilon > 0$. Come prima si ha che $\exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon b_n < a_n < \varepsilon b_n \quad \forall n \geq \overline{n}$$

$\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n \varepsilon b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge (crit. confronto)

3) Sia $k > 0$. Allora $\exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}$ $\frac{a_n}{b_n} > k$, cioè

$$a_n > b_n k$$

$\sum_n b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n k b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge (crit. confronto)

$\square$

Criterio della radice

Sia $\sum_n a_n$ a termini non negativi.

a) Se $\exists\, \ell \in [0,1[\,:\, \sqrt[n]{a_n} \leq \ell$ definitivamente, $\sum_n a_n$ converge

b) Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti termini, $\sum_n a_n$ diverge

Dim: a) Risulta $a_n \leq \ell^n$ definitivamente, con $\sum_n \ell^n$ serie geometrica convergente ($|\ell|<1$) $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge per il criterio del confronto

b) Risulta $a_n \geq 1$ per infiniti termini $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$
$\Rightarrow \sum_n a_n$ non converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge ($\sum_n a_n$ a termini ≥ 0). $\square$

Corollario

Sia $\sum_n a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n$, con $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Se $\ell < 1$ la serie converge, se $\ell > 1$ la serie diverge.

Dim: Se $0 \leq \ell < 1$, consideriamo $\varepsilon > 0 : \ \ell + \varepsilon < 1$.

Allora sarà definitivamente $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon < 1$

$\Rightarrow$ per il criterio della radice $\sum_n a_n$ converge

Se $\ell > 1$, preso $\varepsilon > 0 : \ \ell - \varepsilon > 1$, si ha definitivamente, quindi per infiniti termini, $1 < \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge per il criterio della radice. $\square$

Criterio del rapporto

Sia $\sum_n a_n$ a termini positivi ($a_n > 0$).

a) Se $\exists\, l \in \,]0,1[$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l$ definitivamente, allora $\sum_n a_n$ converge.

b) Se $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente, la serie diverge.

Dim: a) Si ha che $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l$.

Per semplificare la notazione, assumiamo $\bar{n} = 0$ (nulla cambia per il carattere della serie, perché "rinunciamo" a un numero finito di termini)

Abbiamo quindi $a_{n+1} \leq \ell a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow a_n \leq \ell a_{n-1} \leq \ell^2 a_{n-2} \leq \ell^3 a_{n-3} \leq \dots \leq \ell^n a_0$$

$\ell \in]0,1[\Rightarrow \sum_n \ell^n$ serie geometrica convergente

$\Rightarrow \sum_n a_0 \ell^n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge (crit. del confronto)

b) Sia $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$ e come prima assumiamo $\bar{n} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \geq (n+1) a_0 > 0 \quad \text{con} \quad \lim_{n \to +\infty} (n+1) a_0 = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = +\infty \Rightarrow \text{la serie diverge.} \qquad \square$$

Corollario

Sia $\sum_n a_n$ a termini positivi ($a_n > 0 \ \forall n$) e sia

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

Se $\ell < 1$ la serie converge, se $\ell > 1$ la serie diverge.

Dim: Se $\ell < 1$, allora, preso $\varepsilon > 0$: $\ell + \varepsilon < 1$, si avrà definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \varepsilon < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge per il criterio del rapporto.

Se $\ell > 1$, allora, preso $\varepsilon > 0$: $\ell - \varepsilon > 1$, si avrà definitivamente

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ definitivamente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge per il criterio del rapporto $\square$

Criterio di condensazione

Sia $(a_n)_n$ successione a termini non negativi e decrescente
$(a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0 \ \forall n)$

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge} \iff \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Esempio: Serie armonica generalizzata

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \leq 1$

I casi $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 2$ sono già stati visti.

Applichiamo il criterio di condensazione

$\sum_n \frac{2^n}{2^{\alpha n}} = \sum_n \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$ serie geometrica → CONVERGE PER $2^{1-\alpha} < 1$; DIVERGE PER $2^{1-\alpha} \geq 1$

$2^{(1-\alpha)} < 1 \iff 1-\alpha < 0 \iff \alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$

$2^{1-\alpha} \geq 1 \iff 1-\alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \leq 1$

Operazioni sulle serie

1) $\sum_n a_n$ converge, $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \underbrace{\sum_n (a_n+b_n)}_{\text{converge}} = \sum_n a_n + \sum_n b_n$

2) $\sum_n a_n$ converge, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_n c a_n = c \sum_n a_n$ converge

Questi risultati si possono generalizzare a serie divergenti.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SERIE NUMERICHE

Parte 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Osservazione

Ogni serie è una successione e ogni successione è una serie

$(s_n)_n \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \Rightarrow$ ogni serie è una successione

Data invece una successione $(b_n)_n$, si ponga

$a_0 = b_0, \ a_n = b_n - b_{n-1} \ \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \cancel{b_0} + \cancel{b_1} - \cancel{b_0} + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + \dots b_n - \cancel{b_{n-1}} = b_n \ \forall n$$

$\Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \Rightarrow$ la successione $(b_n)_n$ è una serie.

__Esercizi__: Studiare la convergenza delle seguenti serie

1) $\sum \frac{n!}{n^n}$ CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{(\cancel{n+1})!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{n+1}}{(n+1)^{\cancel{n+1}\,n}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

2) $\sum n^{\alpha} b^{n} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ b \in]0,1[$ CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{(n+1)^{\alpha} b^{n+1}}{n^{\alpha} b^{n}} = b\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} = b\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} b<1$$

$\Rightarrow$ la serie converge

3) $\sum \frac{x^n}{n!}$ $x>0$ CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ La serie converge

NB: $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge ma non soddisfa le condizioni del criterio del rapporto

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

4) $\displaystyle\sum_n \left(\frac{3^n}{4^n-1}\right)$ CRITERIO DELLA RADICE

$$\left(\frac{3^n}{4^n-1}\right)^{1/n} = \left(\frac{3^n}{4^n}\,\frac{4^n}{4^n-1}\right)^{1/n} = \frac{3}{4}\left(\frac{4^n}{4^n-1}\right)^{1/n} \longrightarrow \frac{3}{4} \text{ per } n\to+$$

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4^n}{4^n-1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\left[\left(\frac{4^n}{4^n-1}\right)^{1/n}\right]} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{4^n}{4^n-1}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\underbrace{\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4^n}}\right)}_{0}} = e^0 = 1$$

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n}^{-\frac{1}{2}}$

CRITERIO DEL RAPPORTO: NON SI CONCLUDE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n+1+k}{n+1}^{-\frac{1}{2}}}{\binom{n+k}{n}^{-\frac{1}{2}}} = \dots = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+1+k}\right)^{1/2} = 1$$

$$a_n = \sqrt{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}} = \sqrt{\frac{k!}{(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot n+1}} \leq$$

SUPPONIAMO $k \geq 3$

$$\leq \sqrt{\frac{k!}{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)}} \leq \sqrt{\frac{k!}{n^3}} = \frac{\sqrt{k!}}{n^{3/2}}$$

con $k \geq 3$

$\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$)

$\Rightarrow \sum_n \frac{\sqrt{k!}}{n^{3/2}}$ converge $\Rightarrow$ la serie converge per confronto (non asintotico)

Se $k < 3$ la serie diverge per confronto con la serie armonica

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{n^3+4}\right)$

La serie è a termini non negativi?

Poiché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^3+4} = 0$ e $\dfrac{n+2}{n^3+4} \geq 0$, $\dfrac{n+2}{n^3+4} \in [0, \pi]$ definitivamente

$\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+2}{n^3+4}\right) \geq 0$ definitivamente

Confrontiamo asintoticamente con $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3+4}$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{n^3+4}\right)}{\frac{n+2}{n^3+4}} = 1$ $\Rightarrow$ le due serie hanno lo stesso comportamento

Studio $\sum \frac{n+2}{n^3+4}$ confrontandola asintoticamente con $\sum_n \frac{1}{n^2}$, che converge

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{n^3+4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n}{n^3+4} = 1$$

$\Rightarrow \sum_n \frac{n+2}{n^3+4}$ converge e così pure $\sum_n \operatorname{sen}\left(\frac{n+2}{n^3+4}\right)$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+4}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+4}\right) = 1 \Rightarrow$ la serie non converge.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+4} = 0 \Rightarrow$ def. $\frac{n+2}{n^2+4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ serie a termini $\geq 0 \Rightarrow$ diverge.

8) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-10n}{n^4+1}$$

$n^4+1>0$ e $n^2-10n = n(n-10) \geq 0$ per $n \geq 10$

$\Rightarrow$ la serie è definitivamente a termini non negativi

$$\frac{n^2-10n}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^4-10n^3 \leq n^4+1 \quad \Leftrightarrow -10n^3 \leq 1 \text{ VERA}$$

$\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-10n}{n^4+1}$ converge per confronto.

Alternativamente, con il criterio del confronto asintotico

$$\frac{n^2 - 10n}{n^4+1} \, n^2 = \frac{n^4 - 10n^3}{n^4+1} \longrightarrow 1$$

$$\sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge} \Rightarrow \sum_n \frac{n^2-10n}{n^4+1} \text{ converge}$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SERIE NUMERICHE

Parte 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

Def.: Una serie $\sum_{n}^{1} a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

$\Longleftrightarrow$ $\sum_{n}^{1} |a_n|$ converge

Teorema

$\sum_{n}^{1} a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow$ $\sum_{n}^{1} a_n$ converge

Dim.: Sia $b_n = |a_n| - a_n$. Si ha

$$0 \leq b_n = |a_n| - a_n \leq |a_n| + |a_n| = 2|a_n|$$

$\sum_{n}^{1} |a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n}^{1} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n}^{1} -b_n$ converge

$b_n = |a_n| - a_n \Rightarrow a_n = |a_n| - b_n$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge perche somma di due serie convergenti

Una dimostrazione alternativa, basata sul criterio di Cauchy è la seguente.

$\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ si ha, per la diseguaglianza triangolare

$$\left|\sum_{k=p}^{p+q} a_k\right| \leq \sum_{k=p}^{p+q} |a_k| = \left|\sum_{k=p}^{p+q} |a_k|\right|$$

CRITERIO DI CAUCHY PER $\sum_n |a_n|$

$\sum_n |a_n|$ convergente $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall p \geq \bar{n},\ \forall q \geq 0$ si ha $\left|\sum_{k=p}^{p+q} |a_k|\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall p \geq \bar{n},\ \forall q \geq 0$ si ha $\left|\sum_{k=p}^{p+q} a_k\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ vale il criterio di Cauchy per $\sum_n a_n \Rightarrow \sum_n a_n$ converge $\square$

NB: il teorema non è invertibile!

Controesempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente (lo si vedrà dopo...) ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

Il precedente teorema può essere però molto utile per dimostrare che una serie a termini non necessariamente non negativi converge se si riesce a dimostrare che la corrispondente serie dei valori assoluti (a termini dunque non negativi) converge.

Teorema (Criterio di Leibniz)

Sia $\sum_n (-1)^n a_n$ con $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tale che

a) $(a_n)_n$ è decrescente

b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Allora $\sum_n (-1)^n a_n$ converge. Inoltre le somme parziali di indice pari approssimano la serie per eccesso, quelle di indice dispari per difetto

Si ha inoltre $|R_n| \leq a_{n+1}$ $\left(R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right)$

Nelle ipotesi del Criterio di Leibniz si ha quindi $\forall n$

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k = S_{2n-1} \le \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \le \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = S_{2n}$$

Inoltre

$$|R_n| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k - S_n\right| \le a_{n+1}$$

sum(-1)^n/n! - Wolfram|Alpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum(-1)^n%2Fn!

WolframAlpha PRO FOR EDUCATORS

sum(-1)^n/n!

Extended Keyboard Upload Examples Random

Input interpretation:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!}$$

$n!$ is the factorial function

Infinite sum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Enlarge Data Customize Plain Text

Decimal approximation:

0.36787944117144232159552377016146086744581113103176783450 7...

Convergence tests:

By the ratio test, the series converges.

Partial sum formula:

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{!m}{m!}$$

$!n$ is the subfactorial function

Partial sums: More terms Show points

11:53 AM 3/25/2020

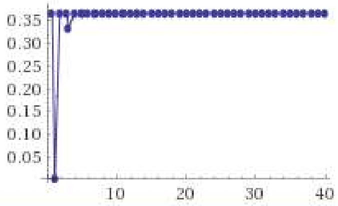
sum(-1)^n/n! values - Wolfram

https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum(-1)^n%2Fn!+values

Cerca

Partial sums:

Fewer terms | More terms | Hide points



Partial sum values

(0, 1)
(1, 0)
(2, 0.5)
(3, 0.333333)
(4, 0.375)
(5, 0.366667)
(6, 0.368056)
(7, 0.367857)
(8, 0.367882)
(9, 0.367879)
(10, 0.367879)
(11, 0.367879)
⋮
(39, 0.367879)
(40, 0.367879)

Enlarge | Data | Customize | Plain Text

Series representations:

ITA 11:52 AM 3/25/2020

sum(-1)^n/n - Wolfram|Alpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum(-1)^n%2Fn

WolframAlpha PRO FOR EDUCATORS

sum(-1)^n/n

Extended Keyboard   Upload   Examples   Random

Input interpretation:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Infinite sum:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2)$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Enlarge   Customize   Plain Text

Decimal approximation:

−0.69314718055994530941723212145817656807550013436025525412...

Convergence tests:

By the alternating series test, the series converges.

Partial sum formula:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^m \Phi(-1, 1, m+1) - \log(2)$$

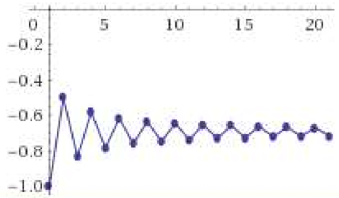
$\Phi(x, s, a)$ is the Lerch transcendent

Partial sums: More terms   Show points

11:55 AM 3/25/2020

Partial sums:

Fewer terms | More terms | Hide points



Partial sum values

(1, −1)
(2, −0.5)
(3, −0.833333)
(4, −0.583333)
(5, −0.783333)
(6, −0.616667)
(7, −0.759524)
(8, −0.634524)
(9, −0.745635)
(10, −0.645635)
(11, −0.736544)
(12, −0.653211)
⋮
(20, −0.668771)
(21, −0.71639)

Enlarge | Customize | Plain Text

Series representations:

Esempi (di applicazione del Criterio di Leibniz)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente (ma non assolutamente)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} (-1)$ è convergente (ma non assolutamente)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ è convergente (anche assolutamente)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0}$$

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n+1)\pi}{\sqrt{n}+\log n^3}$$

$\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1} \Rightarrow$ la serie è a segno alterno.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n+1)\pi}{\sqrt{n}+\log n^3} = (-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3}$$

DA STUDIARE

Proviamo prima con la convergenza assoluta

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3}$$ che confronto con $\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\log n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\log n^3}{\sqrt{n}}} = 1$$

$\Rightarrow \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3}$ diverge come $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ per confronto asintotico

$\Rightarrow$ <u>non</u> concludo <u>nulla</u> sulla mia serie

Proviamo con il teorema di Leibniz.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3} = 0 \qquad \text{OK!}$$

$$\sqrt{n}+\log n^3 < \sqrt{n+1}+\log(n+1)^3 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+\log(n+1)^3} \quad \forall n \Rightarrow \text{DECRESCENZA OK}$$

$\Rightarrow$ la serie converge per il criterio di Leibniz.

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SERIE NUMERICHE

Parte 6

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log(1-n^{-2}) = -\log(2)$$

<u>Def.</u>: Date $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, si dice SERIE PRODOTTO la serie di termini $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

<u>Teorema</u> (di Mertens)

$\sum_n a_n$ assolutamente convergente, $\sum_n b_n$ convergente

$\Rightarrow$ la serie prodotto $\sum_n c_n$ converge e si ha $\sum_n c_n = \sum_n a_n \cdot \sum_n b_n$

Se anche $\sum_n b_n$ converge assolutamente allora $\sum_n c_n$ converge assolutamente.

Def.: $\sum_n b_n$ è un RIORDINAMENTO di $\sum_n a_n$

$\Leftrightarrow \exists\ \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca tale che $b_n = a_{\varphi(n)}$

Teorema (di Dirichlet)

$\sum_n a_n$ assolutamente convergente, $\sum_n b_n$ riordinamento di $\sum_n a_n$

$\Rightarrow \sum_n b_n$ assolutamente convergente e $\sum_n b_n = \sum_n a_n$

NB: l'assoluta convergenza è fondamentale.

Si consideri la seguente serie, convergente ma non assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2 \quad (\leftarrow \text{lo si vedrà in seguito} \ldots)$$

$$+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \ldots \longrightarrow \log 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$+ \quad 0 \; + \frac{1}{2} \quad 0 \; - \frac{1}{4} \quad 0 \; + \frac{1}{6} \quad 0 \; - \frac{1}{8} \ldots \longrightarrow \frac{\log 2}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$$

$$1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \; - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \; - \frac{1}{4} \ldots \longrightarrow \log 2 + \frac{\log 2}{2} = \frac{3}{2} \log 2 \; ?$$

Ma si tratta di un riordinamento della prima!

(gli zeri non influiscono sulle somme parziali)

Teorema (di Riemann-Dini)

Sia $\sum_n a_n$ convergente, ma non assolutamente convergente.

Allora, $\forall\ l \in \mathbb{R}$ $\exists$ un riordinamento di $\sum_n a_n$ tale che $\sum_n a_n = l$.

Esistono anche riordinamenti divergenti e indeterminati.

Si può applicare la proprietà associativa alle serie?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

Cosa posso dire ad esempio di

$$a_0 + \underbrace{(a_1+a_2+a_3)}_{b_1} + \underbrace{(a_4+a_5)}_{b_2} + a_6 + a_7 + \underbrace{(a_8+a_9)}_{b_8} + \dots$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_6 + b_7 + b_8 + \dots$$

Posto $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \Rightarrow (t_n)_n$ è SOTTOSUCCESSIONE di $(s_n)_n$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente (divergente) $\Rightarrow \sum_n b_n$ convergente (divergente)

Per le serie indeterminate invece la proprietà associativa non conserva necessariamente il carattere.

<u>Controesempio</u>

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

è indeterminata perché $S_{2n} = 1$, $S_{2n+1} = 0 \ \forall n$

Ma si ha $\underbrace{(1+(-1))}_{0} + \underbrace{(1+(-1))}_{0} + \underbrace{(1+(-1))}_{0} + \ldots$

$\Rightarrow$ si ottiene $\sum_n b_n$ con $b_n = 0 \ \forall n \Rightarrow \sum_n b_n = 0$

Esercizi

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{10^n - n}{10^{n+1}}$

Non converge: $\lim_n \frac{10^n - n}{10^{n+1}} = \lim_n \frac{1 - \frac{n}{10^n}}{10} = \frac{1}{10} \neq 0$

$\Rightarrow \lim_n (-1)^{2n} \frac{10^{2n} - 2n}{10^{2n+1}} \neq 0 = \lim_n \frac{10^{2n} - 2n}{10^{2n+1}} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (-1)^n \frac{10^n - n}{10^{n+1}} \neq 0$

Non converge ovviamente neppure assolutamente.

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ non converge assolutamente (purtroppo...)

Infatti $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n} \cdot n = \lim_{n \to +\infty} \log n = +\infty$

$\Rightarrow$ Confrontando con $\sum_n \frac{1}{n}$ ho la divergenza per il criterio del confronto asintotico (alternativamente: $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$
$\Rightarrow$ CONFRONTO)

Possiamo applicare il Criterio di Leibniz?

Si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, ma è $\left(\frac{\log n}{n}\right)_n$ decrescente?

$f(x) = \frac{\log x}{x}$ $\quad f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ← STUDIAMO MONOTONIA

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} > 0 \iff \log x < 1 \iff x < e$$

$\Rightarrow f$ è decrescente per $x > e \Rightarrow \left(\frac{\log n}{n}\right)_n$ è decrescente per $n > 3$

$\Rightarrow$ la serie converge per il Crit. di Leibniz.

c) $\sum_n (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$

Non converge assolutamente (purtroppo...):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n-1}{n^2+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-n}{n^2+n} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico $\sum_n \frac{n-1}{n^2+n}$ diverge

Proviamo con il Criterio di Leibniz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0 \qquad \text{OK!}$$

Verifichiamo che $\left(\frac{n-1}{n^2+n}\right)_n$ è decrescente.

$$\frac{n+\cancel{1}-\cancel{1}}{\underbrace{(n+1)^2+n+1}_{(n+1)(n+2)}} \leq \frac{n-1}{\underbrace{n^2+n}_{n(n+1)}} \iff n^2(n+1) \leq (n+1)(n+2)(n-1)$$

$$\iff n^2 \leq (n+2)(n-1) = n^2+n-2 \iff n \geq 2 \quad \text{OK definitivamente}$$

$\Rightarrow$ la serie converge per il Criterio di Leibniz.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1+(-1)^n n^2}{n^3}$

$$\frac{n+1+(-1)^n n^2}{n^3} = \underbrace{\frac{n+1}{n^3}}_{\text{Serie 1}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{Serie 2}}$$

SOMMA DI 2 SERIE

$\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il Criterio di Leibniz

$\displaystyle\frac{n+1}{n^3} \cdot n^2 = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1 \Rightarrow \sum_n \frac{n+1}{n^3}$ converge per confronto asintotico con $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ la serie converge perchè somma di serie convergenti

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$

$$(-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n^{1/2}} + \frac{1}{n}$$ $\Rightarrow$ la serie è somma di due serie

$\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ converge per il criterio di Leibniz ma

$\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ è serie armonica divergente

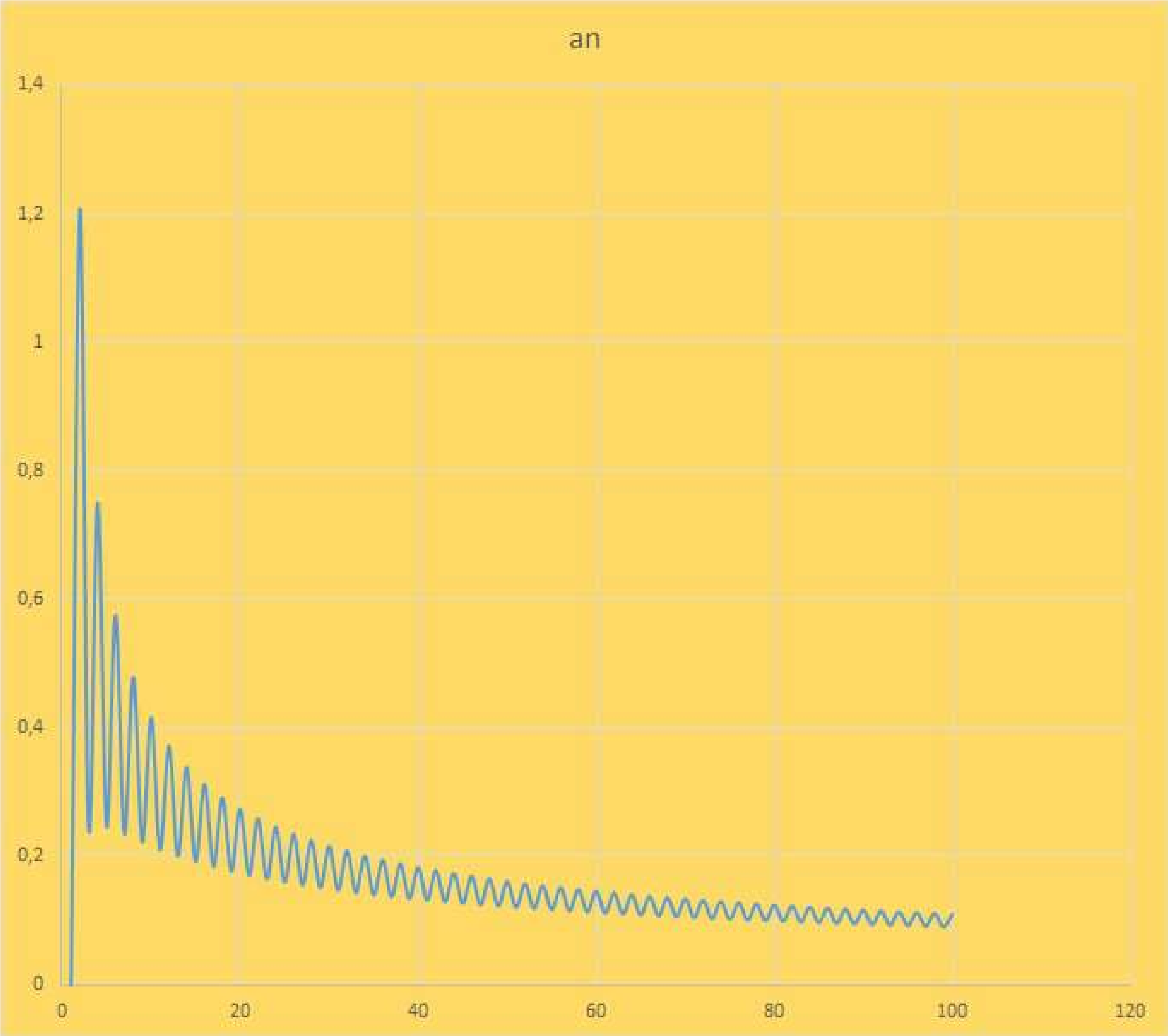
$\Rightarrow$ la serie somma diverge

NB: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = 0$ e $\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} \geq 0$

ma $\sum_n (-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$ non converge

$\Rightarrow$ la successione $\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right)_n$ non è decrescente

(altrimenti convergerebbe per il criterio di Leibniz)



an
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
20
40
60
80
100
120

f) Dove converge la serie $\sum_n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$?

Se $|x|>1$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = \infty \Rightarrow$ la serie non converge

Se $|x|<1$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} |x| \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x| < 1$

$\Rightarrow$ la serie è assolutamente convergente per il criterio del rapporto

Se $|x|=1$ ho le serie

$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente (armonica generalizzata) se $x=1$

$\sum_n (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergente per il Criterio di Leibniz

NB: si può anche usare il Criterio della radice.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} |x|\, n^{\frac{1}{2n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\log n^{\frac{1}{2n}}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2n} \log n} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = |x|$$ $\Rightarrow$ ho convergenza assoluta e quindi convergenza per $|x| < 1$.