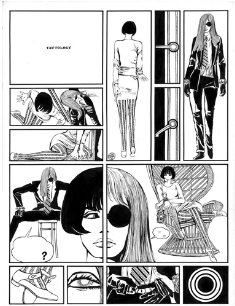
Un accenno alla logica proposizionale

(09–10/03/2021)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Scaletta

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale

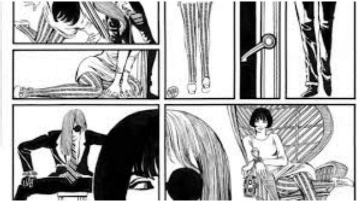
Scaletta

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica cosí semplice

Scaletta

- Sintassi *standard* (o quasi) del linguaggio proposizionale
- Semantica del linguaggio proposizionale
- Apparato deduttivo
- Perché non contentarsi di una logica cosí semplice
- Sintesi di circuiti combinatorî (Approfondim. facoltativo)



Sintassi

Alfabeto

Consideriamo una successione (infinita)

$$(\,, \quad) \,, \quad \rightarrow \,, \quad \mathsf{p}_0 \,, \quad \mathsf{p}_1 \,, \quad \mathsf{p}_2 \,, \quad \mathsf{p}_3 \,, \quad \mathsf{p}_4 \,, \quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

Alfabeto

Consideriamo una successione (infinita)

$$(\ ,\quad)\ ,\quad \rightarrow\ ,\quad p_0\ ,\quad p_1\ ,\quad p_2\ ,\quad p_3\ ,\quad p_4\ ,\quad \ldots$$

di entità distinte una dall'altra, da chiamarsi **simboli**.

(E se volessimo ridurci ad un alfabeto finito ?)

Stringhe

Con la notazione

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}\ ;$$

indichiamo semplicemente una sequenza (finita)

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_h \rangle\ ,$$

ovvero un'*h-upla*, con un numero qualsiasi h di componenti, *formata di simboli* σ_i

Lettere proposizionali

Indichiamo con

$$f\,,\quad \underbrace{p\,,\quad q\,,\quad r\,,\quad s\,,\quad p'\,,\quad q'\,,\quad r'\,,\quad s'\,,\quad p''\,,\quad \ldots}_{\text{lettere proposizionali}}$$

la successione di 1-uple

$$\text{“}p_0\text{”}\,,\quad \text{“}p_1\text{”}\,,\quad \text{“}p_2\text{”}\,,\quad \text{“}p_3\text{”}\,,\quad \text{“}p_4\text{”}\,,\quad \text{“}p_5\text{”}\,,\quad \text{“}p_6\text{”}\,,\quad \ldots$$

L'implicazione materiale

Definiamo l'operazione $\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\rho}$ per ogni coppia

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; \text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”}\,, \qquad \boldsymbol{\rho} \;=\; \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”}$$

di sequenze finite di simboli ponendo

$$\text{“}\sigma_1 \cdots \sigma_h\text{”} \quad \Rightarrow \quad \text{“}\rho_1 \cdots \rho_k\text{”} \qquad =_{\text{Def}} \qquad \text{“}(\sigma_1 \cdots \sigma_h \rightarrow \rho_1 \cdots \rho_k)\text{”}$$

Ecco gli enunciati:

Definiamo $\mathcal{P}$ il *piú piccolo* soprainsieme di

$$\{\ f\ ,\ \ p\ ,\ \ q\ ,\ \ r\ ,\ \ s\ ,\ \ p'\ ,\ \ q'\ ,\ \ r'\ ,\ \ s'\ ,\ \ p''\ ,\ \ \ldots\ \ \}$$

tale che per ogni coppia α, β di stringhe <u>in $\mathcal{P}$</u> anche $\alpha \Rightarrow \beta$ appartenga a $\mathcal{P}$

Un linguaggio provvisorio per la logica proposizionale è dato dalla seguente grammatica:

REGOLE DI PRODUZIONE EBNF:

$$\begin{array}{lcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{Let}\,\rangle \mid \langle\,\text{Cost}\,\rangle \mid (\ \langle\,\text{enunc}\,\rangle\ \langle\,\text{Bop}\,\rangle\ \langle\,\text{enunc}\,\rangle\ ) \\
\langle\,\text{Let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{Let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{Cost}\,\rangle & ::= & f \\
\langle\,\text{Bop}\,\rangle & ::= & \rightarrow
\end{array}$$

ove la categoria sintattica principale è l'*enunciato*, $\langle\,\text{enunc}\,\rangle$.

Esempi sulla sintassi degli enunciati

```
In base alla sintassi degli enunciati della logica proposizionale:
==========================================================

f      è un enunciato in quanto costante
q      è un enunciato in quanto lettera proposizionale
r      è un enunciato in quanto lettera proposizionale
p'     è un enunciato in quanto lettera p seguita da un certo numero di    '
(q->p')   è un enunciato in quanto espressione esplicita di ciò che abbreviamo come "q" => "p'"
(q->p'(   non è un enunciato, pur essendo una stringa composta con i simboli del nostro alfabeto
((q->p')->r)   è un enunciato in quanto espressione esplicita di ciò che abbreviamo come "(q->p')" => "r"
((q->p')->((q->p')->r))      è un enunciato
(q->p')->((q->p')->r)        a rigore NON è un enunciato, ma spesso abbrevieremo cosí quello che abbiamo visto subito sopra
q->p->r                      NON è un enunciato ai sensi della grammatica ufficiale; in effetti è ambiguo perché
                             non è chiaro se debba essere inteso come "(q->(p->r))" o come "((q->p)->r)"
```

Un linguaggio piú completo per la logica proposizionale è dato dalla grammatica (ove la categoria sintattica principale è $\langle\,\text{enunc}\,\rangle$):

REGOLE DI PRODUZIONE EBNF :

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{Let}\,\rangle \mid \langle\,\text{Cost}\,\rangle \mid (\ \langle\,\text{Uop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\ ) \\
 & & \mid (\ \langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{Bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\ ) \\
 & & \\
\langle\,\text{Let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{Let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{Cost}\,\rangle & ::= & f \mid v \\
\langle\,\text{Uop}\,\rangle & ::= & \neg \\
\langle\,\text{Bop}\,\rangle & ::= & \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +
\end{array}
$$

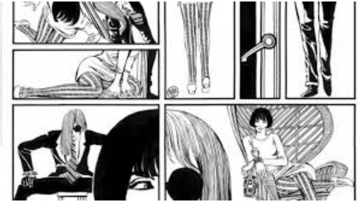
Un linguaggio piú completo per la logica proposizionale è dato dalla grammatica (ove la categoria sintattica principale è $\langle\,\text{enunc}\,\rangle$):

Regole di produzione EBNF oppure, ambiguam. . . . :

$$
\begin{array}{lcl}
\langle\,\text{enunc}\,\rangle & ::= & \langle\,\text{Let}\,\rangle \mid \langle\,\text{Cost}\,\rangle \mid \langle\,\text{Uop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle \\
 & & \mid \langle\,\text{enunc}\,\rangle\,\langle\,\text{Bop}\,\rangle\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle \mid (\,\langle\,\text{enunc}\,\rangle\,) \\
 & & \\
\langle\,\text{Let}\,\rangle & ::= & p \mid q \mid r \mid s \mid \langle\,\text{Let}\,\rangle\,' \\
\langle\,\text{Cost}\,\rangle & ::= & f \mid v \\
\langle\,\text{Uop}\,\rangle & ::= & \neg \\
\langle\,\text{Bop}\,\rangle & ::= & \& \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \mid \,|\, \mid \downarrow \mid > \mid +
\end{array}
$$

In $\mathcal{P}$ possiamo introdurre come *abbreviazioni* i costrutti di **negazione**, **disgiunzione**, **congiunzione**, **biimplicazione**, ecc.:

$$
\begin{array}{rcll}
\neg\alpha & =_{\text{Def}} & \alpha \Rightarrow f\,, & \\
v & =_{\text{Def}} & \neg f\,, & \\
\alpha \vee \beta & =_{\text{Def}} & (\neg\alpha) \Rightarrow \beta\,, & \\
\alpha \,\&\, \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)\,, & \\
\alpha \leftrightarrow \beta & =_{\text{Def}} & (\alpha \Rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \Rightarrow \alpha)\,, & \\
\alpha \mid \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \,\&\, \beta)\,, & \text{“ NAND ”} \\
\alpha \downarrow \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \vee \beta)\,, & \text{“ NOR ”} \\
\alpha > \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \Rightarrow \beta)\,, & \\
\alpha + \beta & =_{\text{Def}} & \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)\,. & \text{“ XOR ”}
\end{array}
$$



Semantica

Ecco la tabella dell'implicazione:

		$\Rightarrow$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

Osserviamo che ogni funzione

$$\mathfrak{I} \in \{\mathrm{f}, \mathrm{v}\}^{\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}}$$

ne *induce* un'altra $\alpha \mapsto \alpha^{\mathfrak{I}}$ definita *per tutti* gli enunciati α, in base alle tabelle dei connettivi proposizionali.

In particolare: $f^{\mathfrak{I}} = \mathrm{f}$, $(f \Rightarrow f)^{\mathfrak{I}} = \mathrm{v}$ e,
per ogni enunciato α, $(\alpha \Rightarrow f)^{\mathfrak{I}}$ è il contrario di $\alpha^{\mathfrak{I}}$

Esempio: Valutazione di un enunciato in un'interpretazione $\mathfrak{I}$

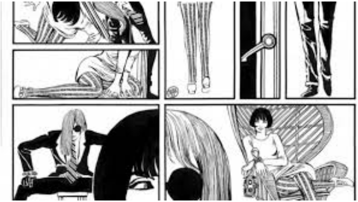
```
Passando ora, brevemente, alla semantica:
=========================================

Un'interpretazione I che mandi q in v, la lettera proposizionale p' in f, la lettera r in v rende
     ???? l'enunciato ((q->p')->((q->p')->r))
                         v  f        v
                           f       f    v
                           f           v
                             v

     vero l'enunciato ((q->p')->((q->p')->r))
```

Scriveremo che

$$A \models \vartheta ,$$

(dove $A \subseteq \mathcal{P}$ e $\vartheta \in \mathcal{P}$) se:

> in tutte le interpretazioni $\mathfrak{I}$ tali che
>
> $$\alpha^{\mathfrak{I}} = \mathtt{v} \quad \text{vale per ogni} \quad \alpha \in A ,$$
>
> vale anche che
>
> $$\vartheta^{\mathfrak{I}} = \mathtt{v} .$$



Apparato deduttivo

i.	$\big(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\big) \Rightarrow \big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\big)$
ii.	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
iii.	$\big((\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow (\beta \Rightarrow f)\big) \Rightarrow \big(\beta \Rightarrow \alpha\big)$

VERIFICA DI TAUTOLOGICITÀ:

Controllare che tutti gli enunciati che ricadono sotto uno qualsiasi di questi schemi risultano veri in ogni possibile assegnamento di valori di verità. Suggerimento: Impiegare la *reductio ad absurdum*.

Scriveremo che

$$A \ \vdash \ \vartheta \ ,$$

se c'è una sequenza

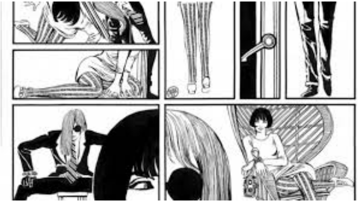
$$\delta \ = \ \langle \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_h \rangle$$

che costituisce $\boxed{\textbf{dimostrazione} \text{ di } \vartheta \text{ da } A}$ in quanto:

1) $\delta_h = \vartheta$;
2) per ogni $i = 0, \ldots, h$, accade che δ_i sia un enunciato in $\mathcal{P}$ che o:
   - ⋆ appartiene ad A, oppure
   - ⋆ ricade in uno dei tre schemi del lucido precedente, oppure
   - ⋆ è *preceduto* da due enunciati δ_{j_0} e $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, nel senso che $j_0 < i$ e $j_1 < i$.

Dimostriamo in 9 passi l'enunciato $f \Rightarrow p$ da $\emptyset$, come segue:

		Ax.			Prem.
1.	$f \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[ii]			
2.	$(f \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow ((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[i]	3.	$(f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[1, 2]
4.	$((f \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[iii]	5.	$f \Rightarrow f$	[3, 4]
6.	$(f \Rightarrow f) \Rightarrow ((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f))$	[ii]	7.	$(p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)$	[5, 6]
8.	$((p \Rightarrow f) \Rightarrow (f \Rightarrow f)) \Rightarrow (f \Rightarrow p)$	[iii]	9.	$f \Rightarrow p$	[7, 8]

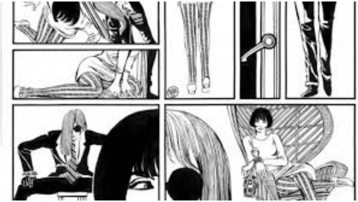


Guardando avanti. . .

Ecco *assiomi propri* espressi in *logica predicativa*

$ab \equiv pq \,\&\, ab \equiv rs$	$\rightarrow$	$pq \equiv rs$	(TE)
$ab \equiv cc$	$\rightarrow$	$a = b$	(IE)
$\exists\, x \big(B\, qax$	$\&$	$ax \equiv bc \big)$	(SC)
$a \neq b \,\&\, B\, abc \,\&\, B\, a'b'c' \,\&\, ab \equiv a'b' \,\&$			(FS)
$bc \equiv b'c' \,\&\, ad \equiv a'd' \,\&\, bd \equiv b'd'$	$\rightarrow$	$dc \equiv c'd'$	
$B\, aba$	$\rightarrow$	$a = b$	(IB)
$B\, apc \,\&\, B\, bqc$	$\rightarrow$	$\exists\, x \,\big(B\, pxb \,\&\, B\, qxa \,\big)$	(IP)
$\exists\, a\, \exists\, b\, \exists\, c \big(\neg B\, abc$	$\&$	$\neg B\, bca \quad \& \quad \neg B\, cab \big)$	(Lo_2)
$p \neq q \,\&\, ap \equiv aq \,\&\, bp \equiv bq \,\&\, cp \equiv cq$	$\rightarrow$	$B\, abc \vee B\, bca \vee B\, cab$	(Up_2)
$B\, adt \,\&\, B\, bdc \,\&\, a \neq d$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \exists\, y \,\big(B\, abx \,\&\, B\, acy \,\&\, B\, xty \,\big)$	(Eu)
$\exists\, a\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(x \in X \,\&\, y \in Y \;\rightarrow\; B\, axy \big)$	$\rightarrow$	$\exists\, b\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(x \in X \,\&\, y \in Y \;\rightarrow\; B\, xby \big)$	(Co)

(TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
(IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
(SC) Assioma di costruzione di segmenti
(FS) Assioma dei 5 segmenti (variante di Makarios)
(IB) Assioma d'identità per l'intermedietà
(IP) Assioma interno di Pasch
(Lo_2) Assioma 2-dimensionale inferiore
(Up_2) Assioma 2-dimensionale superiore
(Eu) Assioma euclideo
(Co) Assioma di continuità



Sintesi di circuiti combinatorî

Killer application *(in elettronica digitale):*

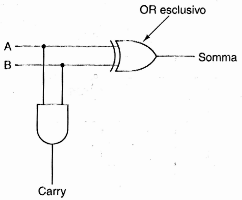
Disegno, minimizzazione,

generazione automatica di

circuiti combinatòri

A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

a)



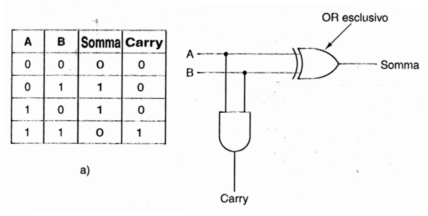
1

Killer application (*in elettronica digitale*):

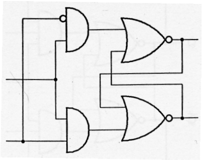
Disegno, minimizzazione,

generazione automatica di

circuiti combinatòri[1]



A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



[1] Per i circuiti sequenziali, serve di piú...

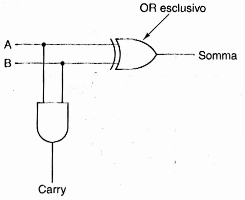
Disegno, minimizzazione,

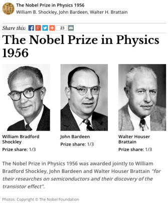
generazione automatica di

circuiti combinatòri

A	B	Somma	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

a)





The Nobel Prize in Physics 1956
William B. Shockley, John Bardeen, Walter H. Brattain

Share this: 23

The Nobel Prize in Physics 1956

William Bradford Shockley
Prize share: 1/3

John Bardeen
Prize share: 1/3

Walter Houser Brattain
Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1956 was awarded jointly to William Bradford Shockley, John Bardeen and Walter Houser Brattain *"for their researches on semiconductors and their discovery of the transistor effect"*.

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 2^{2^{\ell}}$$

Potere espressivo del linguaggio proposizionale

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \quad =_{\text{Def}} \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 2^{2^{\ell}}$$

Quale sottoinsieme di $\mathbb{B}$ costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati in $\mathcal{P}$?

Chiamiamo **funzioni booleane** gli elementi di

$$\mathbb{B} \quad =_{\text{Def}} \quad \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 2^{2^{\ell}}$$

Quale sottoinsieme di $\mathbb{B}$ costituiscono le funzioni specificate dagli enunciati in $\mathcal{P}$?

La risposta è semplice: $\boxed{\textit{tutto quanto } \mathbb{B}}$

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	f	&	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\vert$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	f	$\&$	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\mid$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	f	&	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\mid$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$'$	$''$	0 f	1 $\&$	2 $>$	3 $'$	4 $<$	5 $''$	6 $+$	7 $\vee$	8 $\downarrow$	9 $\leftrightarrow$	10 $\neg''$	11 $\leftarrow$	12 $\neg'$	13 $\rightarrow$	14 $\mid$	15 v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

$\&$		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\vee$		
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$'$	$''$	f	&	$>$	$'$	$<$	$''$	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg''$	$\leftarrow$	$\neg'$	$\rightarrow$	$\mid$	v
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	f	f	f	v	v	v	v	f	f	f	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v	f	f	v	v
v	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v	f	v

zOOMando entro questa tavola, troviamo che:

$\neg$	
0	1
1	0

&		
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\vee$		
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\rightarrow$		
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In $\mathcal{P}$ possiamo introdurre come *abbreviazioni* i costrutti di **negazione**, **disgiunzione**, **congiunzione**, **biimplicazione**:

$$
\begin{aligned}
\neg\alpha \quad &=_{\mathrm{Def}} \quad \alpha \Rightarrow f\,, \\
\alpha \vee \beta \quad &=_{\mathrm{Def}} \quad (\neg\alpha) \Rightarrow \beta\,, \\
\alpha \,\&\, \beta \quad &=_{\mathrm{Def}} \quad \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)\,, \\
\alpha \leftrightarrow \beta \quad &=_{\mathrm{Def}} \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \Rightarrow \alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0\,,\,1\}^{\ell} \;\longrightarrow\; \{0\,,\,1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,,\ldots,\,p_\ell\,,\,\neg p_1\,,\ldots,\,\neg p_\ell\,.$$

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0\,,\,1\}^{\ell} \;\longrightarrow\; \{0\,,\,1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,,\ldots,\,p_\ell\,,\,\neg p_1\,,\ldots,\,\neg p_\ell\,.$$

Casi basilari:

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0\,,\ 1\}^{\ell} \ \longrightarrow\ \{0\,,\ 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,, \ldots,\ p_\ell\,,\ \neg p_1\,, \ldots,\ \neg p_\ell\,.$$

Casi basilari:

- la costante 0 ($= \mathtt{f}$) può essere vista come disgiunzione vuota

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0\,,\,1\}^{\ell} \quad\longrightarrow\quad \{0\,,\,1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1\,,\ldots,\,p_\ell\,,\,\neg p_1\,,\ldots,\,\neg p_\ell\;.$$

Casi basilari:

- la costante 0 ($=\mathtt{f}$) può essere vista come <u>dis</u>giunzione vuota
- la costante 1 ($=\mathtt{v}$) come <u>con</u>giunzione vuota

Qualunque funzione del tipo

$$\Phi : \{0, 1\}^{\ell} \longrightarrow \{0, 1\}$$

(sono, in tutto, $2^{2^{\ell}}$) si può esprimere come disgiunzione di congiunzioni di *letterali* presi dalla scorta

$$p_1, \ldots, p_\ell, \neg p_1, \ldots, \neg p_\ell .$$

Casi basilari:

- la costante 0 ($= \mathtt{f}$) può essere vista come <u>disg</u>iunzione vuota
- la costante 1 ($= \mathtt{v}$) come <u>cong</u>iunzione vuota
- un letterale (o semplice lettera) proposizionale, preso a sé, vale sia come congiunzione che come disgiunzione

A titolo di esempio, esprimiamo in forma disgiuntiva normale una celebre funzione booleana Φ, la **Implicazione 'materiale'**

		$\rightarrow$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prendendo le righe a risultato 1, leggiamo direttamente:

$$\neg p_1 \,\&\, \neg p_2 \vee \neg p_1 \,\&\, p_2 \vee p_1 \,\&\, p_2$$

Fra le altre, ecco una codifica ben piú sbrigativa:

$$\neg p_1 \vee p_2$$

$$\neg(\alpha_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \alpha_n) = (\neg\alpha_1 \vee \cdots \vee \neg\alpha_n)$$
$$\neg(\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m) = (\neg\beta_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \neg\beta_m)$$

Augustus De Morgan
1806–1871

A titolo di esempio, esprimiamo in forma congiuntiva normale una celebre funzione booleana Φ, la **Implicazione ‘a tre vie’**

seAlloraAltrim			
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Prendendo le rige a risultato 0, leggiamo direttamente:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \,\&\, (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \,\&\, (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \,\&\, (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$$

Fra le altre, ecco una codifica ben piú sbrigativa:

$$(\neg p_1 \vee p_2) \,\&\, (p_1 \vee p_3)$$

$p \setminus q$	0	1
0	0	1
1	2	3

$p \setminus q\ r$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$s\ p \setminus q\ r$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Mappe K (provvisoriam. vuote) per funzioni booleane a 2,3,4 operandi

Esercizio

Rappresentare tramite mappa **K** una $\Phi(p, q, r, s)$ tale che

$$\Phi(\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{v}) =$$
$$\Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{f}) =$$
$$\Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v}) = \mathrm{v}$$

e che

$$\Phi(\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f}) =$$
$$\Phi(\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v}) = \mathrm{f}\ ,$$

utilizzando:

✓ per indicare il risultato v,

? per risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato f

Esercizio

Rappresentare tramite mappa **K** una $\Phi(p, q, r, s)$ tale che

$$\Phi(\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{v}) =$$
$$\Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{f}) =$$
$$\Phi(\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{v}) = \mathrm{v}$$

e che

$$\Phi(\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{v},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{f},\mathrm{f}) =$$
$$\Phi(\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{f}) = \Phi(\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v},\mathrm{v}) = \mathrm{f}\,,$$

utilizzando:

$\checkmark$ per indicare il risultato v,

? per risultato arbitrario,

nessun contrassegno per il risultato f

Poi, sfruttando la mappa, esprimere una tale Φ utilizzando *al minimo* i connettivi $\neg$, $\&$, $\vee$.

Soluzione del precedente esercizio

$p\ q \setminus r\ s$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

Soluzione del precedente esercizio

$p\,q \setminus r\,s$	00	01	11	10
00	?	✓	✓	✓
01	✓	✓	✓	✓
11		?		
10		✓	?	

Da questa mappa risalta un enunciato che descrive la Φ:

$$\neg p \vee (s \,\&\, \neg r) \vee (q \,\&\, \neg\, q)$$

Esercizio del tutto simile al precedente

$p\,q \setminus r\,s$	00	01	11	10
00	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
01		?		
11		$\checkmark$	?	
10	?	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

Esercizio del tutto simile al precedente

$p\,q \setminus r\,s$	00	01	11	10
00	✓	✓	✓	✓
01		?		
11		✓	?	
10	?	✓	✓	✓

Trovare un enunciato che esprima una funzione booleana conforme a questa mappa, utilizzando *al minimo* i connettivi $\neg$, $\&$, $\vee$.